

GEOMETRIA 2  
A.A. 2016/17

PROF. STEFANO FRANCAVIGLIA

28 luglio 2017

## Indice

Capitolo 1. Complementi di algebra lineare	3
1. Richiami sulle applicazioni lineari	3
2. Applicazioni e forme bilineari	5
3. Forme quadratiche	8
4. Isomorfismo tra $\text{bil}(V)$ e $\text{hom}(V, V^*)$	9
5. Diagonalizzazione di forme bilineari simmetriche	10
6. Diagonalizzazione delle forme quadratiche	13
7. Quadriche e coniche	14
8. Spazi proiettivi	23
Capitolo 2. Topologia degli Spazi metrici	34
1. Spazi metrici	34
2. Aperti e chiusi in spazi metrici	40
3. Successioni di cauchy e completezza	47
4. Continuità in spazi metrici	53
Capitolo 3. Topologia generale	55
1. Spazi topologici	55
2. Minicorso di aritmetica ordinale	62
3. Cofinalità e convergenza di successioni generalizzate	68
4. Assiomi di numerabilità	74
5. Continuità in spazi topologici e omeomorfismi	76
6. Topologia indotta da una funzione, sottospazi e immersioni	80
7. Prodotti	83
8. Quozienti	86
9. Spazi di Hausdorff	91
10. Quozienti per gruppi di omeomorfismi	93
11. Ricoprimenti e compattezza	95
12. Teorema del compatto-Hausdorff: applicazioni a quozienti e taglia e cuci	105
13. Locale compattezza e compattificazioni	108
14. Connessione	112

## Complementi di algebra lineare

### 1. Richiami sulle applicazioni lineari

**Definizione 1.1** (Applicazione lineare). *Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Una funzione  $f : V \rightarrow W$  si dice **lineare** se per ogni  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  e per ogni  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  si ha*

$$f\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i \lambda_i f(v_i).$$

**Teorema 1.2.** *Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Un'applicazione  $f : V \rightarrow W$  è lineare se e solo se valgono le seguenti due condizioni:*

$$\begin{aligned} \forall v, w \in V \quad f(v+w) &= f(v) + f(w), \\ \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda v) &= \lambda f(v). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione fa parte del programma di geometria 1. □

**Definizione 1.3** (Spazio  $\text{hom}(V, W)$ ). *Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Sulle applicazioni lineari da  $V \rightarrow W$  si mettono le operazioni*

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad (\lambda f)(v) = \lambda f(v).$$

*Con tali operazioni l'insieme delle applicazioni lineari da  $V$  a  $W$  risulta uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ , che si denota con  $\text{hom}(V, W)$  (talvolta anche con  $L(V, W)$  o  $\mathcal{L}(V, W)$ ).*

**Definizione 1.4** (Spazio duale). *Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Lo spazio duale di  $V$ , denotato con  $V^*$  non è altro che lo spazio  $\text{hom}(V, \mathbb{K})$ .*

**Definizione 1.5** (Matrice associata a  $f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ). *Siano  $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Sia  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  una base di  $V$ ,  $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$  una base di  $W$  e  $f \in \text{hom}(V, W)$ . La **matrice associata a  $f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$**  è la matrice che ha come colonne le coordinate, rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ , dei vettori  $f(v_i)$ :*

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = \left( \begin{array}{ccc} \left[ f(v_1) \right]_{\mathcal{B}'} & \left[ f(v_2) \right]_{\mathcal{B}'} & \dots & \left[ f(v_n) \right]_{\mathcal{B}'} \end{array} \right)$$

*Si noti che la matrice associata a  $f$  è una matrice  $m \times n$  ove  $\mathbf{m} = \dim(\mathbf{W})$  e  $\mathbf{n} = \dim(\mathbf{V})$ .*

**Teorema 1.6** (Teorema del cambio di basi). *Siano  $V, W$  due spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  due basi di  $V$ , siano  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  due basi di  $W$  e sia  $f : V \rightarrow W$  lineare. Allora si ha*

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(Id_W) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id_V)$$

ove  $\cdot$  denota il prodotto riga per colonna di matrici.

Le matrici del cambio di base funzionano come dei “traduttori” e il Teorema del cambio di basi si può visualizzare come segue: a livello di composizione di funzioni abbiamo:

$$V \xrightarrow{Id_V} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{Id_W} W$$

Se teniamo conto delle basi abbiamo:

$$V, \mathcal{B}' \xrightarrow{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id_V)} V, \mathcal{B} \xrightarrow{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)} W, \mathcal{C} \xrightarrow{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(Id_W)} W, \mathcal{C}'$$

Si noti che la moltiplicazione tra matrici avviene nel “verso opposto” rispetto alle frecce dei precedenti diagrammi.

**Teorema 1.7.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  due basi di  $V$ . Allora*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id) = (M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id))^{-1}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id) = I$ . Dalla regola di composizione segue che  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id) = I$ .  $\square$

**1.1. Cambio di base vs Cambio di coordinate.** La matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id)$  è spesso detta indifferentemente matrice del cambio di base o matrice del cambio di coordinate. Bisogna fare un po' di attenzione. Se siamo in  $\mathbb{K}^n$  e  $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$  è una base, espressa in coordinate canoniche, la matrice

$$M = [v_1 \dots v_n]$$

che ha come colonne i vettori  $v_i$ , non è altro che la matrice

$$M_{\mathcal{B}}^{Canonica}(Id)$$

ossia trasforma le coordinate nella base  $\mathcal{B}$  nelle coordinate canoniche. Se viceversa  $A$  è una matrice tale che, dato un vettore di coordinate canoniche  $X$ , ci fornisce il vettore delle coordinate nella base  $\mathcal{B}$ , abbiamo  $A = M_{Canonica}^{\mathcal{B}}(Id) = M^{-1}$ . In altre parole, se abbiamo la matrice del cambio di coordinate per conoscere la nuova base  $\mathcal{B}$  basta fare l'inversa della matrice.

Vediamolo con un esempio. In  $\mathbb{R}^2$  supponiamo di voler cambiare coordinate imponendo  $X = x + y$ ,  $Y = y - 2x$ . Si ha

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e dunque la base che realizza tale cambio di coordinate è data dalle colonne della matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  e dunque è data dai vettori  $v_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $v_2 = (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$ .

## 2. Applicazioni e forme bilineari

**Definizione 2.1.** Siano  $V, W, U$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Una funzione

$$f : V \times W \rightarrow U$$

si dice bilineare se è lineare in entrambi gli argomenti. Ossia se  $\forall k \in \mathbb{N}, v, v_1, \dots, v_k \in V, w, w_1, \dots, w_k \in W, \lambda_1, \dots, \lambda_i \in \mathbb{K}$  si ha

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, w\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(v_i, w)$$

$$f\left(v, \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(v, w_i)$$

ESEMPIO 2.2. Il prodotto-vettore che si usa in fisica è un'applicazione bilineare  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

ESEMPIO 2.3. Sia  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  una matrice. Per ogni  $k, s$  essa induce un'applicazione bilineare da  $\mathcal{M}_{k \times m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n \times s}(\mathbb{K})$  a  $\mathcal{M}_{k, s}(\mathbb{K})$  data da

$$f(X, Y) = XAY$$

Nel caso particolare in cui  $k = s = 1$ , usando che  $\mathbb{K}^n$  è isomorfo sia a  $\mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$  che a  $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ , si ottiene un'applicazione bilineare da  $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ .

**Definizione 2.4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Una forma bilineare su  $V$  è un'applicazione bilineare  $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ .

ESEMPIO 2.5. Il prodotto scalare di  $\mathbb{R}^2$  che si usa in fisica è una forma bilineare su  $\mathbb{R}^2$ .

ESEMPIO 2.6. Sia  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  una matrice quadrata. Essa induce una forma bilineare su  $\mathbb{K}^n$  data da

$$b(X, Y) = X^t A Y$$

ESEMPIO 2.7. Sia  $V = \mathbb{C}^\infty([0, 1])$ . La funzione  $b(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  è una forma bilineare su  $V$ .

ESERCIZIO 2.8. Dato uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$ , dimostrare che l'insieme delle forme bilineari su  $V$  è uno sottospazio vettoriale di  $\mathbb{K}^{V \times V}$ .

**Definizione 2.9.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Lo spazio delle applicazioni bilineari su  $V$  si denota con  $\text{bil}(V)$ .

**Teorema 2.10** (Di estensione bilineare unica). Siano  $V, W, U$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Sia  $\{v_i\}_{i=1}^k$  una base di  $V$  e  $\{w_i\}_{i=1}^s$  una di base di  $W$ . Per ogni scelta di vettori  $u_{ij}$ , con  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $j \in \{1, \dots, s\}$  esiste una unica applicazione bilineare  $f : V \times W \rightarrow U$  tale che

$$f(v_i, w_j) = u_{ij} \quad \forall i, j.$$

DIMOSTRAZIONE. Vediamo l'esistenza. Dati  $v = \sum x_i v_i$  e  $w = \sum y_j w_j$  definiamo

$$f(v, w) = \sum_{ij} x_i y_j u_{ij}.$$

Tale funzione è chiaramente bilineare perché le coordinate sono lineari. Per l'unicità sia  $g$  un'altra applicazione bilineare con le proprietà richieste. Allora per bilinearità si ha

$$g(v, w) = g\left(\sum_i x_i v_i, \sum_j y_j w_j\right) = \sum_i x_i g(v_i, \sum_j y_j w_j) = \sum_{ij} x_i y_j b(v_i, w_j) = \sum_{ij} x_i y_j u_{ij}$$

e dunque  $g$  coincide con  $f$ .  $\square$

Per le forme bilineari (e quindi  $U = \mathbb{K}$ ) i vettori  $u_{ij}$  sono numeri  $a_{ij}$  e dunque questo teorema ci dice una applicazione  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  è bilineare se e solo se in coordinate  $b$  è della forma

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum a_{ij} x_i y_j$$

ossia se è un polinomio omogeneo di secondo grado i cui monomi contengono una "variabile  $x$ " e una "variabile  $y$ ".

Si noti che se formiamo la matrice  $A = (a_{ij})$  si ha

$$\sum a_{ij} x_i y_j = X^t A Y$$

ove si è posto  $X = (x_1, \dots, x_n)^t$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)^t$ .

**Definizione 2.11** (Matrice associata a una forma bilineare). *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{K}$  e sia  $\mathcal{B} : v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$ . Sia  $b \in \text{bil}(V)$ . La matrice associata a  $b$  nella base  $\mathcal{B}$  è la matrice  $A_{ij} = b(v_i, v_j)$  cioè*

$$A = \begin{pmatrix} b(v_1, v_1) & b(v_1, v_2) & b(v_1, v_3) & \dots & b(v_1, v_n) \\ b(v_2, v_1) & b(v_2, v_2) & b(v_2, v_3) & \dots & b(v_2, v_n) \\ b(v_3, v_1) & b(v_3, v_2) & b(v_3, v_3) & \dots & b(v_3, v_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(v_n, v_1) & b(v_n, v_2) & b(v_n, v_3) & \dots & b(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

Ricapitolando, se  $A$  è la matrice associata a  $b$  nella base  $\mathcal{B}$ ,  $X = \begin{bmatrix} v \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$  e  $Y = \begin{bmatrix} w \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ ,

allora  $b(v, w)$  si calcola con la formula

$$b(v, w) = X^T A Y.$$

**Teorema 2.12** (Cambio di coordinate). *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{K}$  e sia  $b \in \text{bil}(V)$ . Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  e sia  $A$  la matrice associata a  $b$  nella*

base  $\mathcal{B}$ . Se  $\mathcal{B}'$  è un'altra base di  $V$  e  $M = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)$  è la matrice del cambio di coordinate dalla base  $\mathcal{B}'$  alla base  $\mathcal{B}$ , allora la matrice associata a  $b$  nella base  $\mathcal{B}'$  è:

$$M^T A M.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $v, w \in V$  e siano  $X = [v]_{\mathcal{B}'}, Y = [w]_{\mathcal{B}'}$ . Per definizione di matrice del cambio di coordinate si ha

$$[v]_{\mathcal{B}} = M X \quad [w]_{\mathcal{B}} = M Y$$

da cui

$$b(v, w) = ([v]_{\mathcal{B}})^T A [w]_{\mathcal{B}} = X^T M^T A M Y = X^T (M^T A M) Y$$

quindi la matrice di  $b$  nella base  $\mathcal{B}'$  è  $M^T A M$ .  $\square$

**Definizione 2.13.** Due matrici quadrate  $A, B$  si dicono congruenti se esiste una matrice invertibile  $M$  tale che

$$B = M^T A M.$$

Dal teorema del cambio di coordinate si evince che due matrici sono congruenti se e solo se rappresentano la stessa forma bilineare in basi diverse.

**Definizione 2.14.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Una forma  $b \in \text{bil}(V)$  si dice **simmetrica** se  $b(v, w) = b(w, v)$  per ogni  $v, w \in V$ ; si dice **antisimmetrica** se  $b(v, w) = -b(w, v)$ .

In pratica la simmetrica per forme bilineari è un analogo della proprietà commutativa. Si noti che se  $\mathbb{K}$  è un campo di caratteristica due allora  $1 = -1$  e quindi la nozione di simmetrica e antisimmetrica coincidono.

**Teorema 2.15.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su  $\mathbb{K}$ . Una forma  $b \in \text{bil}(V)$  è simmetrica se e solo se la sua matrice in una base qualsiasi lo è; è antisimmetrica se e solo se la sua matrice in una base qualsiasi lo è.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$ . Se  $b$  è simmetrica allora  $b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i)$  e quindi la matrice associata  $A$  è simmetrica per definizione. Viceversa, se  $A$  è simmetrica allora si ha

$$X^T A Y = (X^T A Y)^T = Y^T A^T X = Y^T A X$$

e dunque  $b(v, w) = b(w, v)$  per ogni  $v, w \in V$ .<sup>1</sup>

Analogo discorso vale per le forme antisimmetriche.  $\square$

**Teorema 2.16.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Se  $1 + 1 \neq 0$  allora  $\text{bil}(V)$  è somma diretta delle forme simmetriche e di quelle antisimmetriche.

<sup>1</sup>La prima uguaglianza vale perché  $X^T A Y$  è un numero di  $\mathbb{K}$ , cioè una matrice  $1 \times 1$  e quindi coincide con la sua trasposta.

**DIMOSTRAZIONE.** Che sia le forme simmetriche che quelle antisimmetriche siano dei sottospazi di  $\text{bil}(V)$  è di immediata verifica. Sia  $b$  una forma che sia simmetrica e antisimmetrica simultaneamente, allora per ogni  $v, w \in V$  si ha

$$b(v, w) = b(w, v) = -b(v, w)$$

dunque

$$b(v, w) + b(v, w) = 0 \quad (1 + 1)b(v, w) = 0$$

e siccome  $1 + 1 \neq 0$  allora per forza  $b(v, w) = 0$ , dunque  $b$  è la forma nulla. Quindi lo spazio delle simmetriche e quello delle antisimmetriche sono in somma diretta tra loro. D'altronde ogni  $b$  può essere scritta come somma di una simmetrica e una antisimmetrica come segue:

$$b(v, w) = \frac{b(v, w) + b(w, v)}{2} + \frac{b(v, w) - b(w, v)}{2}$$

ed è chiaro che  $\frac{b(v, w) + b(w, v)}{2}$  è simmetrica mentre  $\frac{b(v, w) - b(w, v)}{2}$  è antisimmetrica.  $\square$

### 3. Forme quadratiche

**Definizione 3.1.** La forma quadratica associata ad una forma bilineare  $b \in \text{bil}(V)$  è la funzione  $V \rightarrow \mathbb{K}$  definita da  $Q_b(v) = b(v, v)$ .

La mappa che associa a una forma bilineare la propria forma quadratica è una funzione lineare  $\mathcal{Q}$  dallo spazio delle forme bilineari su  $V$  allo spazio delle forme quadratiche.

**Teorema 3.2.** Se  $2 \neq 0$ ,  $\ker \mathcal{Q}$  è lo spazio delle antisimmetriche.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $b$  è antisimmetrica allora

$$Q_b(v) = b(v, v) = -b(v, v)$$

e siccome  $2 \neq 0$  allora  $1 \neq -1$  e dunque  $b(v, v) = 0$ . Quindi le antisimmetriche stanno nel nucleo di  $\mathcal{Q}$ . D'altronde una forma simmetrica è determinata dalla sua forma quadratica in quanto

$$2b(v, w) = Q_b(v + w) - Q_b(v) + Q_b(w)$$

quindi l'unica forma simmetrica con forma quadratica nulla è la forma nulla.  $\square$

In generale se  $b \in \text{bil}(V)$  allora  $Q_b$  coincide con la forma quadratica della parte simmetrica. In coordinate, se  $A = (a_{ij})$  è la matrice associata alla forma simmetrica  $b$ , la forma quadratica si scrive come

$$Q_b(x_1, \dots, x_n) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} 2a_{ij} x_i x_j$$

per cui diventa semplice ricavare la matrice dalla forma quadratica: sulla diagonale ci vanno i coefficienti dei quadrati puri, nel posto  $i, j$  ci va metà del coefficiente di  $x_i x_j$  e l'altra metà va nel posto  $j, i$ .



**ESERCIZIO 3.3.** Data la forma quadratica du  $\mathbb{R}^3$   $Q(x, y, z) = x^2 + (y - z)^2 - z^2 + 3xz$  la matrice associata alla forma bilineare simmetrica che ha  $Q$  come forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### 4. Isomorfismo tra $\text{bil}(V)$ e $\text{hom}(V, V^*)$

Gli spazi  $\text{bil}(V)$  e  $\text{hom}(V, V^*)$  hanno entrambi dimensione uguale a  $\dim(V)^2$ , quindi sono isomorfi (almeno in dimensione finita). Vediamo adesso come costruire un isomorfismo esplicito.

Per ogni  $b \in \text{bil}(V)$  e per ogni  $w \in V$  la funzione  $f_w : V \rightarrow \mathbb{K}$  definita da  $f_w(v) = b(v, w)$  è lineare (perché  $b$  è bilineare). Dunque  $b$  induce una funzione  $\beta_b : V \rightarrow V^*$  data da  $\beta_b(w) = f_w$ . La bilinearità di  $b$  ci dice che  $\beta_b$  è lineare. Dunque  $\beta_b \in \text{hom}(V, V^*)$ . Quindi  $\beta$  rappresenta una funzione

$$\beta : \text{bil}(V) \rightarrow \text{hom}(V, V^*) \quad b \mapsto \beta_b$$

ed è immediato verificare che  $\beta$  è lineare. Vediamo che è suriettiva. Data  $g \in \text{hom}(V, V^*)$  si ha che  $b_g(v, w) = g(w)(v)$  è una forma bilineare e per definizione  $\beta(b_g) = g$ . Vediamo l'iniettività. Si ha  $\ker(\beta) = \{b \in \text{bil}(V) : \beta_b = 0\} = \{b \in \text{bil}(V) : \beta_b(w) = 0 \forall w\} = \{b \in \text{bil}(V) : f_w = 0 \forall w\} = \{b \in \text{bil}(V) : f_w(v) = 0 \forall w, v\} = \{b \in \text{bil}(V) : b(v, w) = 0 \forall v, w\} = \{0\}$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 4.1.** Lo stesso discorso vale se si considera  $h_v(w) = b(v, w)$ . Ossia  $h_v = b(v, \cdot)$ .

**Definizione 4.2.** Una forma bilineare  $b \in \text{bil}(V)$  si dice non degenerare se  $\beta_b$  è un isomorfismo.

In altre parole  $b$  è non degenerare se

$$\forall w \in V \quad (b(v, w) = 0 \forall v) \Rightarrow w = 0$$

**Teorema 4.3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia  $b \in \text{bil}(V)$ . Sia  $A$  la matrice associata a  $b$  in una base qualsiasi. Allora  $b$  è non degenerare se e solo se  $\det(A) \neq 0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** In coordinate, l'insieme dei vettori  $w$  tali che  $b(v, w) = 0$  per ogni  $v$  è dato dai vettori  $Y$  tali che

$$X^t AY = 0 \forall X.$$

Ma ciò implica che  $AY = 0$  (basta sostituire a  $X$  i vettori di una base). Quindi l'insieme dei  $w$  tali che  $b(v, w) = 0$  per ogni  $v$  in coordinate non è altro che  $\ker A$ , che è nullo solo se  $\det(A) \neq 0$ .  $\square$

## 5. Diagonalizzazione di forme bilineari simmetriche

Dal corso di geometria uno sapete come fare per i prodotti scalari, usando per esempio il procedimento di Gram-Schmidt. Vediamo adesso come aggiustare le cose nel caso generale.

**Definizione 5.1.** Una forma quadratica  $Q$  si dice *semidefinita positiva* (risp. *negativa*) se per ogni  $v$  si ha  $q(v) \geq 0$  (risp.  $Q(v) \leq 0$ ). Si dice *definita positiva* (risp. *negativa*) se per ogni  $v \neq 0$  si ha  $q(v) > 0$  (risp.  $Q(v) < 0$ ). Una forma bilineare simmetrica si dice (semi)definita positiva (o negativa) se la sua forma quadratica lo è.

La forma quadratica associata a  $b$  farà le veci della norma (quadra) euclidea, con la complicazione che in generale ci possono essere dei vettori con “norma quadra” negativa o nulla. Cioè tali che  $Q_b(v) \leq 0$ .

Fissiamo una volta per tutte uno spazio vettoriale reale  $V$  e una forma bilineare simmetrica  $b \in \text{bil}(V)$ . In analogia con i prodotti scalari diciamo che due vettori  $v, w \in V$  sono ortogonali rispetto a  $b$  se  $b(v, w) = 0$ . Definiamo  $v^\perp = \{w \in V : b(v, w) = 0\}$  e  $I^\perp = \bigcap_{v \in I} I^\perp$ .

**Definizione 5.2.** Un vettore si dice *isotropo* se è ortogonale a sé stesso. Cioè se  $b(v, v) = 0$ . Cioè se  $Q_b(v) = 0$ .

ESEMPIO 5.3. Consideriamo il prodotto di Minkowski sullo spazio tempo  $(x, y, z, t)$  associato alla forma quadratica  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ . I vettori isotropi sono quelli del cosiddetto cono luce.

**Definizione 5.4.** Il radicale di  $b$  è l'insieme dei vettori  $w \in V$  tali che  $b(v, w) = 0$  per ogni  $v$ . La dimensione del radicale di  $V$  si denota con  $n_0$ .

In altre parole il radicale è  $V^\perp$ . Per definizione,  $b$  è non degenera se e solo se  $n_0 = 0$ .

**Definizione 5.5.** Definiamo  $n_+$  (risp.  $n_-$ ) il massimo delle dimensioni dei sottospazi  $W < V$  tali che la restrizione di  $b$  a  $W$  sia definita positiva (risp. negativa).

**Definizione 5.6.** La tripla  $(n_0, n_+, n_-)$  si dice *segnatura* di  $b$ . Nel caso di forme non degeneri si suole indicare la segnatura con la sola coppia  $(n_+, n_-)$ .

ESEMPIO 5.7. La segnatura del prodotto di Minkowski è  $(3, 1)$ .

**Teorema 5.8.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale e  $b$  una forma bilineare simmetrica. Allora esiste sempre una base ortogonale e normalizzata di  $V$ , ossia fatta di vettori  $v_1, \dots, v_n$  a due a due ortogonali e tali che  $b(v_i, v_i) \in \{0, 1, -1\}$ .

In oltre, il numero dei  $v_i$  isotropi è esattamente  $n_0$ , il numero dei  $v_i$  tali che  $b(v_i, v_i) = 1$  è  $n_+$  e quelli dei  $v_i$  con  $b(v_i, v_i) = -1$  è  $n_-$ .

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la prima parte per induzione su  $n = \dim(V)$ . Prima di tutto mostriamo che possiamo ridurci al caso in cui  $v_i$  è ortogonale a tutti gli altri. Se uno dei  $v_i$  sta nel radicale basta spostarlo al primo posto ed esso sarà ortogonale a tutti gli altri. Se nessuno dei  $v_i$  sta nel radicale ci riconduciamo al caso in cui  $v_1$  non sia isotropo. Se uno dei  $v_i$  non è isotropo basta metterlo al primo posto. Se sono tutti isotropi, siccome

$v_1$  non sta nel radicale, allora esisterà un vettore  $v_i$  tale che  $b(v_1, v_i) \neq 0$ . Sostituendo  $v_1$  con  $v_1 + v_i$  si ottiene un vettore non isotropo in quanto  $b_1(v_1 + v_i, v_1 + v_i) = 2b(v_1, v_i) \neq 0$ .

Possiamo quindi supporre che  $v_1$  non sia isotropo. Adesso cambiamo base ponendo

$$w_1 = \frac{v_1}{\sqrt{|b(v_1, v_1)|}} \quad w_i = v_i - \frac{b(v_1, v_i)}{b(v_1, v_1)}v_1$$

come se stessimo facendo Gram Schmidt. Lo possiamo fare perché  $v_1$  non è isotropo e quindi  $b(v_1, v_1) \neq 0$ . Si ha

$$b(w_1, w_1) = \frac{b(v_1, v_1)}{|b(v_1, v_1)|} = \pm 1 \quad b(v_1, w_i) = b(v_1, v_i - \frac{b(v_1, v_i)}{b(v_1, v_1)}v_1) = b(v_1, v_i) - \frac{b(v_1, v_i)}{b(v_1, v_1)}b(v_1, v_1) = 0$$

In questo modo ci siamo ricondotti al caso in cui lo spazio  $W$  generato da  $w_2, \dots, w_n$ , che ha dimensione  $n - 1$ , sia ortogonale a  $w_1$ .

Per ipotesi induttiva  $W$  ha una base ortogonale e normalizzata  $u_2, \dots, u_n$ . Quindi la base  $u_1 = w_1, u_2, \dots, u_n$  di  $V$  è ortogonale e normalizzata.

Veniamo adesso alla seconda affermazione. Consideriamo una qualsiasi base ortogonale e normalizzata  $u_1, \dots, u_n$  di  $V$ . A meno di riordinarla possiamo supporre che i primi  $k$  vettori siano isotropi, gli  $u_i$  con  $i = k + 1, \dots, k + s$  siano tali che  $b(u_i, u_i) = 1$  e gli ultimi  $n - k - s$  siano tali che  $b(u_i, u_i) = -1$ . In altre parole chiediamo la matrice di  $b$  è della forma

$$\begin{pmatrix} 0_k & & \\ & I_s & \\ & & -I_{n-k-s} \end{pmatrix}$$

Chiaramente la restrizione di  $b$  allo spazio generato da  $u_{k+1}, \dots, u_{k+s}$  è definita positiva. Quindi  $n_+ \geq s$ . D'altronde la restrizione di  $b$  allo spazio  $N$  generato da  $u_1, \dots, u_k$  e  $u_{k+s+1}, \dots, u_n$  è semidefinita negativa. Per la formula di Grassmann, se  $W$  è un sottospazio di dimensione strettamente maggiore di  $s$ , si avrà  $W \cap N \neq \{0\}$  e dunque  $W$  contiene un vettore non nullo  $v$  che sta anche in  $N$ . Quindi  $Q_b(v) \leq 0$  e la restrizione di  $b$  a  $W$  non è definita positiva. Ne segue che  $s = n_+$ . Stesso discorso per  $n_-$  e simile per  $n_0$ .  $\square$

Per il teorema spettrale su  $\mathbb{R}^n$ , ogni matrice simmetrica può essere diagonalizzata con una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ . In pratica, siccome gli autospazi relativi ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro, per trovarla si fa Gram schmidt separatamente su ogni autospazio. Ne segue che se  $A$  è una matrice che rappresenta la forma simmetrica  $b$  in una base qualsiasi si ha

$$n_0 = \dim(\ker)A \quad n_+ = \sum_{\lambda > 0} m_g(\lambda) \quad n_- = \sum_{\lambda < 0} m_g(\lambda)$$

**ESERCIZIO 5.9.** *Dimostrare che date due matrici quadrate  $A, B$  si ha  $tr(AB) = tr(BA)$ . Calcolare la segnatura della forma bilineare simmetrica associata alla forma quadratica  $Q(M) = tr(M^2)$  nel caso di matrici  $2 \times 2$  a coefficienti reali.*

*Soluzione.* La traccia è lineare dallo spazio delle matrici in  $\mathbb{K}$ . Quindi la funzione  $b(A, B) = tr(AB)$  è una forma bilineare sullo spazio delle matrici quadrate. Detta  $E_{ij}$  la base canonica dello spazio delle matrici quadrate, un rapido calcolo mostra che  $tr(E_{ij}E_{ks}) =$

$tr(E_{ks}E_{ij})$ . In altre parole, la matrice associata a  $b$  è simmetrica, quindi anche  $b$  lo è. Nel caso specifico delle matrici  $2 \times 2$ , la matrice in base canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

applicando il procedimento ricorsivo di ortogonalizzazione abbiamo che la base  $v_1 = E_{11}$ ,  $v_2 = E_{12} + E_{21}$ ,  $v_3 = E_{12} - E_{21}$ ,  $v_4 = E_{22}$  è ortogonale in oltre

$$Q(v_1) = 1 \quad Q(v_2) = 2 \quad Q(v_3) = -2 \quad Q(v_4) = 1$$

dunque la segnatura di  $b$  è  $(3, 1)$ , come il prodotto di Minkowski.

Per calcolare la segnatura, in certi casi è utile il criterio di Sylvester, che andiamo ad enunciare. Data una matrice  $A$  l'iesimo minore principale è il determinante della sottomatrice  $A_i$  di  $A$  formata dalle prime  $i$  righe e  $i$  colonne (quello nell'angolo in alto a sinistra per intenderci).

**Teorema 5.10** (Criterio di Sylvester). *Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale e  $b \in \text{bil}(V)$  simmetrica. Sia  $A$  la matrice associata a  $b$  in una base qualsiasi. Se tutti i minori principali  $|A_1|, \dots, |A_n|$  di  $A$  sono non nulli, allora  $n_-$  è il numero di cambi di segno nella  $(n+1)$ -upla numerica  $(1, |A_1|, \dots, |A_n|)$  e  $n_+$  è il numero delle concordanze di segno. In particolare  $b$  è un prodotto scalare se e solo se tutti i minori principali sono non nulli e positivi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Procediamo per induzione su  $n = \dim(V)$ . Per  $n = 1$  il teorema è ovvio. Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$  e  $A$  la matrice di  $b$  in tale base. Siccome i minori principali sono non nulli, in particolare  $|A_1| = a_{11} \neq 0$  e dunque  $v_1$  non è isotropo. Possiamo quindi proiettare tutti gli altri vettori su  $v_1^\perp$  tramite il cambio di base

$$v_1 \mapsto v_1 \quad v_i \mapsto v_i - \frac{b(v_i, v_1)}{b(v_1, v_1)} v_1 \text{ per } i > 1$$

La matrice  $M$  corrispondente a questo cambio di base è triangolare superiore. Ne segue che, detta  $M_i$  la sottomatrice di  $M$  formata dalle prime  $i$  righe e colonne, si ha

$$(M^t A M)_i = M_i^t A_i M_i$$

e dunque

$$|M^t A M_i| = |M_i^t| |A_i| |M_i| = |M_i|^2 |A_i|$$

Quindi il nostro cambio di base non ha cambiato i segni dei minori principali.

La matrice di  $b$  nella nuova base è del tipo

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

con  $A'$  matrice quadrata di ordine  $n - 1$ . Per induzione la segnatura di  $A'$  si calcola contando i cambi di segno dei suoi minori principali. Chiaramente, i minori principali di  $B$  sono  $a_{11}, a_{11}|A'_1|, a_{11}|A'_2|, \dots, a_{11}|A'_{n-1}|$  e dunque le concordanze di segno in  $(a_{11}, a_{11}|A'_1|, a_{11}|A'_2|, \dots, a_{11}|A'_{n-1}|)$  sono le stesse di quelle in  $(1, |A'_1|, |A'_2|, \dots, |A'_{n-1}|)$ . In

oltre, se  $(n_+(A'), n_-(A'))$  è la segnatura di  $A'$ , quella di  $B$  è uguale a  $(n_+(A') + 1, n_-(A'))$  se  $a_{11} > 0$  e  $(n_+(A'), n_- + 1(A'))$  se  $a_{11} < 0$  e quindi  $n_-(B)$  coincide col numero di cambi di segno in  $(1, a_{11}, a_{11}|A'_1|, a_{11}|A'_2|, \dots, a_{11}|A'_{n-1}|) = (1, |B_1|, \dots, |B_n|)$ .  $\square$

## 6. Diagonalizzazione delle forme quadratiche

Il processo di diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche si può fare direttamente sulle forme quadratiche corrispondenti usando il metodo dei completamenti dei quadrati.

Tale metodo si basa sul fatto che

$$\begin{aligned}x^2 + 2xy &= (x + y)^2 - y^2 \\xy &= \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4}\end{aligned}$$

In entrambi i casi si è eliminato il termine di doppio prodotto con delle somme dei quadrati puri. Vediamo come si implementa in generale questo metodo. Vedrete che assomiglia molto al procedimento di diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica.

**ESERCIZIO 6.1.** *Diagonalizzare le forme simmetriche corrispondenti alle forme quadratiche di cui sopra, cioè  $x^2 + 2xy$  e  $xy$ .*

**Teorema 6.2.** *Sia  $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_i a_i x_i^2 + \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$  una forma quadratica su  $\mathbb{R}^n$ . Allora esiste una base di  $\mathbb{R}^n$  tale che la forma  $Q$  nelle nuove coordinate non ha prodotti misti, ossia  $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_i \alpha_i x_i^2$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Procediamo per induzione su  $n$ . Se uno degli  $x_i$  è tale che tutti i coefficienti che coinvolgono  $x_i$  siano nulli (cioè se  $a_i = 0$  e  $a_{ij} = 0$  per ogni  $j > i$  e  $a_{ji} = 0$  per ogni  $j < i$ ) allora  $Q$  è in realtà una forma quadratica in  $n - 1$  variabili e per ipotesi induttiva possiamo metterla in forma diagonale.

Possiamo quindi supporre che “le variabili compaiano tutte”. Adesso facciamo vedere che attraverso cambi di coordinate lineari, ci possiamo sempre ricondurre al caso in cui ci sia almeno uno degli  $a_i$  diverso da zero. Nel caso in cui gli  $a_i$  fossero tutti nulli, ci sarà comunque un coefficiente  $a_{ks} \neq 0$ . In questo caso facciamo il cambio di coordinate:

$$X_i = x_i \quad i \neq k, s \quad X_k = \frac{x_k + x_s}{2} \quad X_s = \frac{x_k - x_s}{2}$$

(Si rida un’occhiata alla Sezione 1.1.) Siccome  $x_k x_s = X_k^2 - X_s^2$ , la forma  $Q$  nelle nuove coordinate ha il coefficiente di  $X_k^2$  non nullo.

A meno di riordinare le coordinate possiamo quindi supporre che  $a_1 \neq 0$ . Scriviamo  $Q$  come segue

$$Q(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \sum_{j > 1} a_{1j} x_1 x_j + \sum_{i \geq 2} a_i x_i^2 + \sum_{1 < i < j} a_{ij} x_i x_j$$

e concentriamoci sul pezzo

$$a_1 x_1^2 + \sum_{j > 1} a_{1j} x_1 x_j$$

Possiamo completarlo a quadrato come segue

$$a_1x_1^2 + \sum_{j>i} a_{1j}x_1x_j = a_1(x_1^2 + \sum_{j>i} \frac{2a_{1j}}{2a_1}x_1x_j) = a_1(x_1 + \sum_{j>1} \frac{a_{1j}}{2a_1}x_j)^2 - \sum_{j>1} \frac{a_{1j}^2}{4a_1}x_j^2$$

per cui la nostra forma  $Q$  diventa

$$Q(x_1, \dots, x_n) = a_1(x_1 + \sum_{j>1} \frac{a_{1j}}{2a_1}x_j)^2 + \sum_{i \geq 2} (a_i - \frac{a_{1i}^2}{4a_1})x_i^2 + \sum_{1 < i < j} a_{ij}x_ix_j$$

Cambiando coordinate ponendo

$$X_1 = x_1 + \sum_{j>1} \frac{a_{1j}}{2a_1}x_j \quad X_i = x_i \text{ per } i > 1$$

e ponendo

$$\alpha_1 = a_1 \quad \alpha_i = a_i - \frac{a_{1i}^2}{4a_1} \text{ per } i > 1$$

la  $Q$  diventa

$$\alpha_1X_1^2 + \sum_{i \geq 2} \alpha_iX_i^2 + \sum_{1 < i < j} a_{ij}X_iX_j$$

Si noti che i doppi prodotti non coinvolgono  $X_1$ . La forma quadratica

$$\sum_{i \geq 2} \alpha_iX_i^2 + \sum_{1 < i < j} a_{ij}X_iX_j$$

coinvolge solo  $n - 1$  variabili e quindi per induzione è diagonalizzabile.  $\square$

Si noti che se una forma quadratica è in forma diagonale  $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum a_ix_i^2$  il numero degli  $a_i$  nulli ci da  $n_0$  per la forma bilineare simmetrica associata, in numero degli  $a_i$  positivi ci da  $n_+$  ed il numero di quelli negativi ci da  $n_-$ .

## 7. Quadriche e coniche

Una **quadrica** in  $\mathbb{K}^n$  è il luogo di zeri di un'equazione di secondo grado in  $x_1, \dots, x_n$ . Di solito la parola **conica** indica una quadrica in  $\mathbb{R}^2$ .

ESEMPIO 7.1. L'equazione  $x^2 + xy - yz + z - 3 = 0$  definisce una quadrica in  $\mathbb{R}^3$ .

ESEMPIO 7.2. L'equazione  $x - y + z - 3 = 0$  non definisce una quadrica in  $\mathbb{R}^3$ .

ESEMPIO 7.3. L'equazione  $x^3 + xy - yz^2 = 0$  non definisce una quadrica in  $\mathbb{R}^3$ .

Si noti che, anche se il luogo di zeri delle equazioni  $x^2 = 0$  e  $x = 0$  è lo stesso, per convenzione la prima definisce una quadrica (degenere) mentre la seconda no. In oltre se si cambia segno ad un'equazione, la conica che essa descrive non cambia.

La forma generale dell'equazione di una quadrica è dunque

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij}x_ix_j + \sum_i \beta_i x_i + c = 0$$

se  $\mathbb{K}$  non ha caratteristica due, ponendo  $b_i = \beta_i/2$  e  $a_{ij} = (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})/2$  (il perché sarà chiaro tra poco) l'equazione diventa

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_i b_i x_i + c = 0$$

che si può scrivere in termini matriciali definendo la matrice  $A = (a_{ij})$  (che è simmetrica per come sono stati definiti i coefficienti  $a_{ij}$ ) ed il vettore  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ . Ponendo  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

L'equazione diventa

$$X^T A X + 2b^T X + c = 0 \quad \text{oppure} \quad X^T (A X + 2b) + c = 0$$

oppure

$$X^T A X + b^T X + X^T b + c = 0$$

Affinché si abbia una quadrica, la matrice  $A$  non deve essere nulla. Inoltre introducendo la matrice simmetrica  $M \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)}$  definita come

$$M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \dots & b_n & c \end{pmatrix}$$

l'equazione diventa

$$(x_1 \quad \dots \quad x_n \quad 1) M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

In sostanza si stanno cercando i vettori isotropi della forma bilineare simmetrica associata a  $M$  che giacciono sul piano  $x_{n+1} = 1$ .

**Definizione 7.4.** *Una quadrica si dice degenera se  $\det(M) = 0$ . Non degenera altrimenti.*

**Definizione 7.5.** *Due quadriche di  $\mathbb{K}^n$  si dicono affinementemente equivalenti se esiste un cambio di coordinate affini che trasforma l'una nell'altra.*

**Definizione 7.6.** *Due quadriche di  $\mathbb{R}^n$ , dotato del prod. scal. standard si dicono isometriche se esiste un cambio di coordinate isometriche che trasforma l'una nell'altra.*

Esistono delle forme canoniche affini (risp. euclidee) che classificano i vari tipi di coniche.

Sia le affinità che le isometrie sono affinità e quindi hanno in genere un termine di traslazione. Si può però usare un truccetto.

Notiamo che una traslazione  $X \mapsto X + b$  della variabile  $X = (x_1, \dots, x_n)$  si può scrivere in termini della variabile  $(x_1, \dots, x_n, 1)$  tramite la matrice  $\begin{pmatrix} Id & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  come segue:

$$\begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ \vdots \\ x_n + b_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che i cambi di coordinate affini di  $\mathbb{K}^n$  del tipo  $X \mapsto LX + b$  si possono interpretare come cambi di coordinate lineari di  $\mathbb{K}^{n+1}$  che preservano il piano  $x_{n+1} = 1$ , rappresentate da matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} L & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In oltre, se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , tale trasformazione è un'isometria di  $\mathbb{R}^n$  rispetto al prodotto scalare standard se e solo se  $L$  è ortogonale. Ci limiteremo a discutere i casi di  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

Il procedimento generale per trovare la forma canonica di una quadrica, sia affine che euclidea, consiste nei seguenti passi:

- (1) Riduzione  $A$  in forma diagonale, attraverso una base ortonormale se cerchiamo la forma canonica euclidea o usando il Teorema 5.8 se cerchiamo la forma canonica affine. (Cioè con solo  $0, 1, -1$  sulla diagonale.)
- (2) Se possibile, eliminazione dei termini di primo grado tramite una traslazione. Ciò sarà possibile solo se l'equazione  $AX = b$  ha soluzione. In particolare sarà sempre possibile se  $\det A \neq 0$ .
- (3) Normalizzazione del termine noto (solo nel caso di forma canonica affine).

Le forme canoniche delle quadriche sono le seguenti

$$\sum_i \epsilon_i x_i^2 = 1 \quad x_1 = \sum_{i>1} \epsilon_i x_i^2 \quad \sum_i \epsilon_i x_i^2 = 0$$

Le quadriche non degeneri sono quelle dei primi due casi con tutti gli  $\epsilon_i \neq 0$ . Le altre sono degeneri.

In oltre gli  $\epsilon_i$  sono numeri reali qualsiasi se si tratta di forme canoniche euclidee, mentre nelle forme canoniche affini reali abbiamo  $\epsilon_i \in \{0, 1, -1\}$ . Se in  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , allora  $\epsilon_i \in \{0, 1\}^2$ . In particolare le forme canoniche affini sono in numero finito.

**ESEMPIO 7.7.** *Le forme canoniche affini delle coniche di  $\mathbb{R}^2$  sono:*

$$\pm x^2 \pm y^2 = 1 \quad \pm x^2 = 1 \quad y = x^2 \quad x^2 \pm y^2 = 0 \quad x^2 = 0$$

**ESEMPIO 7.8.** *Le forme canoniche affini delle quadriche in  $\mathbb{R}^3$  sono le seguenti:*

- (1) *Ellissoide:*  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- (2) *Iperboloide a due falde (detto anche iperboloide ellittico):*  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$
- (3) *Iperboloide a una falda (detto anche iperboloide iperbolico):*  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

---

<sup>2</sup>Se  $\epsilon_i = -1$  attraverso il cambio di variabile  $X_i = ix_i$  si ottiene  $-x_i^2 = (ix_i)^2 = X_i^2$ .



- (4) *Cono*:  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
- (5) *Paraboloido sferico*:  $z = x^2 + y^2$
- (6) *Paraboloido iperbolico (o sella)*:  $z = x^2 - y^2$
- (7) *Cilindro sferico*:  $x^2 + y^2 = 1$
- (8) *Cilindro parabolico*:  $y = x^2$
- (9) *Cilindro iperbolico*:  $x^2 - y^2 = 1$
- (10) *Punto*:  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  (che non è un punto su  $\mathbb{C}$ , detto anche cono immaginario)
- (11) *Insieme vuoto*:  $x^2 + y^2 + z^2 = -1$  (che non è vuoto su  $\mathbb{C}$ , detto anche ellissoide immaginario)
- (12) *Retta*:  $x^2 + y^2 = 0$  (che non è una retta su  $\mathbb{C}$ , detta anche coppia di piani incidenti immaginari)
- (13) *Cilindro conico o coppia di piani incidenti*:  $x^2 - y^2 = 0$
- (14) *Insieme vuoto*  $x^2 + y^2 = -1$  (che non è vuoto su  $\mathbb{C}$ , cilindro sferico immaginario)
- (15) *Coppia di piani paralleli*:  $x^2 = 1$
- (16) *Piano*:  $x^2 = 0$  (detto anche piano doppio)
- (17) *Insieme vuoto*:  $x^2 = -1$  (non vuoto su  $\mathbb{C}$ , coppia di piani paralleli immaginari)

Spesso, quando ci si riferisce a quadriche di  $\mathbb{R}^3$  si considerano solo le prime nove, che sono effettivamente superfici, o addirittura le prime sei. Le quadriche 7), 8), 9), 12), 13), 14), 15), 16), 17) sono “cilindri” che hanno per base una conica su  $\mathbb{R}^2$ , questo perché le loro equazioni non contengono la variabile  $z$ .

**7.1. Le coniche (quadriche di  $\mathbb{R}^2$ ).** Le quadriche di  $\mathbb{R}^2$ , ridotte in forma canonica affine, sono le seguenti:

- (1) *Ellisse (o circonferenza)*:  $x^2 + y^2 = 1$  (oppure  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ )
- (2) *Parabola*:  $y = x^2$  (oppure  $x^2 - y = 0$ )
- (3) *Iperbole*:  $x^2 - y^2 = 1$  (oppure  $x^2 - y^2 - 1 = 0$ )
- (4) *Coppia di rette incidenti*:  $x^2 - y^2 = 0$
- (5) *Coppia di rette parallele*:  $x^2 = 1$  (oppure  $x^2 - 1 = 0$ )
- (6) *Retta*:  $x^2 = 0$  (detta anche retta doppia o coppia di rette coincidenti)
- (7) *Punto*:  $x^2 + y^2 = 0$  (detta anche coppia di rette immaginarie incidenti)
- (8) *Insieme vuoto*:  $x^2 + y^2 = -1$  (non vuoto su  $\mathbb{C}$ , detta anche ellisse immaginaria)
- (9) *Insieme vuoto*:  $x^2 = -1$  (non vuoto su  $\mathbb{C}$  e diverso dal precedente, detta anche coppia di rette immaginarie parallele)

Per riconoscere una conica avendo la scrittura in termini matriciali, può essere utile la Tabella 1<sup>3</sup>, che fornisce il tipo di conica in relazione a determinante e segnatura di  $A$  e  $M$ .

---

<sup>3</sup>Siccome un'equazione e la sua opposta definiscono la stessa conica (per esempio  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  e  $-x^2 - y^2 + 1 = 0$ ) c'è una piccola ambiguità per le segnature delle matrici. Nella tabella riportiamo entrambe le equazioni per ogni conica, corrispondenti alle segnature di  $\pm A$  e  $\pm M$ .

Segnatura di $A$	$\det A$	Segnatura di $M$	$\det(M)$	Equazione	Descrizione
$(0, 2, 0)$ $(0, 0, 2)$	$> 0$	$(0, 3, 0)$ $(0, 0, 3)$	$\neq 0$	$x^2 + y^2 + 1 = 0$ $-x^2 - y^2 - 1 = 0$	Insieme vuoto
		$(0, 2, 1)$ $(0, 1, 2)$	$\neq 0$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$ $-x^2 - y^2 + 1 = 0$	Ellisse
		$(1, 2, 0)$ $(1, 0, 2)$	$0$	$x^2 + y^2 = 0$ $-x^2 - y^2 = 0$	Punto
$(0, 1, 1)$	$< 0$	$(0, 1, 2)$ $(0, 2, 1)$	$\neq 0$	$x^2 - y^2 - 1 = 0$ $-x^2 + y^2 + 1 = 0$	Iperbole
		$(1, 1, 1)$	$0$	$x^2 - y^2 = 0$ $(-x^2 + y^2 = 0)$	Coppia di rette incidenti
$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$0$	$(0, 2, 1)$ $(0, 1, 2)$	$\neq 0$	$y = x^2$ $(-y = -x^2)$	Parabola ( $b \notin \text{Imm}(A)$ )
		$(1, 2, 0)$ $(1, 0, 2)$	$0$	$x^2 + 1 = 0$ $-x^2 - 1 = 0$	Insieme vuoto
		$(1, 1, 1)$	$0$	$x^2 - 1 = 0$ $(-x^2 + 1 = 0)$	Coppia di rette parallele
		$(2, 1, 0)$ $(2, 0, 1)$	$0$	$x^2 = 0$ $-x^2 = 0$	Retta ( $\text{rango}(M) = 1$ )

TABELLA 1. Tipi di coniche

**7.2. Riconoscimento del tipo di una conica a mano.** Una conica si può ridurre in forma canonica affine “manualmente”, usando il metodo del **completamento dei quadrati**: Sia

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

l'equazione di una conica.

- Riduzione al caso  $b = 0$ . Se  $b \neq 0$  allora abbiamo due casi:

(1) Se  $a \neq 0$  (oppure se  $c \neq 0$ ) a meno di cambiare segno all'equazione possiamo supporre  $a > 0$ . In questo caso il termine in  $xy$  si fa sparire usando la relazione

$$ax^2 + 2bxy = \left(\sqrt{a}x + y\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{a}y^2 \quad (\text{completamento del quadrato})$$

e cambiando variabili come segue

$$X = \sqrt{a}x + y\frac{b}{\sqrt{a}} \quad Y = y \quad (\text{oppure } Y = \sqrt{c}y + x\frac{b}{\sqrt{c}} \quad X = x)$$

(2) Se  $a = c = 0$  allora si usa il cambio di variabili

$$X = (x + y) \quad Y = (x - y)$$

ed avremo  $2bxy = b(X^2 - Y^2)/2$ .

- Riduzione al caso  $d = 0$ . Adesso che abbiamo  $b = 0$  l'equazione è della forma

$$ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

I coefficienti  $a$  e  $c$  non possono essere entrambi nulli altrimenti l'equazione sarebbe lineare e non quadratica. A meno di scambiare la  $x$  con la  $y$  possiamo supporre  $a \neq 0$ . A meno di cambiare segno a tutta l'equazione possiamo supporre  $a > 0$ . Procediamo completando  $ax^2 + 2dx$  a quadrato tramite

$$ax^2 + 2dx = \left(\sqrt{a}x + \frac{d}{\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{d^2}{a}$$

e cambiamo variabili come segue

$$X = \sqrt{a}x + \frac{d}{\sqrt{a}} \quad Y = y$$

- Adesso l'equazione è della forma

$$ax^2 + cy^2 + 2ey + f = 0.$$

e possiamo distinguere i vari casi:

- (1) Se  $c = 0$  e  $e \neq 0$  allora la conica è una **parabola** e si può mettere in forma canonica prima dividendo per  $a$  e riducendosi a  $x^2 + 2ey + f = 0$  e poi tramite il cambio di variabile  $Y = -(2ey + f)$ .
- (2) Se  $c = 0$  ed  $e = 0$  allora l'equazione è del tipo  $ax^2 + f = 0$ .
  - (a) Se  $f = 0$  la conica è una **retta** e si porta in forma canonica dividendo l'equazione per  $a$ .
  - (b) Se  $f$  e  $a$  sono dello stesso segno allora la conica è **l'insieme vuoto**. (L'equazione si porta in forma canonica prima dividendo per  $f$  e poi col cambio  $X = \sqrt{a}x$ .)
  - (c) Se  $f$  e  $a$  hanno segni diversi allora la conica è una **coppia di rette parallele**. (L'equazione si porta in forma canonica prima dividendo per  $-f$  e poi col cambio  $X = \sqrt{a}x$ .)
- (3) Se  $c \neq 0$  allora a meno di cambiare segno a tutta l'equazione possiamo supporre  $c > 0$ , procedere completando  $cy^2 + 2ey$  a quadrato tramite

$$cy^2 + 2ey = \left(\sqrt{c}y + \frac{e}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{e^2}{c}$$

e cambiare variabili come segue

$$Y = \sqrt{c}y + \frac{e}{\sqrt{c}} \quad X = x.$$

L'equazione diventa del tipo  $ax^2 + cy^2 + f = 0$ . Se  $f \neq 0$  dividendo l'equazione per  $|f|$  ci riduciamo al caso  $ax^2 + cy^2 + f = 0$  con  $f \in \{0, 1, -1\}$  e cambiando variabili

$$X = \sqrt{|a|x} \quad Y = \sqrt{|c|y}$$

otteniamo un'equazione del tipo

$$\pm x^2 \pm y^2 + f = 0.$$

A meno di cambiare segno possiamo supporre che il segno di  $x$  sia positivo ed avremo:

- (a)  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  che è l'**insieme vuoto**;
- (b)  $x^2 + y^2 = 1$  che è una **circonferenza**;
- (c)  $x^2 - y^2 + 1 = 0$  e  $x^2 - y^2 - 1 = 0$  che sono **iperboli**;
- (d)  $x^2 + y^2 = 0$  che è un **punto**;
- (e)  $x^2 - y^2 = 0$  che è una **coppia di rette incidenti**.

**ESERCIZIO 7.9.** *Si dica che tipo affine di conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1 = 0.$$

**SOLUZIONE.** L'equazione si può riscrivere come  $(x + y)^2 + (x + y) + 1 = 0$ . Quindi tramite il cambio  $X = x + y, Y = y$  l'equazione diventa

$$X^2 + X + 1 = 0$$

che riscriviamo come

$$x^2 + x + 1 = 0$$

(tanto il nome che diamo alle variabili non conta). Completiamo adesso  $x^2 + x$  a quadrato:  $x^2 + x = (x + 1/2)^2 - 1/4$  quindi

$$x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$$

ponendo

$$X = x + 1/2$$

otteniamo l'equazione

$$X^2 + 3/4 = 0$$

che definisce l'insieme vuoto (rette parallele immaginarie). □

**ESERCIZIO 7.10.** *Si dica che tipo affine di conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$$

**SOLUZIONE.** Completiamo  $2xy + y^2$  a quadrato ponendo  $2xy + y^2 = (x + y)^2 - x^2$ . Ora cambiamo variabili

$$X = x \quad Y = x + y$$

L'equazione diventa

$$Y^2 - X^2 + 2Y + 1 = 0$$

che riscriviamo come  $y^2 - x^2 + 2y + 1 = 0$ , oppure  $(y + 1)^2 - x^2 = 0$ . Poniamo  $Y = y + 1, X = x$  ed otteniamo

$$X^2 - Y^2 = 0$$

che definisce una coppia di rette incidenti. □

ESERCIZIO 7.11. *Si dica che tipo affine di conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$2xy + 2x - 4y + 1 = 0.$$

SOLUZIONE. Scriviamo  $2xy = ((x + y)^2 - (x - y)^2)/2$  e cambiamo variabili

$$X = x + y \quad Y = x - y$$

il cambio di variabili inverso è

$$x = (X + Y)/2 \quad y = (X - Y)/2$$

L'equazione diventa

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} + X + Y - 2X + 2Y + 1 = 0 \quad \frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} - X + 3Y + 1 = 0$$

moltiplicando il tutto per 2 si ottiene

$$X^2 - Y^2 - 2X + 6Y + 2 = 0$$

che riscriviamo come

$$x^2 - y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$$

completiamo  $x^2 - 2x$  e  $y^2 - 6y$  a quadrati

$$(x - 1)^2 - 1 - (y - 3)^2 + 9 + 2 = 0 \quad (x - 1)^2 - (y - 3)^2 + 10 = 0$$

Ponendo  $X = x - 1$  e  $Y = y - 3$  si ottiene

$$X^2 - Y^2 + 10 = 0$$

che definisce un'iperbole. Se la vogliamo in forma canonica dividiamo il tutto per 10 ottenendo

$$\frac{X^2}{10} - \frac{Y^2}{10} + 1 = 0$$

e cambiando variabili  $x = X/\sqrt{10}$ ,  $y = Y/\sqrt{10}$  otteniamo

$$x^2 - y^2 + 1 = 0$$

□

ESERCIZIO 7.12. *Si dica che tipo affine di conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$x^2 + 2xy - 2x + 6y + 1 = 0.$$

SOLUZIONE. Le matrici associate alla conica sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo  $\det(A) < 0$  e  $\det(M) \neq 0$  quindi dalla Tabella 1 si deduce che l'equazione definisce un'iperbole. □

ESERCIZIO 7.13. *Si dica che tipo affine di conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$$

SOLUZIONE. Le matrici associate alla conica sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siccome  $M$  ha rango 1, dalla Tabella 1 si deduce che l'equazione descrive una retta.  $\square$

ESERCIZIO 7.14. *Si dica che tipo affine di conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0.$$

SOLUZIONE. Le matrici associate alla conica sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Siccome  $\det(A) = 0$  e  $\det(M) \neq 0$  l'equazione descrive una parabola (vedasi Tabella 1).  $\square$

ESERCIZIO 7.15. *Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$3x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0.$$

ESERCIZIO 7.16. *Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 5y + 6 = 0.$$

ESERCIZIO 7.17. *Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 1 = 0.$$

ESERCIZIO 7.18. *Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$4xy + 5x + 6y = 0.$$

ESERCIZIO 7.19. *Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$(x + y)^2 + 2(x - y)^2 - (x + 2y)^2 - (2x + 1)^2 = 0.$$

ESERCIZIO 7.20. *Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 12y + 18 = 0.$$

ESERCIZIO 7.21. *Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$(x + y - 2)^2 + (2x - y + 1)^2 - 4 = 0.$$

ESERCIZIO 7.22. *Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione*

$$(x + y - 2)^2 + (2x - y + 1) - 4 = 0.$$

ESERCIZIO 7.23. Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione

$$x^2 - 6 + 9y + 2x = 0.$$

ESERCIZIO 7.24. Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione

$$2x^2 + 8y^4 + 8xy + x + 2y + 4 = 0.$$

ESERCIZIO 7.25. Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione

$$3x^2 + 5y^2 + 8x - 8xy - 14y - 3 = 0$$

ESERCIZIO 7.26. Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione

$$9x^2 + 4y^2 - 12xy + 6x - 4y - 2 = 0$$

ESERCIZIO 7.27. Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione

$$(x - y)^2 + x^2 + y^2 + 2 + 4x + 4y + 6xy = 0$$

ESERCIZIO 7.28. Si dica che conica è quella rappresentata dalla seguente equazione  $(x+y)^2+(x-y)^2+(x+2y)^2+(x-2y)^2+(x+2y+3)^2+(x+2y-3)^2+(x-2y+3)^2+(x-2y-3)^2 = 0$ .

## 8. Spazi proiettivi

**Definizione 8.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Sia  $\sim$  la relazione di equivalenza su  $V \setminus \{0\}$  data da  $v \sim w$  se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{K}$  tale che  $v = \lambda w$ . Il quoziente si chiama *proiettivizzato* di  $V$  e si indica con  $\mathbb{P}V$  (o  $\mathbb{P}(V)$ ). Il proiettivizzato  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$  di  $\mathbb{K}^{n+1}$  si suole denotare con  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  o  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ . Denotiamo con  $\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}V$  la proiezione. La dimensione di  $\mathbb{P}V$  è per definizione  $\dim(V) - 1$ .

In sostanza, il proiettivo di  $V$  è l'insieme delle rette lineari (cioè sottospazi vettoriali unidimensionali) di  $V$ . Questo perché dato  $v \neq 0$ , la classe  $[v]$  di  $v$  coincide con  $\text{span}(v) \setminus \{0\}$ .

**Definizione 8.2.** Dato un sottospazio  $W < V$  la sua immagine  $\pi(W) \subset \mathbb{P}V$  si chiama *sottospazio proiettivo* di  $V$  e si indica anche con  $[W]$  o con  $\mathbb{P}W$ <sup>4</sup>. La dimensione di  $\pi(W)$  è  $\dim(W) - 1$ . Per far torare i conti, si pone  $\pi(0) = \emptyset$  e la dimensione del vuoto è per convenzione  $-1$ .

Le rette di  $V$  sono i punti di  $\mathbb{P}V$ , i piani di  $V$  sono le rette proiettive di  $\mathbb{P}V$  et cetera. Dati due punti  $[v]$  e  $[w]$  in  $\mathbb{P}V$  l'unica retta proiettiva che passa per entrambi non è altro che  $\pi(\text{span}\{v, w\})$ . Viceversa, dati due sottospazi proiettivi  $[W_1], [W_2]$  la loro intersezione è  $\pi(W_1 \cap W_2)$ . In generale, dati  $[W_1], [W_2]$  il più piccolo spazio proiettivo contenente entrambi si chiama  $L([W_1], [W_2])$ . Si ha  $L([W_1], [W_2]) = \pi(\text{span}(W_1 \cup W_2)) = \pi(W_1 + W_2)$ .

<sup>4</sup>Si noti che  $\pi(W)$  è naturalmente isomorfo a  $\mathbb{P}(W)$ .

**Teorema 8.3** (Formula di Grassmann proiettiva). *Sia  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Siano  $[W_1], [W_2]$  due sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}V$ . Allora:*

$$\dim(L([W_1], L[W_2])) = \dim([W_1]) + \dim([W_2]) - \dim([W_1] \cap [W_2]).$$

*In particolare, se  $\dim[W_1] + \dim[W_2] \geq \dim \mathbb{P}V$  allora  $[W_1] \cap [W_2] \neq \emptyset$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La formula di Grassmann vettoriale si traduce direttamente in quella proiettiva, tenendo conto che  $\dim([W]) = \dim(W) - 1$  (e che  $\dim(\emptyset) = -1$ ). Se  $\dim[W_1] + \dim[W_2] \geq \dim \mathbb{P}V$  allora:

$$\dim([W_1] \cap [W_2]) = \dim[W_1] + \dim[W_2] - \dim(\mathbb{P}V) \geq 0.$$

e quindi  $[W_1] \cap [W_2]$  non è l'insieme vuoto.  $\square$

Si noti che in particolare due rette proiettive in un piano proiettivo si incontrano sempre in uno e un solo punto.

**ESERCIZIO 8.4.** *Quanti elementi ha  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$ , il proiettivo del campo con 7 elementi?*

**ESERCIZIO 8.5.** *Quanti elementi ha  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5)$ , il piano proiettivo sul campo con 5 elementi?*

**ESERCIZIO 8.6.** *Quante rette proiettive ha  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5)$ ?*

**Definizione 8.7** (Coordinate omogenee). *Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$ . Ad ogni punto  $[v] \in \mathbb{P}V$  si può associare l'unico punto  $[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$  tale che  $v = \sum_i x_i v_i$ .<sup>5</sup>  $[x_1, \dots, x_n]$  si chiama vettore delle coordinate omogenee di  $v$  rispetto alla base  $v_1, \dots, v_n$ . Le coordinate omogenee di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  si intendono calcolate rispetto alla base canonica di  $\mathbb{K}^{n+1}$ .*

In generale, dati  $v_1, \dots, v_n$  essi determinano univocamente dei punti  $p_i \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$  dati da  $p_i = [v_i]$  tali che  $L(p_1, \dots, p_n) = \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$ . Il viceversa però non è vero: dati  $p_1, \dots, p_n$  essi determinano i  $v_i$  solo a meno di un multiplo. Un modo di fare una scelta unica è quello di fissare un ulteriore punto  $p_0$  e un vettore  $v_0$  tale che  $[v_0] = p_0$ . Fissato  $v_0$  esistono unici  $[v_i] = p_i$  tali che  $\sum v_i = v_0$ .

Dati  $p_0, p_1, \dots, p_n$  distinti tali che  $L[p_1, \dots, p_n] = \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ , scelto  $v_0 \in p_0$ , essi determinano una base  $v_1, \dots, v_n$  come sopra. Le coordinate di un punto  $[v]$  rispetto a tale base si chiamano coordinate omogenee di  $[v]$  rispetto al riferimento proiettivo  $p_0, p_1, \dots, p_n$ . Chiaramente se si cambia scelta di  $v_0 \in p_0$  cambiandolo con  $\lambda v_0$ , tutti i  $v_i$  vengono moltiplicati per  $\lambda$  e quindi le coordinate omogenee non dipendono in effetti dalla scelta di  $v_0$  ma solo da  $p_0$ .

**8.1. Carte affini.** Supponiamo che  $[x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  con  $x_0 \neq 0$  allora possiamo scegliere il rappresentante con  $x_0 = 1$  cioè il punto  $[1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}]$ . In altre parole, dentro  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  vive una (molte in effetti) copia di  $\mathbb{K}^n$  tramite la corrispondenza

$$(x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow [1, x_1, \dots, x_n].$$

Ovviamente questo giochino si può fare per ogni  $i = 0, \dots, n$ .

<sup>5</sup>Chiaramente se  $[v] = [v']$  allora  $v' = \lambda v$  e dunque le loro coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $\lambda(x_1, \dots, x_n)$  si proiettano sullo stesso punto in  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ .



**Definizione 8.8.** Siano  $[x_0, \dots, x_n]$  le coordinate omogenee di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ . La  $i$ -esima carta affine standard di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  è l'insieme  $\{x_i \neq 0\}$  identificato con  $\mathbb{K}^n$  tramite la corrispondenza

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow [x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_n]$$

$$\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \longleftarrow [x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n].$$

$(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$  si chiamano coordinate affini (o coordinate non omogenee) del punto  $[x_0, \dots, x_n]$  nella carta affine  $x_i \neq 0$ .

Se si sta lavorando in una carta affine, per esempio  $x_0 \neq 0$ , i punti con  $x_0 = 0$  sono detti **punti all'infinito**. Geometricamente la carta affine corrispondente a  $x_0 \neq 0$  si vede così. In  $\mathbb{K}^{n+1}$  si considera il piano affine  $\alpha$  di equazioni  $x_0 = 1$ . Ogni retta non parallela ad  $\alpha$  lo interseca in uno e un solo punto. L'intersezione di  $\text{span}(x_0, \dots, x_n)$  con  $\alpha$  è precisamente il punto  $(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$ . Le rette parallele ad  $\alpha$  sono i punti all'infinito della carta affine.

Un caso particolare è quello di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$ . In questo caso la carta  $x_0 \neq 0$  corrisponde a  $\mathbb{K}$

$$[x_0, x_1] \longleftrightarrow \left[1, \frac{x_1}{x_0}\right]$$

e c'è un solo punto all'infinito: la classe proiettiva della retta di  $\mathbb{K}^2$  di equazione  $x_0 = 0$  (che in carta affine corrisponderebbe a  $[1, \infty]$ ). Per questo si suole dire che

$$\mathbb{K}\mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

Nel caso del piano proiettivo su  $\mathbb{K}$  e cioè  $\mathbb{K}\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ , i punti all'infinito della carta affine  $x_0 \neq 0$  sono una retta proiettiva, corrispondente a  $\mathbb{P}(\{x_0 = 0\})$ , che si chiama retta all'infinito.

Se si considerano due piani in  $\mathbb{K}^3$ , essi determineranno due rette proiettive  $r_1, r_2$  in  $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ . Siccome due piani in  $\mathbb{K}^3$  si intersecano sempre in una retta, in  $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$  le rette  $r_1, r_2$  si intersecheranno sempre in uno e un solo punto. Se lavoriamo in una carta affine, per esempio  $x_0 \neq 0$  può succedere che le rette  $r_1, r_2$  siano parallele in tali carta: la loro intersezione sta allora sulla retta all'infinito. Questo spiega il detto comune che “due rette parallele si incontrano all'infinito”.

In generale in una carta affine di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  i punti all'infinito sono un  $\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$  per cui si suole dire che

$$\mathbb{K}\mathbb{P}^n = \mathbb{K}^n \cup (\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1})_\infty$$

Si noti che la parola “infinito” ha un significato semantico coerente nel caso di  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  in cui  $1/0 = \infty$  nel senso che se si fa l'inverso di un numero infinitamente piccolo si ottiene un numero infinitamente grande. Ma di proiettivo, carte affini e punti all'infinito si può parlare anche su campi finiti!

Se un punto sta in due carte affini diverse, per esempio se  $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  ha sia  $x_0$  che  $x_n$  diversi da zero, esso si leggerà nelle due carte in modo diverso, e precisamente come

$$[1, x_1, \dots, x_n] \quad \text{e} \quad [x_0, \dots, x_{n-1}, 1]$$

Nell'intersezione di due carte affini quindi, le due identificazioni con  $\mathbb{K}^n$  danno luogo a una mappa di cambio di coordinate affini, o cambio di carta, da  $\mathbb{K}^n$  in sé. Nell'esempio delle carte  $\{x_0 \neq 0\}$  e  $\{x_n \neq 0\}$  la mappa di cambio di carta è

$$(x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow [1, x_1, \dots, x_n] = \left(\frac{1}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right) \longleftrightarrow \left(\frac{1}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

Per cui il cambio di coordinate diventa

$$(x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow \left(\frac{1}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

**8.2. Dualità.** Se  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{K}$ , allora  $V$  e  $V^*$  sono isomorfi. L'accoppiamento di dualità

$$V \times V^* \rightarrow \mathbb{K} \quad (f, v) \mapsto f(v)$$

è un'applicazione bilineare.

Ogni base  $v_1, \dots, v_n$  determina un isomorfismo di  $V$  con  $V^*$  dato da  $v_i \leftrightarrow v_i^*$  ove  $v_i^*$  è l'unico funzionale lineare su  $V$  tale che  $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ . In questo modo il vettore duale  $f = \sum y_i v_i^*$  si può identificare con il vettore  $(y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{K}^n$  e se  $v = \sum x_i v_i$  corrisponde a  $(x_1, \dots, x_n)$  l'accoppiamento di dualità corrisponde a

$$f(v) \longleftrightarrow (y_1 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_i y_i x_i$$

Si noti che se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  l'accoppiamento di dualità si realizza come il prodotto scalare standard. Visto che in dimensione finita  $(V^*)^*$  è canonicamente identificato con  $V$  (tramite  $V \rightarrow V^{**}$  data da  $v \mapsto F_v : V^* \rightarrow \mathbb{K}$  con  $F_v(f) = f(v)$ ) per noi  $V = V^{**}$ .

**Definizione 8.9.** Dato  $v \in V$  si definisce l'annullatore  $Ann(v) < V^*$  come  $Ann(v) = \{f \in V^* : f(v) = 0\}$ . Se  $I \subset V$  si definisce  $Ann(I) = \bigcap_{v \in I} Ann(v)$ .

È immediato verificare che ogni annullatore è un sottospazio vettoriale di  $V^*$ . Si noti che per definizione se  $I \subseteq J$  allora  $Ann(J) \subseteq Ann(I)$ . In oltre  $Ann(I) = Ann(\text{span}(I))$  in quanto per linearità  $f$  si annulla sugli elementi di  $I$  se e solo se si annulla su tutte le combinazioni lineari degli elementi di  $I$ .

Si noti che se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  in coordinate canoniche l'annullatore non è altro che l'ortogonale. In effetti in molti contesti (per esempio nel campo dell'analisi funzionale) l'annullatore si chiama "ortogonale".

**Teorema 8.10.** Sia  $V$  spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{K}$ . Se  $W < V$  allora  $\dim(Ann(W)) = \dim(V) - \dim(W)$ ;  $Ann(Ann(W)) = W$ .<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Questo teorema è leggermente diverso in dimensione infinita ove, tra le altre cose, non è più vero in generale che  $V^{**} = V$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $n = \dim V$ . Sia  $w_1, \dots, w_k$  una base di  $W$ . Estendiamo a base di  $V$  con vettori  $w_{k+1}, \dots, w_n$ . Sia  $\{w_i^*\}$  la corrispondente base duale di  $V^*$ . L'annullatore di  $W$  corrisponde allo span di  $w_{k+1}^*, \dots, w_n^*$  ed ha quindi dimensione  $n - k$ . La seconda affermazione segue dal fatto che  $(w_i^*)^* = w_i$ .  $\square$

**Teorema 8.11.** *Sia  $V$  spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{K}$ . Se  $W_1, W_2 < V$  allora*

$$\text{Ann}(W_1 + W_2) = \text{Ann}(W_1) \cap \text{Ann}(W_2) \quad \text{Ann}(W_1 \cap W_2) = \text{Ann}(W_1) + \text{Ann}(W_2).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per definizione  $\text{Ann}(W_1) \cap \text{Ann}(W_2) = \text{Ann}(W_1 \cup W_2) = \text{Ann}(\text{span}(W_1 \cup W_2)) = \text{Ann}(W_1 + W_2)$ . La seconda affermazione si ottiene dal teorema precedente ( $W = \text{Ann}(\text{Ann}(W))$ ) passando agli annullatori nella prima equazione.  $\square$

In altre parole  $\text{Ann}$  è un'applicazione biunivoca tra i sottospazi di  $V$  e quelli di  $V^*$  tale che:

- inverte le inclusioni
- scambia intersezioni e somme
- $\dim(\text{Ann}(W)) = \dim(V) - \dim(W)$

Passando ai proiettivi, ciò induce un'applicazione biunivoca  $\delta$  tra sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}V$  tale che, se  $n$  è la dimensione di  $\mathbb{P}V$  allora  $\delta$

- inverte le inclusioni
- scambia  $\cap$  con  $L$
- $\dim(\delta([W])) = \dim(\mathbb{P}V) - \dim([W]) - 1$

**Teorema 8.12** (Principio di dualità). *Un'affermazione su sottospazi proiettivi che tratti di dimensioni, inclusioni, intersezioni e  $L$ , è vera se e solo se è vera l'affermazione duale ottenuta sostituendo  $[W]$  con  $\delta([W])$ ,  $\dim([W])$  con  $\dim \mathbb{P}V - \dim([W]) - 1$ ,  $\subseteq$  con  $\supseteq$ ,  $\cap$  con  $L$ .*

Per esempio sono duali “per due punti (sottospazi zero-dimensionali) del piano proiettivo passa una e una sola retta (sottospazio proiettivo unidimensionale, si noti che  $1 = 2 - 0 - 1$ )” e “due rette nel piano proiettivo si intersecano in uno e un sol punto”.

O in generale “per due punti passa una e una sola retta” e “due iperpiani si intersecano in uno e un solo sottospazio  $(n - 2)$ -dimensionale”

**8.3. Proiettività e classificazione proiettiva delle coniche.** Ogni endomorfismo lineare iniettivo di  $f : V \rightarrow V$  induce una funzione  $[f] : \mathbb{P}V \rightarrow \mathbb{P}V$  data da

$$[f]([v]) = [f(v)]$$

in quanto se  $w = \lambda v$  allora  $f(w) = \lambda f(v)$  e siccome  $f$  è iniettiva,  $f(v) \neq 0$  e  $\lambda \neq 0$ . Quindi  $[f(v)] = [f(w)]$  in  $\mathbb{P}V$ . In oltre se  $g = \lambda f$  allora  $[g] = [f]$ . In altre parole  $\mathbb{P}(GL(V))$  agisce su  $\mathbb{P}V$  ( $\mathbb{P}(GL(V))$  è da intendersi come sottoinsieme di  $\mathbb{P}(\text{End}(V))$ ). Gli elementi di  $\mathbb{P}GL(V)$  si chiamano proiettività di  $V$ . In particolare le proiettività di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  sono il gruppo  $\mathbb{P}GL(n + 1, \mathbb{K})$ .

**ESEMPIO 8.13.**  $\mathbb{P}GL(2, \mathbb{R}) = \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \pm 1$  è il gruppo delle matrici quadrate  $2 \times 2$  con determinante unitario, a meno del segno.

**Teorema 8.14.** *Consideriamo  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  con coordinate omogenee  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  e la carta affine  $x_{n+1} \neq 0$  identificata con  $\mathbb{K}^n$  via  $(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow [x_1, \dots, x_n, 1]$ . Sia  $W = \{x_{n+1} = 0\}$  il proiettivo all'infinito in tale carta e sia  $W_1 = \{x_{n+1} = 1\}$ . Per ogni  $f \in \mathbb{P}GL(n+1, \mathbb{K})$  tale che  $f(W) = W$  esiste unica  $M \in GL(n+1, \mathbb{K})$  tale che  $[M] = f$  e  $M(W_1) = W_1$ . In altre parole, esiste una unica  $M$  in  $f$  della forma*

$$\begin{pmatrix} L & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $(e_i)$  è la base canonica, per come è definito,  $W = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ . Quindi se  $[M] = f$  preserva  $W$  allora è della forma

$$\begin{pmatrix} L & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Siccome  $f \in \mathbb{P}GL(n+1, \mathbb{K})$ , se  $[M] = f$  allora  $M$  deve essere invertibile. quindi  $c \neq 0$ . Ne segue che  $\frac{1}{c}M$  è l'unica matrice con le proprietà richieste.  $\square$

**Corollario 8.15.** *La geometria affine è una sottogeometria della geometria proiettiva. In carte affini, le affinità non sono altro che le proiettività che preservano l'infinito.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema precedente, le proiettività che preservano lo spazio all'infinito  $W$  hanno un unico rappresentante che fissa lo spazio affine  $W_1$ . In coordinate affini se  $\begin{pmatrix} L & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , si ha  $f(X) = LX + b$ . Viceversa, ogni affinità del tipo  $LX + b$  induce una proiettività data dalla classe di  $\begin{pmatrix} L & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  che chiaramente fissa  $W$ .  $\square$

Fissiamo adesso una carta affine  $x_{n+1} \neq 0$  in  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ . Un polinomio di grado 2 nelle variabili  $x_1, \dots, x_n$  lo si può omogeneizzare rendendolo un polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  attraverso

$$\sum_{ij} a_{ij}x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c \quad \mapsto \quad \sum_{ij} a_{ij}x_i x_j + \sum_i b_i x_i x_{n+1} + c x_{n+1}^2$$

(e la stessa cosa si può fare per un polinomio di grado  $k$  qualsiasi)

Se  $P$  è un polinomio omogeneo di grado 2 in  $X = (x_1, \dots, x_{n+1})$  allora  $P(\lambda X) = \lambda^2 P(X)$  e quindi il luogo di zeri di  $P$  è ben definito in  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ . (Ma non il valore di  $P$ , quindi  $P$  non è una funzione ben definita sul proiettivo).

**Definizione 8.16.** *Una quadrica in  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  è il luogo di zeri di un polinomio omogeneo di grado due in  $n+1$  variabili. Due quadriche si dicono proiettivamente equivalenti se esiste una trasformazione proiettiva che manda l'una nell'altra.*

In carte affini, attraverso l'omogeneizzazione, una quadrica di  $\mathbb{K}^n$  diventa una quadrica di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ . E se due quadriche sono affinemente equivalenti, allora sono proiettivamente equivalenti attraverso una proiettività che fissa l'infinito.

Se  $2 \neq 0$  una quadrica proiettiva si può sempre esprimere come

$$X^t M X = 0$$

ove  $M^t = M$ . In altre parole, in coordinate una quadrica proiettiva è la classe proiettiva dei vettori isotropi di una forma bilineare simmetrica in  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Una quadrica si dice **non degenera** se  $\det M \neq 0$ . Dal teorema di diagonalizzazione delle forme quadratiche (o delle forme bilineari simmetriche) segue immediatamente il teorema di classificazione delle quadriche proiettive:

**Teorema 8.17.** *A meno di proiettività, ogni quadrica proiettiva in  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  è della forma*

$$\sum_{i=1}^{n_+} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n_+ + n_-} x_i^2 = 0$$

ove  $(n_+, n_-, n_0)$  è la segnatura di  $M$ . Tale forma è unica a meno di scambiare  $i +$  con  $i -$  cambiando segno a tutta l'equazione.

A meno di proiettività, ogni quadrica proiettiva in  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$  è della forma

$$\sum_{i=1}^k x_i^2 = 0$$

ove  $k$  è il rango di  $M$ .

**Corollario 8.18.** *In  $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  c'è solo una quadrica non degenera (e non vuota): il cono. Ogni conica non degenera di  $\mathbb{R}^2$  è quindi l'intersezione di un cono con un piano.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome la quadrica è non degenera, si ha  $\det(M) \neq 0$  e quindi  $n_+ + n_- = 3$ . Se la segnatura di  $M$  è  $(3, 0)$  o  $(0, 3)$  allora la quadrica è vuota. Se la segnatura è  $(2, 1)$  o  $(1, 2)$  allora la forma canonica è

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

quindi in  $\mathbb{R}^3$  stiamo guardando al cono luce del prodotto di Minkowski. La proiettività che trasforma la quadrica in  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  proviene da una applicazione lineare in  $GL(3, \mathbb{R})$  e quindi manda il piano  $z = 1$  in un piano  $\pi$ . La conica sarà quindi l'intersezione del cono con  $\pi$ .  $\square$

Le coniche si chiamano coniche proprio perché sono sezioni coniche. In particolare si può vedere che l'ellisse è caratterizzata dal fatto che nella carta affine in cui lavoriamo non ci sono punti all'infinito, la parabola ha invece un punto all'infinito e l'iperbole due.

**8.4. Geometria di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$  e trasformazioni di Moebius.** In  $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$  fissiamo coordinate omogenee  $[x, y]$  relative alla base canonica di  $\mathbb{K}^2$  e fissiamo la carta affine  $y \neq 0$ . Per quanto detto sopra, possiamo lavorare sul piano  $y = 1$  identificando quindi  $x \in \mathbb{K}$  con  $[x, 1]$  e  $\infty$  con  $[1, 0]$ . Usiamo la convenzione che  $1/0 = \infty$ ,  $1/\infty = 0$ ,  $\infty + a = \infty$ ,  $\lambda\infty = \infty$  se  $\lambda \neq 0$ ,  $0\infty = 0$  e  $\frac{a\infty}{b\infty} = \frac{a}{b}$ .

Sia  $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{K})$ . Essa agisce su  $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$  come

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [ax + by, cx + dy]$$

se  $y = 1$  si ha

$$A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = [ax + b, cx + d]$$

e se vogliamo il rappresentante con la seconda coordinata unitaria si ha

$$A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \left[ \frac{ax + b}{cx + d}, 1 \right].$$

Quindi, una proiettività in carta affine  $y = 1$  si legge come

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

una tale funzione si chiama **trasformazione di Möbius**. Chiaramente  $A$  e  $\lambda A$  inducono la stessa Moebius se  $\lambda \neq 0$ .

**Teorema 8.19.** *Un'applicazione di Moebius  $f$  è univocamente determinata dai valori  $f(\infty), f(0), f(1)$ . Ossia, per ogni  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{K}\mathbb{P}^1$  diversi tra loro esiste unica  $f$  Moebius tale che  $f(\infty) = p_1, f(0) = p_2, f(1) = p_3$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $v_i \in \mathbb{K}^2$  tali che  $[v_i] = p_i$ . Siccome i  $p_i$  sono distinti tra loro  $v_1, v_2$  è una base di  $\mathbb{K}^2$  e quindi esistono unici  $\lambda_i$  tali che  $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ . Si noti che siccome i  $p_i$  sono distinti tra loro  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ . In coordinate omogenee si ha  $\infty = e_1 = (1, 0)$ ,  $0 = e_2 = (0, 1)$ ,  $1 = (1, 1) = e_1 + e_2$ . Ne segue che se  $A = (\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2)$  allora

$$[A](\infty) = [Ae_1] = [\lambda_1 v_1] = p_1$$

$$[A](0) = [Ae_2] = [\lambda_2 v_2] = p_2$$

$$[A](1) = [A(e_1 + e_2)] = [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2] = [v_3] = p_3$$

quindi una  $f$  con le proprietà richiesto esiste. Sia ora  $B \in GL(2, \mathbb{K})$  un'altra matrice con le stesse proprietà. Sia  $w_1$  la prima colonna di  $B$  e  $w_2$  la seconda. Si ha

$$p_1 = [B](\infty) = [Be_1] = [w_1] \Rightarrow [w_1] = [v_1] \Rightarrow \exists \mu_1 \neq 0 : w_1 = \mu_1 v_1$$

$$p_2 = [B](0) = [Be_2] = [w_2] \Rightarrow [w_2] = [v_2] \Rightarrow \exists \mu_2 \neq 0 : w_2 = \mu_2 v_2$$

$$p_3 = [B](1) = [B(e_1 + e_2)] = [w_1 + w_2] \Rightarrow [w_1 + w_2] = [v_3] \Rightarrow \exists \mu_3 \neq 0 : w_2 + w_1 = \mu_3 v_3$$

per cui

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \mu_3 v_3 \Rightarrow \frac{\mu_1}{\mu_3} = \lambda_1, \frac{\mu_2}{\mu_3} = \lambda_2 \Rightarrow \frac{B}{\mu_3} = A \Leftrightarrow [B] = [A]$$

e anche l'unicità è provata.

**Corollario 8.20** (Transitività sulle triple di punti). *Dati  $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{K}\mathbb{P}^1$  con  $p_i \neq p_j$  e  $q_i \neq q_j$  per  $i \neq j$ . Allora esiste una unica Moebius  $f$  tale che  $f(p_i) = q_i$ .*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $g, h$  le uniche moebius tali che

$$g(\infty) = p_1, \quad g(0) = p_2, \quad g(1) = p_3$$

e

$$h(\infty) = q_1, \quad h(0) = q_2, \quad h(1) = q_3$$

Chiaramente  $h \circ g^{-1}$  ha le proprietà richieste. Se  $f$  è una Moebius con le proprietà richieste allora  $f \circ g$  manda  $\infty$  in  $q_1$ ,  $0$  in  $q_2$  e  $1$  in  $q_2$  quindi  $f \circ g = h$  e  $f = h \circ g^{-1}$ , quindi  $f$  è unica.  $\square$

ESERCIZIO 8.21. Visualizzare geometricamente in  $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  il cambio di coordinate che porta  $-1$  in  $0$ ,  $0$  in  $1$ ,  $3$  in  $\infty$ .

**8.5. Birapporto in  $\mathbb{KP}^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ .** Lavoriamo sempre in  $\mathbb{K}^2$ . Dati  $x_1, x_2, x_3$  l'unica moebius che manda  $x_1$  in  $0$ ,  $x_2$  in  $1$  e  $x_3$  in infinito è

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x - x_3} \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}$$

**Definizione 8.22.** Il birapporto di quattro punti distinti  $x_1, x_2, x_3, x_4$  in  $\mathbb{KP}^1$  è il numero

$$f(x_4) = \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_3} \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}$$

e si denota con  $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ .

Se  $z = [x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$  e si cambia l'ordine dei punti, il birapporto varia nelle sei possibilità  $z, \frac{1}{z}, 1 - \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}, 1 - z, \frac{z}{z-1}$ . Occhio che non c'è un ordine standard in cui si prendono i punti quindi in altri libri la definizione di birapporto potrebbe avere gli  $x_i$  rimescolati.

**Teorema 8.23.** Date due quadruple di punti distinti in  $\mathbb{KP}^1$  esiste una moebius che manda l'una nell'altra se e solo se hanno lo stesso birapporto. Tale applicazione è unica

DIMOSTRAZIONE. Siano  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $y_1, y_2, y_3, y_4$  le due quadruple e siano  $g, h$  le uniche moebius tali che

$$g(x_1) = 0, \quad g(x_2) = 1, \quad g(x_3) = \infty$$

e

$$h(y_1) = 0, \quad h(y_2) = 1, \quad h(y_3) = \infty.$$

Se esiste una moebius  $f$  tale che  $f(x_i) = y_i$  allora

$$h \circ f(x_1) = 0, \quad h \circ f(x_2) = 1, \quad h \circ f(x_3) = \infty$$

per cui

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = h \circ f(x_4) = h(y_4) = [y_1 : y_2 : y_3 : y_4].$$

Viceversa,  $h^{-1} \circ g$  manda comunque  $x_i$  in  $y_i$  per  $i = 1, 2, 3$  e se  $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = [y_1 : y_2 : y_3 : y_4]$  allora

$$h^{-1}(g(x_4)) = h^{-1}([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) = h^{-1}([y_1 : y_2 : y_3 : y_4]) = y_4.$$

$\square$

**Corollario 8.24.** *Siano  $r_1, r_2, r_3, r_4$  e  $s_1, s_2, s_3, s_4$  rette per l'origine in  $\mathbb{R}^2$  con  $r_i \neq r_j$  e  $s_i \neq s_j$  se  $i \neq j$ . Allora esiste un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che manda  $r_i$  in  $s_i$  se e solo se, come elementi di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$  le due quadruple di rette hanno lo stesso birapporto.*

DIMOSTRAZIONE. Se hanno lo stesso birapporto la moebius che fa il mestiere richiesto proviene da una applicazione lineare invertibile, che è ovviamente un diffeomorfismo. Viceversa, se  $f(r_i) = s_i$  in particolare  $f(r_1 \cap r_2) = s_1 \cap s_2$  e quindi  $f(0) = 0$ . Siccome  $f$  è un diffeomorfismo  $M = df|_0$  è una applicazione lineare invertibile che manda  $r_i$  in  $s_i$ . Quindi  $[M] \in \mathbb{P}GL(2, \mathbb{R})$  fornisce una moebius che manda  $[r_i]$  in  $[s_i]$  e quindi per il teorema precedente i due birapporti devono coincidere.  $\square$

**8.6. Moebius e birapporto in  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .** Le trasformazioni di Moebius in  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  sono di particolare interesse. Vediamo qui una delle loro proprietà più famose. In  $\mathbb{C}$  possiamo considerare la metrica euclidea indotta dall'identificazione di  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  e quindi possiamo parlare di cerchi (luogo dei punti equidistanti da un centro dato) e rette (rette affini in  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ).

**Teorema 8.25.** *Ogni trasformazione di Moebius manda { cerchi e rette } in { cerchi e rette }.*

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto si noti che non si detto che una moebius manda cerchi in cerchi e rette in rette: una retta può andare in un cerchio e viceversa. Come *spot* da ricordare potete pensare che, in questa cornice di lavoro,

“una retta è un cerchio che passa per l'infinito”

“una retta è un cerchio col centro all'infinito”

“una retta è un cerchio di raggio infinito”

Ma torniamo alla dimostrazione. Essa sarà fatta attraverso quattro lemmi.

**Lemma 8.26.** *Il gruppo delle trasformazioni Moebius è generato da  $\frac{1}{z}$  e dalle affinità, ossia mappe del tipo  $z \mapsto \lambda z + \eta$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $f = \frac{az+b}{cz+d}$  una moebius.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{ac}{c}z \pm \frac{ad}{c} + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}.$$

Ponendo

$$g_1(z) = cz + d, \quad g_2(z) = 1/z, \quad g_3(z) = \left(b - \frac{ad}{c}\right)z + \frac{a}{c}$$

si ha  $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ .  $\square$

Grazie a questo primo lemma possiamo limitarci a dimostrare il teorema per  $f(z) = 1/z$  e per le affinità complesse di  $\mathbb{C}$ . Chiaramente le affinità di  $\mathbb{C}$  mandano cerchi in cerchi e rette in rette, quindi resta il caso  $f(z) = 1/z$ .

**Lemma 8.27.**  *$f(z) = 1/z$  manda rette per l'origine in rette per l'origine.*

DIMOSTRAZIONE. Una retta  $R$  per l'origine è  $\text{span}_{\mathbb{R}}(z)$  e possiamo prendere  $|z| = 1$ . Cioè è un insieme del tipo  $\{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Siccome  $|z| = 1$ ,  $f(z) = \bar{z}$ . Quindi  $f(R) = \text{span}_{\mathbb{R}}(\bar{z})$  e quindi è una retta per l'origine. Notate che  $f$  scambia 0 e  $\infty$ .  $\square$



**Lemma 8.28.**  $f(z) = 1/z$  manda rette non per l'origine in cerchi per l'origine e viceversa.

DIMOSTRAZIONE. Il viceversa dipende dal fatto che  $f$  è un'involuzione  $f^2 = Id$ . Una retta  $R_\alpha$  a distanza  $\alpha \geq 0$  dall'origine può essere parametrizzata con

$$R_\alpha = \{\lambda z + \alpha iz : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

ove  $z$  è un opportuno numero complesso di modulo 1 (che è una base su  $\mathbb{R}$  per la giacitura della retta in questione). Ebbene si ha

$$f(R_\alpha) = C\left(\frac{-i\bar{z}}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha}\right)$$

ove con  $C(x, \rho)$  si intende il cerchio di centro  $x$  e raggio  $\rho$ . Per verificarlo basta fare il conto, ricordando che  $|z| = 1$ . Prendiamo  $p \in R_\alpha$  e calcoliamo la distanza tra  $f(p)$  e  $\frac{-i\bar{z}}{2\alpha}$ :

$$\left| \frac{1}{\lambda z + i\alpha z} + \frac{i\bar{z}}{2\alpha} \right| = \left| \frac{2\alpha + \bar{z}zi(\lambda + i\alpha)}{z(\lambda + i\alpha)2\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha + i\lambda}{(\lambda + i\alpha)2\alpha} \right| = \left| \frac{i(\lambda - i\alpha)}{(\lambda + i\alpha)2\alpha} \right| = \left| \frac{1}{2\alpha} \right| = \frac{1}{2\alpha}.$$

□

**Lemma 8.29.**  $f(z) = 1/z$  manda cerchi non per l'origine in cerchi non per l'origine. In particolare

$$f(C(z_0, R)) = C\left(\frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}, \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}\right)$$

DIMOSTRAZIONE. Si noti che se  $C(z_0, R)$  non passa per l'origine allora  $|z_0|^2 \neq R^2$  e quindi l'immagine è un cerchio (non ha il centro all'infinito) che non passa per l'origine.

Sia  $z \in C(z_0, R)$  cioè  $|z - z_0| = R$  si deve far vedere che  $|f(z) - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}| = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$ . Facciamo il conto ricorando che  $R^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)$ .

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2} \right| = \left| \frac{|z_0|^2 - R^2 - z\bar{z}_0}{z(|z_0|^2 - R^2)} \right| = \left| \frac{\bar{z}\bar{z}_0 - |z|^2}{z(|z_0|^2 - R^2)} \right| = \left| \frac{\bar{z}(\bar{z}_0 - z)}{z(|z_0|^2 - R^2)} \right| = \left| \frac{\bar{z}_0 - z}{|z_0|^2 - R^2} \right| = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$$

□

Questo lemma conclude tutti i casi possibili ed il teorema è dimostrato. □

**Corollario 8.30.** Quattro punti di  $\mathbb{C}$  stanno su un cerchio o retta se e solo se il loro birapporto è reale. In particolare quattro punti di  $\mathbb{C}$  stanno su un cerchio se e solo se non sono allineati ed il loro birapporto è reale.

DIMOSTRAZIONE. Siano  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$  e sia  $f$  l'unica trasformazione di moebius che manda  $x_1$  in 0,  $x_2$  in 1 e  $x_3$  in  $\infty$ . Se gli  $x_i$  stanno su un cerchio o retta  $C$  allora il loro birapporto  $f(x_4)$  sta su  $f(C)$ , che è un cerchio che passa per  $\infty$  e quindi è una retta, che passa per 0 e 1 e quindi  $f(C) = \mathbb{R}$ . Quindi  $f(x_4) \in \mathbb{R}$ . Viceversa se  $f(x_4) \in \mathbb{R}$  allora i punti  $x_i$  stanno tutti su  $f^{-1}(\mathbb{R})$ , che è una retta o un cerchio. □

## Topologia degli Spazi metrici

### 1. Spazi metrici

**Definizione 1.1** (Funzioni distanza). *Una metrica (o distanza) su un'insieme  $X$  è una funzione*

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

*tale che*

- $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$  (positività);
- $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$  (simmetria);
- $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (separazione dei punti);
- $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (disuguaglianza triangolare).

$(X, d)$  si chiama spazio metrico.

**ESEMPIO 1.2.** *La metrica della città.  $X$  una città e  $d(P, Q)$  definita come la distanza minima per andare a piedi da  $Q$  a  $P$ . Questo esempio rende lampante il significato della disuguaglianza triangolare.*

**ESEMPIO 1.3.**  $X = \mathbb{R}$  con  $d(x, y) = |x - y|$ . (Metrica standard su  $\mathbb{R}$ .)

**ESEMPIO 1.4.**  $X = \mathbb{R}^2$  con  $d(P, Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}$ . (Metrica euclidea standard su  $\mathbb{R}^2$ .)

**ESEMPIO 1.5.**  $X = \mathbb{R}^n$  con  $d(v, w) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$ . (Metrica euclidea standard su  $\mathbb{R}^n$ .)

**ESEMPIO 1.6.**  $X = \mathbb{R}^n$  con  $d(v, w) = \sqrt[p]{\sum_i (|x_i - y_i|)^p}$ . (Metrica  $L^p$  standard su  $\mathbb{R}^n$ .) Questa è una metrica solo per  $p \in [1, \infty]$ . Per  $p = 1$  la metrica diventa  $d_1(v, w) = \sum_i |x_i - y_i|$ . Per  $p = \infty$  la metrica diventa  $d_\infty(v, w) = \sup_i |x_i - y_i|$ .

**ESEMPIO 1.7.**  $X \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $X = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \sum |x_i|^p < \infty\}$  con  $d(v, w) = \sqrt[p]{\sum_i (|x_i - y_i|)^p}$ . Tale spazio si indica di solito  $l^p$ . Questa è una metrica solo per  $p \in [1, \infty]$ . Per  $p = 1$  la metrica diventa  $d_1(v, w) = \sum_i |x_i - y_i|$ . Facendo il limite per  $p \rightarrow \infty$  la metrica per  $p = \infty$  diventa  $d_\infty(v, w) = \sup_i |x_i - y_i|$ .

**ESEMPIO 1.8.** Dato  $X \subset \mathbb{R}$  si pone  $L^p(X) = \{f : \int_X |f(x)|^p < \infty\} / \{f : \int_X |f(x)|^p = 0\}$  con  $d(f, g) = \sqrt[p]{\int_X |f(x) - g(x)|^p}$ . Questa è una metrica solo per  $p \in [1, \infty]$ . Per  $p = 1$  la metrica diventa  $d_1(f, g) = \int_X |f(x) - g(x)|$ . Per  $p = \infty$  come si potrebbe definire la metrica  $d_\infty(f, g)$ ? Per funzioni continue diventa la metrica del sup, quella della convergenza uniforme:  $d_\infty(f, g) = \sup_X |f(x) - g(x)|$ .

**ESERCIZIO 1.9.** *Dimostrare che quelle appena elencate sono effettivamente metriche. Per la disuguaglianza triangolare delle metriche  $L^p$  serve la disuguaglianza di Minkowski. (Per  $p = 2$  segue dalla disuguaglianza di Schwartz.)*

Tutte queste metriche provengono da una norma, cioè si pone  $\|v\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$  e si ha  $d_p(v, w) = \|v - w\|_p$ . Per definizione si ha  $\|\lambda v\|_p = |\lambda| \|v\|_p$ .

**Definizione 1.10** (Sottospazio metrico). *Dato  $(X, d)$  spazio metrico, per ogni  $Y \subset X$  la funzione  $d|_Y$  è una distanza su  $Y$  che si chiama distanza indotta da  $(X, d)$  su  $Y$ . Lo spazio  $(Y, d|_Y)$  si chiama sovente sottospazio metrico di  $(X, d)$ .*

**Definizione 1.11** (Metrica indotta da una funzione). *Dato  $(X, d)$  spazio metrico, e  $f : Y \rightarrow X$  iniettiva, la funzione  $f$  induce una distanza  $d_f$  su  $Y$  data da*

$$d_f(a, b) = d(f(a), f(b))$$

$d_f$  si chiama distanza indotta da  $f$  su  $Y$  o distanza pull-back.

**ESEMPIO 1.12.** *Sia  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$  (ove su  $\mathbb{R}^3$  si usa la norma euclidea standard). Su  $S^2$  si può mettere la distanza  $d_{\mathbb{R}^3}$  indotta da  $\mathbb{R}^3$  e quella angolare, simile alla distanza dei cammini sulla città:  $d(x, y)$  è la lunghezza minima di un arco di cerchio che connette  $x$  e  $y$ . Tali distanze sono diverse in quanto, per esempio, le distanze tra polo nord  $N = (0, 0, 1)$  e polo sud  $S = (0, 0, -1)$  sono:*

$$d_{\mathbb{R}^3}(N, S) = 2 \quad d(N, S) = \pi$$

**ESEMPIO 1.13** (I raggi di bicicletta). *Consideriamo  $X \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  formato da 36 rette equidistribuite angularmente:*

$$X = \{\lambda z : \lambda \in \mathbb{R}, z^{72} = 1\}$$

Su  $X$  si può considerare la metrica  $d_{\mathbb{R}^2}$  indotta da  $\mathbb{R}^2$  e quella “dei cammini”:

$$d(x, y) = \begin{cases} d_{\mathbb{R}^2}(x, y) & \text{se } \exists \lambda \in \mathbb{R} : y = \lambda x \\ d_{\mathbb{R}^2}(x, 0) + d_{\mathbb{R}^2}(0, y) & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Chiaramente le due distanze sono diverse.

**ESEMPIO 1.14** (Infiniti raggi di bicicletta). *Consideriamo  $X = \mathbb{R}^2$  con la metrica*

$$d(x, y) = \begin{cases} d_{\mathbb{R}^2}(x, y) & \text{se } \exists \lambda \in \mathbb{R} : y = \lambda x \\ d_{\mathbb{R}^2}(x, 0) + d_{\mathbb{R}^2}(0, y) & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Come è fatta  $d$ ?

**ESERCIZIO 1.15.** *Verificare che la metrica degli infiniti raggi sia effettivamente una metrica su  $\mathbb{R}^2$ .*

**Definizione 1.16** (Successioni convergenti). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $(x_i)$  una successione in  $X$ . Si dice che  $(x_i)$  converge a  $x \in X$ , e si scrive  $x_i \rightarrow x$  se*

$$d(x_i, x) \rightarrow 0.$$

**ESEMPIO 1.17.** Sia  $X = \mathbb{R}^2$  e sia  $x_n = (1, \frac{1}{n})$ . La successione  $(x_n)$  converge a  $(1, 0)$  per la metrica standard di  $\mathbb{R}^2$  mentre ciò non è vero nella metrica degli infiniti raggi.

**Definizione 1.18** (Funzioni continue). Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \delta)$  due spazi metrici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice continua se per ogni successione  $(x_i)$  in  $X$  si ha:

$$(x_i \rightarrow x) \Rightarrow (f(x_i) \rightarrow f(x))$$

**Definizione 1.19** (Cammini). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Un cammino continuo, o semplicemente cammino, è un'applicazione continua da un intervallo  $[a, b]$  in  $X$ :

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X$$

ove  $[a, b]$  è dotato della metrica standard.

**ESEMPIO 1.20.** Il cammino  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dato da  $\gamma(x) = e^{ix}$  è un cammino continuo che descrive una circonferenza.

**ESEMPIO 1.21.** Sia  $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua monotona decrescente con  $\rho(0) = 1$  e  $\rho(1) = 0$ . Sia  $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua monotona crescente. Il cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  dato da  $\gamma(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$  descrive una spirale in  $\mathbb{C}$ .

**ESEMPIO 1.22** (curva di Koch). La curva a fiocco di neve di Koch è questa: cioè il

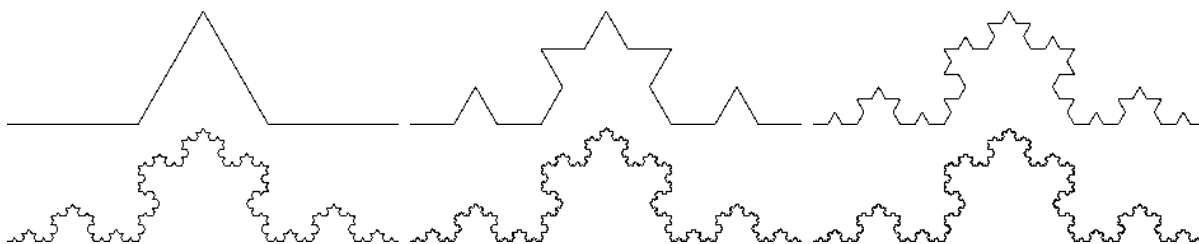


FIGURA 1. La curva di Koch (da wikipedia). Per fare un fiocco di neve si fa questa costruzione su ogni lato di un triangolo equilatero.

limite di curve poligonali definite ricorsivamente come segue: ad ogni passo si divide ogni segmento della poligonale in tre, si cancella il terzo centrale e lo si rimpiazza con gli altri due lati di un triangolo equilatero con base il segmentino cancellato. Il limite è un cammino continuo.

Dato un segmento  $[a, b]$  una suddivisione finita di  $[a, b]$  è una scelta di punti  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_k = b$ . In questo modo  $[a, b] = \cup_i [x_{i-1}, x_i]$ .

**Definizione 1.23** (Lunghezza di cammini). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dato un cammino  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , la sua lunghezza è definita come

$$L(\gamma) = \sup_{a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k=b} \sum_{i=1}^k d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i-1}))$$

ove il sup è calcolato su tutte le possibili suddivisioni di  $[a, b]$ . La lunghezza di un cammino è un numero in  $[0, \infty]$ . Un cammino  $\gamma$  si dice rettificabile se  $L(\gamma) < \infty$ .

**ESEMPIO 1.24.** *La curva di Koch non è rettificabile in quanto se  $p_n$  è la poligonale ennesima che approssima la curva di Koch, si ha*

$$L(p_{n+1}) = \frac{4}{3}L(p_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n L(p_1) \rightarrow \infty$$

**ESERCIZIO 1.25.** *Trovare funzioni  $f$  e  $\theta$  tali che la spirale  $f(x)e^{i\theta}$  abbia lunghezza finita. Trovare funzioni  $f$  e  $\theta$  tali che la spirale  $f(x)e^{i\theta}$  abbia lunghezza infinita.*

In spazi metrici usuali, tipo  $\mathbb{R}^2$  le curve differenziabili o poligonali sono tutte rettificabili.

**ESEMPIO 1.26.** *Sia  $X = [0, 1]$  con la metrica  $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ . (Esercizio: Verificare che  $d$  sia una distanza.) Gli unici cammini rettificabili sono quelli costanti.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  un cammino non costante. In particolare esistono  $a_0, b_0 \in (a, b)$  tali che  $\gamma(a_0) < \gamma(b_0)$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  sia  $\gamma(a_0) = x_0^k < x_1^k < \dots < x_k^k = \gamma(b_0)$  una suddivisione di  $[\gamma(a_0), \gamma(b_0)]$  tale che  $|x_i^k - x_{i-1}^k| = |\gamma(b_0) - \gamma(a_0)|/k$  e sia  $a < a_0 < a_1^k < \dots < a_k^k = b_0 < b$  una suddivisione di  $[a, b]$  tale che  $\gamma(a_i^k) = b_i^k$ . Per esempio  $a_i^k = \inf(\gamma^{-1}(x_i^k))$ . Si ha

$$\sum_i d(\gamma(a_i^k), \gamma(a_{i-1}^k)) = \sum_i d(x_i^k, x_{i-1}^k) = \frac{k\sqrt{|\gamma(b_0) - \gamma(a_0)|}}{\sqrt{k}} \rightarrow \infty$$

e quindi  $L(\gamma) = \infty$ . □

**Definizione 1.27** (Metrica dei cammini). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. La metrica dei cammini indotta da  $d$  su  $X$  è definita come*

$$\delta(x, y) = \inf\{L(\gamma) \mid \text{al variare di } \gamma : [a, b] \rightarrow X : \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$$

*Questa non è esattamente una distanza perché può assumere il valore  $\infty$  ma tutte le altre proprietà di una distanza sono soddisfatte. In particolare se per ogni  $x \in X$  definiamo l'insieme  $M_x = \{y \in X : \delta(x, y) < \infty\}$ , allora la restrizione di  $\delta$  ad ogni  $M_x$  è una distanza vera e propria. (Esercizio: verificarlo.)*

Nell'esempio precedente si ha  $M_x = \{x\}$  per ogni  $x \in [0, 1]$ .

**Definizione 1.28** (Spazio geodetico). *Uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice geodetico (o semplicemente che  $d$  è geodetica) se  $d$  coincide con la distanza dei cammini  $\delta$  indotta da  $d$  e se per ogni  $x, y \in X$  esiste un cammino  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  con  $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$  e  $L(\gamma) = \delta(x, y)$ .*

**ESEMPIO 1.29.** *La distanza della città è geodetica.*

**ESEMPIO 1.30.** *La distanza della raggi di bicicletta è geodetica.*

**ESERCIZIO 1.31.** *Dimostrare che la distanza dei raggi infiniti è geodetica.*

**ESEMPIO 1.32.**  *$S^2$  con la distanza angolare è geodetico.*

**ESEMPIO 1.33.**  *$S^2$  con la distanza indotta da  $\mathbb{R}^3$  non è geodetico.*

**Definizione 1.34** (omeomorfismi tra spazi metrici). Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \delta)$  due spazi metrici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice omeomorfismo se ha un'inversa e se entrambe  $f$  e  $f^{-1}$  sono continue.

ESEMPIO 1.35. Sia  $X = [-1, 0] \cup (1, 2]$  e  $Y = [0, 2]$  entrambi con la metrica indotta da  $\mathbb{R}$ . Sia  $f : X \rightarrow Y$  definita da  $f(x) = |x|$ . Chiaramente  $f$  è invertibile con inversa

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x \in (1, 2] \\ -x & x \in [0, 1] \end{cases}$$

La funzione  $f$  è continua perché restrizione di una funzione continua, ma la sua inversa non è continua. Infatti  $x_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$  ma  $f^{-1}(x_n) = x_n$  non converge a  $-1 = f^{-1}(1)$ .

ESEMPIO 1.36 (Di Analisi più che di topologia). Gli spazi  $l^p$  sono omeomorfi tra loro. Vediamolo che è bellino. Siano  $p, q \in [1, \infty)$  e sia  $f : l^p \rightarrow l^q$  definita da

$$f((x_i)) = (y_i) \quad \text{con} \quad y_i = \begin{cases} \frac{x_i}{|x_i|} |x_i|^{\frac{p}{q}} & x_i \neq 0 \\ 0 & x_i = 0 \end{cases}$$

Chiaramente se  $\sum |x_i|^p < \infty$  allora  $\sum |y_i|^q = \sum |x_i|^p \leq \infty$ . Vediamo adesso che  $f$  è continua. Usiamo la concavità della funzione  $g(x) = \sqrt[q]{|x|}$  per cui

$$\frac{|g(a) - g(b)|}{2} \leq g\left(\frac{|a - b|}{2}\right)$$

e dunque

$$|\sqrt[q]{a} - \sqrt[q]{b}| \leq C |\sqrt[q]{|a - b|}|$$

con  $C = 2/\sqrt[q]{2}$  e quindi

$$|\sqrt[q]{a} - \sqrt[q]{b}|^q \leq 2^{q-1} |a - b|.$$

Per semplicità di notazione supponiamo  $x_i^k > 0$  e  $x_i^k \geq x_i^\infty$  (altrimenti ci dobbiamo portare dietro un sacco di valori assoluti e segni). Si ha

$$\sum_i |y_i^k - y_i^\infty|^q = \sum_i \left( (x_i^k)^{\frac{p}{q}} - (x_i^\infty)^{\frac{p}{q}} \right)^q \leq 2^{q-1} \sum_i (x_i^k)^p - (x_i^\infty)^p$$

Considerando la funzione  $h(x) = x^p$  per il teorema di Lagrange per ogni  $b > a > 0$  si ha  $b^p - a^p \leq p(b - a)b^{p-1}$  per cui

$$\sum_i (x_i^k)^p - (x_i^\infty)^p \leq p \sum_i (x_i^k - x_i^\infty)(x_i^k)^{p-1}$$

Per la disuguaglianza di Holder

$$\sum_i (x_i^k - x_i^\infty)(x_i^k)^{p-1} \leq \sqrt[p]{\sum_i (x_i^k - x_i^\infty)^p} \sqrt{\frac{p}{p-1}} \sqrt{(x_i^k)^p}.$$

Ne segue che se  $(x_i^k)_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $(x_i^\infty)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $l^p$  allora

$$\sum_i |x_i^k - x_i^\infty|^p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

e

$$\sqrt[p-1]{(x_i^k)^p} \rightarrow \sqrt[p-1]{(x_i^\infty)^p}$$

e quindi

$$\sum_i |y_i^k - y_i^\infty|^q \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Scambiando  $p$  con  $q$  si dimostra che anche  $f^{-1}$  è continua.

**ESERCIZIO 1.37.** *Dimostrare che un quadrato e un cerchio nel piano sono omeomorfi, con la distanza indotta da  $\mathbb{R}^2$ . (suggerimento: considerare sia il quadrato che il cerchio centrati nell'origine di  $\mathbb{R}^2$  con l'usuale norma euclidea e poi mostrare che la funzione dal quadrato al cerchio data da  $f(x) = x/||x||$  è un omeomorfismo.)*

**ESERCIZIO 1.38.** *Dimostrare che un triangolo e un quadrato nel piano sono omeomorfi, con la distanza indotta da  $\mathbb{R}^2$ .*

**ESERCIZIO 1.39.** *Dimostrare che due poligoni qualsiasi nel piano sono omeomorfi, con la distanza indotta da  $\mathbb{R}^2$ .*

**Definizione 1.40.** *Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \delta)$  due spazi metrici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice immersione omotetica di fattore  $t > 0$  se per ogni  $a, b \in X$  si ha*

$$\delta(f(a), f(b)) = td(a, b).$$

Se  $t = 1$  si dice immersione isometrica.

Un'immersione omotetica suriettiva si dice omotetia. Un'immersione isometrica suriettiva si dice isometria.

**Teorema 1.41.** *Un'immersione omotetica è iniettiva. Un'omotetia è un omeomorfismo. (In particolare lo sono anche le isometrie).*

**DIMOSTRAZIONE.** Per l'iniettività, siccome  $t$  è non nullo si ha

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 0 = \delta(f(x), f(y)) = td(x, y) \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

In oltre se  $x_i \rightarrow x$  si ha

$$\delta(f(x_i), f(x)) = td(x_i, x) \rightarrow 0$$

quindi  $f(x_i) \rightarrow f(x)$  e quindi  $f$  è continua. Infine, se  $f$  è suriettiva allora è biunivoca ed  $f^{-1}$  è un'omotetia di fattore  $1/t$  e dunque è continua.  $\square$

**ESEMPIO 1.42.** *Sia  $X = [0, 2\pi)$  con la metrica standard e sia  $Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  munito della metrica angolare (o dei cammini). Sia  $f : X \rightarrow Y$  data da  $f(x) = e^{ix}$ .  $f$  è continua e biunivoca ma  $f^{-1}$  non è continua. Infatti se  $x_n = 2\pi - \frac{1}{n}$  si ha che  $z_n = f(x_n) \rightarrow 1$  ma  $f^{-1}(z_n) = x_n$  non tende a  $0 = f^{-1}(1)$ .*

Vedremo in seguito che  $[0, 2\pi)$  con la metrica standard non è omeomorfo a  $S^1$ .

ESEMPIO 1.43. Sia  $X = [0, 2\pi)$  con la metrica

$$d(x, y) = \inf\{|x - y|, |x| + |2\pi - y|, |y| + |2\pi - x|\}$$

e sia  $Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  munito della metrica angolare (o dei cammini). Sia  $f : X \rightarrow Y$  data da  $f(x) = e^{ix}$ .  $f$  è un'isometria infatti la metrica  $d$  è esattamente la metrica pull-back di quella dei cammini.

ESEMPIO 1.44. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $t > 0$  allora la funzione  $d_t$  definita da  $d_t(x, y) = td(x, y)$  è una distanza (esercizio: dimostrarlo). L'identità da  $(X, d)$  a  $(X, d_t)$  è un'omotetia di fattore  $t$ .

**Teorema 1.45.** Siano  $(X, \delta)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi metrici allora la funzione  $d$  su  $X \times Y$  definita da

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \delta(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2)$$

è una metrica.

DIMOSTRAZIONE. Siccome  $\delta$  e  $\sigma$  sono positive e simmetriche, anche  $d$  lo è. In oltre, se  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$  allora per positività  $\delta(x_1, x_2) = \sigma(y_1, y_2) = 0$  e quindi  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ , ossia  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ . Veniamo alla disuguaglianza triangolare.

$$\begin{aligned} d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= \delta(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2) \leq \delta(x_1, x_3) + \delta(x_3, x_2) + \sigma(y_1, y_3) + \sigma(y_3, y_2) = \\ &= d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

è una metrica. □

ESERCIZIO 1.46. Siano  $(X, \delta)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi metrici. Dimostrare che la funzione  $d$  su  $X \times Y$  definita da

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \sup\{\delta(x_1, x_2), \sigma(y_1, y_2)\}$$

è una metrica.

## 2. Aperti e chiusi in spazi metrici

**Definizione 2.1.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $x \in X$  e  $R > 0$ . La palla aperta di centro  $x$  e raggio  $R$  è l'insieme

$$B(x, R) = \{y \in X : d(x, y) < R\}$$

La palla chiusa di centro  $x$  e raggio  $R$  è l'insieme

$$\overline{B(x, R)} = \{y \in X : d(x, y) \leq R\}$$

ESERCIZIO 2.2. Disegnare le palle di centro zero e raggio uno in  $\mathbb{R}^2$  con le varie metriche  $L^p$ .



**ESEMPIO 2.3.** Sia  $X = \mathbb{R}^2$  con la metrica dei raggi infiniti. La palla di centro  $(2, 0)$  e raggio 3 è l'insieme

$$B_{Euclid}(0, 1) \cup \{(x, 0) : x \in [1, 5]\}$$

ove  $B_{Euclid}(0, 1)$  è la palla nella metrica euclidea standard.

**Definizione 2.4.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A \subset X$ .  $x \in A$  si dice interno ad  $A$  se

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A.$$

$A$  si dice **APERTO** se ogni punto di  $A$  è interno:

$$\forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A.$$

**ESEMPIO 2.5.** Le palle aperte sono aperte.

**ESEMPIO 2.6.** Il vuoto è aperto.

**ESEMPIO 2.7.** Il tutto è aperto.

**ESEMPIO 2.8.** Sia  $X = \mathbb{R}^2$  con la metrica dei raggi infiniti. L'insieme

$$A\{(x, 0) : x \in (1, 5)\}$$

è aperto, l'insieme

$$A\{(x, 0) : x \in (-1, 5)\}$$

non lo è (lo zero non è interno).

**Definizione 2.9.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $C \subset X$ .  $x \in C$  si dice di accumulazione per  $C$  se

$$\exists (x_i) \subseteq C : x_i \rightarrow x.$$

$C$  si dice chiuso contiene ogni suo punto di accumulazione di  $C$ :

$$(x_i \rightarrow x, x_i \in C) \Rightarrow x \in C.$$

**ESEMPIO 2.10.** Le palle chiuse sono chiuse.

**ESEMPIO 2.11.** Il vuoto è chiuso.

**ESEMPIO 2.12.** Il tutto è chiuso.

**ESEMPIO 2.13.** Sia  $X = \mathbb{R}^2$  con la metrica dei raggi infiniti. L'insieme

$$C = \overline{B_{Euclid}(0, 1)} \setminus \{(x, 0) : x \in (0, 1)\}$$

è chiuso, l'insieme

$$C = \overline{B_{Euclid}(0, 1)} \setminus \{(x, 0) : x \in (-1, 1)\}$$

non lo è (lo zero è un punto di accumulazione).

**Teorema 2.14.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $A \subseteq X$ .  $A$  è aperto se e solo se il complementare  $A^c$  è chiuso.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che  $A$  non è aperto se e solo se  $A^c$  non è chiuso. Se  $A$  non è aperto allora esiste  $x \in A$  che non è interno e quindi

$$\forall \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$$

in particolare scegliendo una successione  $\varepsilon_n = 1/n$  si trova che

$$\forall n \exists x_n \in B(x, 1/n) \cap A^c$$

dunque  $x_n \rightarrow x$ ,  $x_n \in A^c$  ma  $x \notin A^c$  (perché  $x \in A$ ) quindi  $A^c$  non è chiuso.

Viceversa, se  $A$  non è chiuso allora esiste  $x_i \in A^c$  con  $x_i \rightarrow x$  e  $x \notin A^c$ , dunque  $x \in A$  e per ogni  $\varepsilon > 0$   $x_i \in B(x, \varepsilon)$  eventualmente in  $i$  perché  $d(x_i, x) \rightarrow 0$ . Quindi  $x$  non è interno e  $A$  non è aperto.  $\square$

**Definizione 2.15** (Parte interna). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $A \subset X$ . La parte interna di  $A$  è l'insieme*

$$\text{Int}(A) = \overset{\circ}{A} = \{\text{punti interni di } A\} = \{x \in A : \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A\}.$$

**Definizione 2.16** (Chiusura). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $A \subset X$ . La chiusura di  $A$  è l'insieme  $\bar{A} = \{\text{punti di accumulazione di } A\} = \{x \in X : \exists x_i \in A : x_i \rightarrow x\}$*

**Teorema 2.17.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $A \subset X$ . Allora  $\text{Int}(A)$  è il più grande aperto contenuto in  $A$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Prima vediamo che  $\text{Int}(A)$  è aperto. Se  $x \in \text{Int}(A)$  allora  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subset A$ . Ne segue che per ogni  $y \in B(x, \varepsilon/2)$  si ha  $B(y, \varepsilon/2) \subset A$  dunque  $B(y, \varepsilon/2) \subset \text{Int}(A)$ . Quindi ogni  $x \in \text{Int}(A)$  è interno ad  $\text{Int}(A)$ . Quindi  $\text{Int}(A)$  è aperto.

Sia ora  $B \subset A$  aperto e sia  $x \in B$ . Siccome  $B$  è aperto  $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset B$  ma siccome  $B \subset A$  allora  $B(x, \varepsilon) \subset A$  e dunque  $x \in \text{Int}(A)$ . Quindi  $B \subset \text{Int}(A)$ .  $\square$

**Teorema 2.18.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $A \subset X$ . Allora  $\bar{A}$  è il più piccolo chiuso contenente  $A$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Prima vediamo che  $\bar{A}$  è chiuso. Sia  $x_i \rightarrow x$  con  $x_i \in \bar{A}$ . Siccome  $x_i \in \bar{A}$  per ogni  $i$  esiste  $y_i^k \in A$  tale che

$$y_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_i.$$

Usiamo un argomento diagonale. Scegliamo  $\varepsilon_n = 1/n$ . Per ogni  $n$  scegliamo  $z_n = y_n^{k_n}$  tale che  $d(y_n^{k_n}, x_n) < 1/n$ . Abbiamo  $d(z_n, x) \leq d(z_n, x_n) + d(x_n, x) < 1/n + d(x_n, x) \rightarrow 0$  quindi  $z_n \rightarrow x$ . Siccome  $z_n \in A$  si ha  $x \in \bar{A}$  e dunque  $\bar{A}$  è chiuso.

Sia ora  $B \supset A$  chiuso e sia  $x \in \bar{A}$ . Per definizione esiste  $x_i \in A$  con  $x_i \rightarrow x$ . Siccome  $B \supset A$  allora  $x_i \in B$  e siccome  $B$  è chiuso allora  $x \in B$ . Dunque  $\bar{A} \subset B$ .  $\square$

**Corollario 2.19.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $A \subset X$ . Allora  $A$  è aperto se e solo se  $A = \text{Int}(A)$ ,  $A$  è chiuso se e solo se  $A = \bar{A}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Segue immediatamente dai teoremi precedenti.  $\square$

**Teorema 2.20.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A \subset X$ . Allora*

$$\bar{A} = (\text{Int}(A^c))^c \quad \text{Int}(A) = (\bar{A}^c)^c.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la prima affermazione:

- (1)  $(\text{Int}(A^c))^c$  è chiuso in quanto il suo complementare è  $\text{Int}(A^c)$  che è aperto.
- (2)  $(\text{Int}(A^c))^c$  contiene  $A$ . Infatti  $A^c \supseteq \text{Int}(A^c)$  per definizione e passando ai complementari si ottiene  $A \subset (\text{Int}(A^c))^c$ .
- (3)  $(\text{Int}(A^c))^c$  è contenuto in ogni chiuso  $B$  contenente  $A$ , infatti se  $B \supseteq A$  allora  $B^c \subseteq A^c$ , in oltre  $B^c$  è aperto e quindi  $B^c = \text{Int}(B^c) \subseteq \text{Int}(A^c)$  e passando ai complementari  $B = (B^c)^c \supseteq (\text{Int}(A^c))^c$ .

Ne segue che  $(\text{Int}(A^c))^c = \bar{A}$ . La seconda affermazione segue dalla prima applicata ad  $A^c$ :

$$\overline{A^c} = (\text{Int}((A^c)^c))^c = (\text{Int}(A))^c \quad \Rightarrow \quad (\overline{A^c})^c = \text{Int}(A).$$

□

**Definizione 2.21.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A \subset X$ . La frontiera di  $A$  in  $X$  è definita come

$$\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

**Teorema 2.22.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A \subset X$ . Allora

$$\partial A = \partial A^c$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c$$

Per il teorema precedente  $\bar{A} = (\text{Int}(A^c))^c$  quindi

$$\partial A = (\text{Int}(A^c))^c \cap \text{Int}(A)^c = (\text{Int}(A) \cup \text{Int}(A^c))^c$$

Applicando lo stesso ragionamento ad  $A^c$  si ottiene

$$\partial A^c = (\text{Int}(A^c) \cup \text{Int}(A))^c$$

e quindi i due insiemi coincidono. □

**ESERCIZIO 2.23.** Dimostrare che  $\partial A$  è un chiuso.

**Teorema 2.24.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A_i, i \in I$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ :

- Se gli  $A_i$  sono aperti allora  $\cup_i A_i$  è aperto;
- Se gli  $A_i$  sono aperti e  $I$  è finito allora  $\cap_i A_i$  è aperto;
- Se gli  $A_i$  sono chiusi allora  $\cap_i A_i$  è chiuso;
- Se gli  $A_i$  sono chiusi e  $I$  è finito allora  $\cup_i A_i$  è chiuso;

In altre parole: Unione qualsiasi di aperti è aperta, intersezione finita di aperti è aperta; intersezione qualsiasi di chiusi è chiusa, unione finita di chiusi è chiusa.

DIMOSTRAZIONE. Le seconde due affermazioni discendono immediatamente dalle prime due passando ai complementari. Vediamo la prima. Dobbiamo far vedere che ogni punto di  $\cup_i A_i$  è interno. Sia  $x \in \cup_i A_i$  allora esiste  $j \in I$  tale che  $x \in A_j$ . Siccome  $A_j$  è aperto esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subset A_j$  ma siccome  $A_j \subset \cup_i A_i$  si ha  $B(x, \varepsilon) \subset \cup_i A_i$  e dunque  $x$  è interno a  $\cup_i A_i$ .

Passiamo alla seconda affermazione. Dobbiamo far vedere che ogni punto di  $\cap_i A_i$  è interno. Sia  $x \in \cap_i A_i$  allora  $x \in A_i$  per ogni  $i$ . Siccome  $A_i$  è aperto esiste  $\varepsilon_i > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon_i) \subset A_i$ . Sia  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\}$  siccome  $I$  è finito  $\varepsilon > 0$ . Siccome  $\varepsilon \leq \varepsilon_i$  per ogni  $i$ , si ha  $B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i) \subset A_i$  per ogni  $i$  e dunque  $B(x, \varepsilon) \subset \cap_i A_i$ . Quindi  $x$  è interno a  $\cap_i A_i$ .  $\square$

**Corollario 2.25.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Per ogni  $x \in X$  l'insieme  $\{x\}$  è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni  $\varepsilon > 0$  la palla chiusa  $\overline{B(x, \varepsilon)}$  è chiusa e

$$\{x\} = \cap_{\varepsilon} \overline{B(x, \varepsilon)}.$$

$\square$

**Corollario 2.26.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A \subset X$ . Allora  $\text{Int}(A)$  è l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $A$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $B$  l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $A$ . Chiaramente  $B \subset A$ . In oltre se  $C$  è un aperto contenuto in  $A$  per definizione  $C \subset B$ .  $\square$

ESERCIZIO 2.27. *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A \subset X$ . Sia  $A$  aperto. Quindi ogni  $x$  è interno ad  $A$ . Per ogni  $x$  sia  $\varepsilon_x > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ . Dimostrare che  $A = \cup_{x \in A} B(x, \varepsilon_x)$ .*

#### LE NOZIONI DI ESSERE APERTO/CHIUSO SONO RELATIVE.

**Teorema 2.28.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico sia  $Y \subset X$  con la metrica indotta. Sia  $A \subset Y$ . Allora  $A$  è aperto in  $Y$  se e solo se esiste un aperto  $B$  di  $X$  tale che  $A = B \cap Y$ .*

DIMOSTRAZIONE. Innanzi tutto vediamo che le palle di  $Y$  sono le palle di  $X$  intersecate con  $Y$ :

$$B_Y(x, R) = \{y \in Y : d(y, x) < R\} = \{z \in X : d(z, x) < R\} \cap Y = B_X(x, R) \cap Y.$$

Se  $B$  è aperto in  $X$  e  $A = B \cap Y$  allora per ogni  $x \in A$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale  $B_X(x, \varepsilon) \subset B$  dunque  $B_Y(x, \varepsilon) = B_X(x, \varepsilon) \cap Y \subseteq B \cap Y = A$  e dunque ogni  $x$  di  $A$  è interno ad  $A$ . Viceversa se  $A \subseteq Y$  è aperto in  $Y$  per ogni  $x \in A$  esiste  $\varepsilon_x > 0$  tale che  $B_Y(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ . Ponendo

$$B = \cup_{x \in A} B_X(x, \varepsilon_x)$$

si ha che  $B$  è aperto in  $X$  e

$$B \cap Y = (\cup_{x \in A} B_X(x, \varepsilon_x)) \cap Y = \cup_{x \in A} B_Y(x, \varepsilon_x) = A.$$

$\square$

**Teorema 2.29.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico sia  $Y \subset X$  con la metrica indotta. Sia  $A \subset Y$ . Allora  $A$  è chiuso in  $Y$  se e solo se esiste un chiuso  $B$  di  $X$  tale che  $A = B \cap Y$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $A$  è chiuso il suo complementare è aperto. Il complementare di  $A$  in  $Y$  è  $Y \setminus A = Y \cap A^c$ , ove  $A^c$  denota il complementare di  $A$  in  $X$ . Per il teorema precedente esiste un aperto  $B$  di  $X$  tale che  $Y \cap A^c = B \cap Y$ . Passando ai complementari,  $A \cup Y^c = B^c \cup Y^c$ . Intersecando con  $Y$  e tenendo conto che  $A \subset Y$  si ottiene  $A = (A \cup Y^c) \cap Y = (B^c \cup Y^c) \cap Y = B^c \cap Y$  cioè  $A = B^c \cap Y$  con  $B^c$  chiuso perché  $B$  è aperto.

Viceversa, se  $A = B^c \cap Y$  con  $B$  aperto, allora seguendo a ritroso gli stessi passaggi si ottiene che  $Y \setminus A$  è chiuso in  $Y$ .  $\square$

**ESEMPIO 2.30.** Sia  $X = [0, 1) \in \mathbb{R}$  con la metrica standard.  $X$  non è aperto perché  $0$  non è interno.  $X$  non è chiuso perché  $1$  è un punto di accumulazione di  $X$  che non sta in  $X$ .  $\bar{X} = [0, 1]$ ,  $\text{Int}([0, 1)) = (0, 1)$ ,  $\partial([0, 1)) = \{0, 1\}$ .

**ESERCIZIO 2.31.** Sia  $X \in \mathbb{R}^2$  il grafico di  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \sin(1/x)$ . Dire se  $X$  sia aperto o chiuso, determinare  $\bar{X}$ ,  $\dot{X}$  e  $\partial X$ .

**ESEMPIO 2.32.** Sia  $X = \mathbb{R}^2$  con la metrica dei raggi infiniti. Sia

$$A = \{(x, 0) : x \in (1, 2)\}$$

$A$  è aperto in  $X$  e non è chiuso in  $X$ . (Esercizio: perché?)

**ESEMPIO 2.33.** Sia  $X = \mathbb{R}^2$  con la metrica standard. Sia

$$A = \{(x, 0) : x \in (1, 2)\}$$

$A$  non è né aperto né chiuso in  $X$ . (Esercizio: perché?)

**ESEMPIO 2.34.** In  $\mathbb{R}^2$  con la metrica standard sia  $X$  la striscia verticale  $X = (1, 2) \times \mathbb{R}$ . Sia

$$A = \{(x, 0) : x \in (1, 2)\}$$

$A$  è chiuso in  $X$  ma non è aperto in  $X$ . (Esercizio: perché?)

**ESEMPIO 2.35.** In  $\mathbb{R}^2$  con la metrica standard sia  $X$  l'insieme  $X = (1, 2) \times \mathbb{Z}$ . Sia

$$A = \{(x, 0) : x \in (1, 2)\}$$

$A$  è aperto e chiuso in  $X$ . (Esercizio: perché?)

**ESEMPIO 2.36.**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  standard non è né aperto né chiuso,  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ,  $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ .

**Definizione 2.37** (Insiemi densi). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A \subset X$ .  $A$  si dice denso in  $X$  se

$$\bar{A} = X.$$

**ESEMPIO 2.38.**  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ .

**ESEMPIO 2.39.**  $A$  è denso in  $\bar{A}$ .

**ESEMPIO 2.40.** L'insieme  $\mathbb{Q}$  è numerabile. Sia  $q_1, q_2, \dots$  una sua numerazione. L'insieme dei razionali cioccioni è definito come

$$\cup_{i \in \mathbb{N}} B(q_i, \frac{1}{2^i})$$

Tale insieme è un sottoinsieme aperto e denso in  $\mathbb{R}$ .

ESERCIZIO 2.41 (non banale). *Dimostrare che i razionali ciccioni non sono tutto  $\mathbb{R}$ .*

ESERCIZIO 2.42. *Sia  $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ . Si calcoli la chiusura di  $X$  e la sua frontiera.*

ESERCIZIO 2.43. *Sia  $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset (0, \infty)$ . Si calcoli la chiusura di  $X$  e la sua frontiera.*

ESEMPIO 2.44 (L'insieme di Cantor). *L'insieme di Cantor è un sottoinsieme di  $[0, 1]$  definito ricorsivamente come segue: Si divide l'intervallo in tre parti uguali e si comincia col togliere la parte interna del terzo centrale. Ad ogni passo si divide ogni intervallo superstite in tre e si toglie l'interno del terzo centrale: Tale insieme è chiuso perché il suo*



FIGURA 2. L'insieme di Cantor

*complementare è aperto essendo formato dall'unione degli intervallini aperti rimossi. Lo si può anche descrivere come l'insieme dei numeri decimali in  $[0, 1]$  che si possono scrivere in base 3 senza usare il simbolo 1 (si noti che  $1/3 = 0,1$  ma anche  $0,022222222222222\dots$ ).*

ESEMPIO 2.45 (Tappeto di Sierpinski). *Il tappeto di Sierpinski è un sottoinsieme di  $[0, 1] \times [0, 1]$  definito ricorsivamente, tipo il Cantor, come segue: Si divide il quadrato in nove quadratini uguali e si comincia col togliere la parte interna del quadratino centrale. Ad ogni passo si divide ogni quadrato superstite in nove e si toglie l'interno del quadratino centrale: Come il Cantor, il Sierpinski è chiuso perché il complementare è aperto essendo*

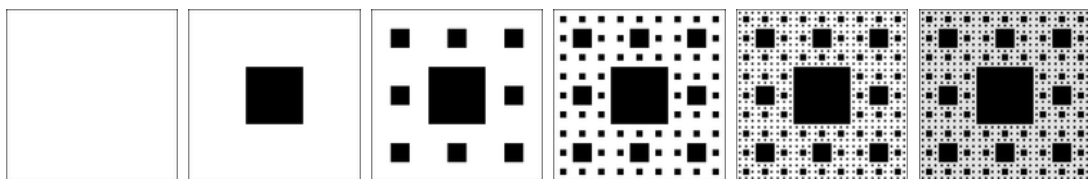


FIGURA 3. Il tappeto di Sierpinski (immagini prese da Wikipedia). La parte nera è il complementare.

*unione di aperti.*

### 3. Successioni di cauchy e completezza

**Definizione 3.1** (Successione di Cauchy). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Una successione  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $X$  si dice di cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall m, n > n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

ESEMPIO 3.2. *La successione  $x_n = 1/n$  è di cauchy perché  $x_n - x_m = (m-n)/nm \rightarrow 0$ .*

ESEMPIO 3.3. *La successione  $x_n = (-1)^n$  non è di cauchy perché  $d(x_n, x_{n+2}) = 2 \not\rightarrow 0$ .*

ESERCIZIO 3.4. *La successione  $x_n = (1, 1/n)$  è di cauchy in  $\mathbb{R}^2$  standard? E in  $\mathbb{R}^2$  con la metrica dei raggi infiniti?*

ESERCIZIO 3.5. *La successione  $x_n = e^{in}$  è di cauchy in  $\mathbb{C}$ ? E la successione  $y_n = e^{in}/n$ ?*

**Teorema 3.6.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $(x_i)$  una successione convergente a un punto  $x \in X$ . Allora  $(x_i)$  è di cauchy.*

DIMOSTRAZIONE. Per la disuguaglianza triangolare

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, x_j) \rightarrow 0.$$

□

**Teorema 3.7.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $(x_i)$  una successione di cauchy avente una sottosuccessione convergente a un punto  $x \in X$ . Allora  $(x_i)$  converge a  $x$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $x_{i_n} \rightarrow x$  la sotto successione convergente. Per la disuguaglianza triangolare

$$d(x_i, x) \leq d(x_i, x_{i_n}) + d(x_{i_n}, x)$$

il primo addendo va a zero per  $i, i_n \rightarrow \infty$  perché la successione è di cauchy, il secondo va a zero perché  $x_{i_n} \rightarrow x$ . □

**Teorema 3.8.** *Ogni successione di cauchy in  $\mathbb{R}$  converge.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $x_i \in \mathbb{R}$ . Siccome la successione è di cauchy in particolare esiste  $n_0$  tale che per ogni  $n, m \geq n_0$  si ha  $d(x_m, x_n) < 1$ . Quindi  $d(x_n, x_{n_0}) < 1$  definitivamente e la successione è limitata. Per ogni  $k$  vi è un elemento di  $x_{i_k}$  con  $i_k \geq k$  che dista meno di  $1/k$  da  $\sup\{x_n : n \geq k\}$ . La successione di elementi  $x_{i_k}$  è infinita al variare di  $k$  perché  $i_k \geq k$ . Siccome  $y_k = \sup\{x_n : n \geq k\}$  è monotona non crescente in  $k$  essa ha un limite,  $x$  che si chiama limite superiore di  $(x_i)$

$$x = \limsup x_i = \inf_k \{\sup\{x_n : n \geq k\}\}$$

Per costruzione

$$|x_{i_k} - x| \leq |x_{i_k} - y_k| + |y_k - x| \leq \frac{1}{k} + |y_k - x| \rightarrow 0$$

Quindi  $(x_i)$  ha una sottosuccessione convergente. Per il teorema precedente  $(x_i)$  converge a  $x$ . □

**Lemma 3.9** (Lemma del quadrato). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e siano  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$  allora*

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

DIMOSTRAZIONE. Per la disuguaglianza triangolare

$$d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) + d(y_2, y_1) \quad d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2) \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

$$d(x_2, y_2) \leq d(x_2, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) \quad d(x_2, y_2) - d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

ergo

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2).$$

□

**Corollario 3.10.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e siano  $(x_i)$  e  $(y_i)$  due successioni di cauchy in  $X$ . Allora esiste il limite*

$$\lim_i d(x_i, y_i).$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome sono entrambe successioni di cauchy, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $m, n > n_\varepsilon$  si ha

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \quad d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$$

Per il lemma del quadrato

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq \varepsilon$$

Quindi la successione  $d_n = d(x_n, y_n)$  è di cauchy in  $\mathbb{R}$  e quindi converge. □

**Definizione 3.11.** *Uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice completo se ogni successione di cauchy in  $X$  è convergente.*

ESEMPIO 3.12.  $\mathbb{R}$  è completo.  $\mathbb{Q}$  no.

ESEMPIO 3.13.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  con la metrica standard non è completo.

ESERCIZIO 3.14.  $\mathbb{R}^2$  con la metrica dei raggi infiniti è completo?

In pratica l'unico modo per avere spazi non completi è partire da uno spazio completo e togliere roba. In altre parole ogni spazio metrico si può completare. Il bello è che il completamento metrico è unico (a meno di isometrie):

**Teorema 3.15.** *Sia  $X$  un'insieme e  $Y$  uno spazio metrico completo. Allora spazio  $Y^X$  delle funzioni da  $X$  a  $Y$  con la metrica del sup*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

*è completo.*



**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f_n$  una successione di Cauchy in  $Y^X$ . Facciamo vedere che ha un limite. Per ogni  $x \in X$  la successione  $f_n(x)$  è di cauchy perché

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \sup_{x \in X} d(f_n(x), f_m(x)) = d_\infty(f_n, f_m).$$

Siccome  $Y$  è completo esiste un punto  $f_\infty(x)$  tale che  $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ . Chiaramente  $f_\infty$  è una funzione da  $X$  a  $Y$ . In oltre per ogni  $x \in X$  e per ogni  $m, n \in \mathbb{N}$

$$d(f_n(x), f_\infty(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_\infty(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m) + d(f_m(x), f_\infty(x))$$

e considerando il limite per  $m \rightarrow \infty$  si ottiene che per ogni  $x \in X$  e  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$d(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(f_n, f_m)$$

per cui

$$d_\infty(f_\infty, f_n) = \sup_{x \in X} d(f_\infty(x), f_n(x)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(f_n, f_m)$$

che tende a zero se  $n \rightarrow \infty$  perché la successione  $f_n$  è di Cauchy. Quindi  $f_n \rightarrow f_\infty$  in  $(Y^X, d_\infty)$ .  $\square$

**Teorema 3.16** (Completamento metrico). *Per ogni spazio metrico  $(X, d)$  esiste uno spazio metrico completo  $(Y, \delta)$  tale che*

- (1) *esiste un'immersione isometrica  $f : X \rightarrow Y$ ;*
- (2) *l'immagine di  $f$  è densa in  $Y$ .*

*In oltre, se  $Z$  è uno spazio metrico completo con le due proprietà elencate allora  $Z$  è isometrico a  $(Y, \delta)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'idea della dimostrazione è molto semplice:  $Y$  è lo spazio di tutte le successioni di cauchy di  $X$ , dotato di un'opportuna metrica. I dettagli richiedono notazioni un po' pesanti.

Definiamo  $S$  come l'insieme di tutte le successioni di cauchy di  $X$ . Su  $S \times S$  definiamo la seguente funzione

$$D((x_i), (y_i)) = \lim_i d(x_i, y_i)$$

(che è ben definito per il corollario precedente.) La funzione  $D$  gode delle seguenti proprietà:

- $D \geq 0$ ;
- $D((x_i), (y_i)) = D((y_i), (x_i))$ ;
- $D((x_i), (y_i)) \leq D((x_i), (z_i)) + D((z_i), (y_i))$  perchè la disuguaglianza triangolare  $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)$  è vera per ogni  $i$  e passa al limite.

Appena  $X$  contiene almeno due punti però  $D$  non ha la proprietà delle distanze  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ . Infatti data  $(x_i)$  basta cambiargli il primo termine ed otteniamo una successione diversa ma a distanza  $D$  nulla da essa .

Poniamo su  $S$  la relazione di equivalenza  $(x_i) \sim (y_i)$  se  $D((x_i), (y_i)) = 0$ . Si vede facilmente, attraverso la disuguaglianza triangolare che  $D$  induce una funzione, che chiameremo sempre  $D$ , sulle classi di equivalenza.

ESERCIZIO 3.17. Dimostrare che se  $(x_i) \sim (x'_i)$  e  $(y_i) \sim (y'_i)$  allora  $D((x_i), (y_i)) = D((x'_i), (y'_i))$ .

Definiamo

$$Y = S / \sim$$

A questo punto  $(Y, D)$  è uno spazio metrico.

**Lemma 3.18.**  $(Y, D)$  è completo.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $(S_i)$  una successione di cauchy in  $Y$ . Poniamo  $S_i = [(x_n^i)]$ .

$$\begin{array}{lcccccc} S_1 : & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \dots & x_n^1 & \dots \\ S_2 : & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 & \dots \\ & & & \vdots & & & \\ S_k : & x_1^k & x_2^k & x_3^k & \dots & x_n^k & \dots \end{array}$$

Siccome  $(S_i)$  è di cauchy in  $Y$

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) : \forall i, j > n(\varepsilon) \quad D(S_i, S_j) < \varepsilon$ .

Siccome ogni  $(x_n^i)$  è di cauchy in  $X$

- $\forall \varepsilon > 0 \forall i \exists l(i, \varepsilon) : \forall m, n > l(i, \varepsilon) \quad d(x_n^i, x_m^i) < \varepsilon$ .

In oltre, dalla definizione di  $D(S_i, S_j)$  segue che per ogni  $i, j$  e per ogni  $\varepsilon$   $|d(x_n^i, x_n^j) - D(S_i, S_j)| < \varepsilon$  per  $n$  sufficientemente grande e possiamo richiedere che  $n$  sia sufficientemente grande per i primi  $k$  casi considerati tutti insieme:

- $\forall \varepsilon > 0 \forall k \exists m(k, \varepsilon) : \forall i, j \leq k, \forall m > m(k, \varepsilon) \quad |d(x_m^i, x_m^j) - D(S_i, S_j)| < \varepsilon$ .

Adesso usiamo un argomento diagonale. Scegliamo una successione  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  per esempio  $\varepsilon_i = 1/2^i$ . E scegliamo  $n_i$  in modo che

- $n_{i+1} > n_i$
- $n_i > l(i, \varepsilon_i)$
- $n_i > m(i, \varepsilon_i)$
- $n_i > i$

e definiamo la successione  $(y_j)$  ponendo

$$y_j = x_{n_j}^j.$$

Dobbiamo far vedere che  $(y_j)$  è di cauchy in  $X$  e che  $S_i \rightarrow [(y_j)]$  in  $Y$ . Vediamo che  $(y_j)$  è di cauchy. Per ogni  $\varepsilon > 0$  se  $i, j$  sono sufficientemente grandi  $\varepsilon - \varepsilon_i - \varepsilon_j > 0$ . Se inoltre  $j \geq i > n(\varepsilon - \varepsilon_i - \varepsilon_j)$  si ha (per la dis. triang.)

$$d(y_i, y_j) = d(x_{n_i}^i, x_{n_j}^j) \leq d(x_{n_i}^i, x_{n_j}^i) + d(x_{n_j}^i, x_{n_j}^j)$$

siccome  $n_j > n_i > l(i, \varepsilon_i)$  si ha

$$d(x_{n_i}^i, x_{n_j}^i) \leq \varepsilon_i$$

e siccome  $n_j > m(j, \varepsilon_j)$  si ha

$$d(x_{n_j}^i, x_{n_j}^j) \leq D(S_i, S_j) + \varepsilon_j$$

Siccome  $i, j > n(\varepsilon - \varepsilon_i - \varepsilon_j)$  si ha

$$d(y_i, y_j) < \varepsilon.$$

Quindi  $(y_j)$  è di cauchy in  $X$ . Vediamo adesso che  $S_i \rightarrow [(y_j)]$  in  $Y$ . Per definizione

$$D(S_i, [(y_j)]) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j^i, y_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j^i, x_{n_j}^j)$$

$$d(x_j^i, x_{n_j}^j) \leq d(x_j^i, x_{n_j}^i) + d(x_{n_j}^i, x_{n_j}^j)$$

per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $i$  si ha che  $j > l(i, \varepsilon)$  definitivamente e quindi (siccome  $n_j > j$ )

$$d(x_j^i, x_{n_j}^i) < \varepsilon.$$

Definitivamente  $j > i$  e siccome  $n_j > m(j, \varepsilon_j)$  si ha

$$d(x_{n_j}^i, x_{n_j}^j) < D(S_i, S_j) + \varepsilon_j$$

Se  $i > n(\varepsilon)$ , siccome definitivamente  $j > i$  si ha  $D(S_i, S_j) < \varepsilon$  e dunque per ogni  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} D(S_i, [(y_j)]) &\leq \lim_j (d(x_j^i, x_{n_j}^i) + d(x_{n_j}^i, x_{n_j}^j)) \leq \lim_j d(x_j^i, x_{n_j}^i) + \lim_j d(x_{n_j}^i, x_{n_j}^j) \\ &\leq \varepsilon + \lim_j (\varepsilon + \varepsilon_j) = 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

La parte difficile è finita. Adesso che sappiamo che  $Y$  è completo vediamo l'immersione isometrica di  $f : X \rightarrow Y$ . Basta porre  $f(x) = \hat{x}$  ove  $\hat{x}$  è la classe della successione costante  $x, x, x, x, \dots$

Chiaramente  $D(\hat{x}, \hat{y}) = d(x, y)$  e quindi  $f$  è un'immersione isometrica. L'immagine di  $f$  è densa perchè se  $S = [(x_i)] \in Y$  allora

$$\hat{x}_i \rightarrow S$$

in quanto siccome  $(x_i)$  è di cauchy

$$D(\hat{x}_j, (x_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_j, x_i) \text{ che va a } 0 \text{ per } j \rightarrow \infty.$$

Infine sia  $(Z, h)$  uno spazio metrico tale che esiste  $g : X \rightarrow Z$  immersione isometrica con immagine densa. Allora per ogni successione  $(x_i)$  di cauchy in  $X$ ,  $(g(x_i))$  è una successione di cauchy in  $Z$ . Poniamo

$$F : Y \rightarrow Z \quad F([(x_i)]) = \lim g(x_i)$$

**ESERCIZIO 3.19.** *Dimostrare che  $F$  è ben definita sulle classi di equivalenza, cioè che se  $(x_i) \sim (x'_i)$  allora  $\lim g(x_i) = \lim g(x'_i)$ . (Si usa che  $g$  è immersione isometrica.)*

**ESERCIZIO 3.20.** *Dimostrare che  $F$  è un'immersione isometrica. (Si usa la definizione di  $D$  e il fatto che  $g$  sia isometrica.)*

**ESERCIZIO 3.21.** *Dimostrare che  $F$  è suriettiva. (Si usa il fatto che  $g$  abbia immagine densa e che le successioni convergenti sono di cauchy.)*

Questi tre esercizi concludono in quanto le immersioni isometriche suriettive sono isometrie. □

**Teorema 3.22.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo. Sia  $A \subset X$  chiuso. Allora  $A$  è completo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(a_i)$  una successione di cauchy in  $A$ . Ovviamente è di cauchy anche in  $X$ . Siccome  $X$  è completo, esiste  $x \in X$  tale che  $a_i \rightarrow x$ , siccome  $A$  è chiuso  $x \in A$ . Dunque ogni successione di cauchy in  $A$  è convergente.  $\square$

**ESEMPIO 3.23.** *Il Kantor e il Sierpinski, con le metriche indotte da  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^2$  rispettivamente, sono completi.*

**Corollario 3.24.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo. Sia  $A \subset X$ . Allora il completamento metrico di  $A$  è la chiusura di  $A$  in  $X$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema precedente  $\bar{A}$  è completo e  $A$  è denso in  $\bar{A}$  per definizione.  $\square$

L'inclusione è un caso particolare di immersione isometrica.

**Corollario 3.25.** *Sia  $A$  uno spazio metrico tale che esista uno spazio metrico completo  $X$  e un'immersione isometrica  $f : A \rightarrow X$ . Allora il completamento metrico di  $A$  è la chiusura dell'immagine di  $f$  in  $X$ .*

**DIMOSTRAZIONE.**  $\overline{\text{Imm}(f)}$  è completo e  $\text{Imm}(f)$  è denso in esso per definizione.  $\square$

**ESEMPIO 3.26.** *Sia  $X = \mathbb{R}$  con la metrica  $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ . Il completamento metrico di  $X$  è  $[-\pi/2, \pi/2]$  in quanto  $\arctan : X \rightarrow \mathbb{R}$  è un'immersione isometrica con immagine  $(-\pi/2, \pi/2)$ .*

**ESEMPIO 3.27.** *Sia  $X = \mathbb{R}$  con la metrica  $d(x, y) = |(e^{i \arctan x})^2 - (e^{i \arctan y})^2|$ . Il completamento metrico di  $X$  è  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  in quanto  $f(x) = e^{2i \arctan x}$  è un'immersione isometrica da  $X$  in  $\mathbb{C}$  la cui immagine è  $S^1 \setminus \{-1\}$ .  $S^1 = \partial B(0, 1)$  è un chiuso.*

**ESERCIZIO 3.28.** *Trovare i completamenti metrici di  $\mathbb{R}$  con le due metriche di cui sopra, senza usare i teoremi sui sottinsiemi di spazi completi, usando direttamente la costruzione delle successioni di cauchy.*

**Teorema 3.29** (Delle contrazioni). *Ogni contrazione di uno spazio metrico non vuoto ha un unico punto fisso. Cioè: Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo non vuoto. Sia  $f : X \rightarrow X$  una contrazione, ossia una funzione tale che esiste  $c < 1$  tale che per ogni  $x, y \in X$  si ha*

$$d(f(x), f(y)) < cd(x, y)$$

Allora esiste un unico  $z \in X$  tale che  $f(z) = z$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x_0 \in X$  un punto qualsiasi. La successione  $f(x_0)^k$  è di cauchy in quanto

$$\begin{aligned} d(x_0, f^k(x_0)) &\leq d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f^2(x_0)) + \cdots + d(f^{k-1}(x_0), f^k(x_0)) \\ &\leq d(x_0, f(x_0)) \left( \sum_m c^m \right) = d(x_0, f(x_0)) \frac{1}{1-c} \end{aligned}$$

e dunque

$d(x_n, x_{n+m}) = d(f(x_{n-1}), f(x_{n-1+m})) \leq cd(x_{n-1}, x_{n-1-m}) \leq \dots \leq c^n d(x_0, f^m(x_0)) \rightarrow 0$   
perché  $c^n \rightarrow 0$  e  $d(x_0, f^m(x_0)) \leq d(x_0, f(x_0)) \frac{1}{1-c}$  è limitato. Quindi esiste  $z \in X$  tale che  $f^k(x_0) \rightarrow z$ . Se  $w$  è un altro punto fisso si ha

$$d(z, w) = d(f(z), f(w)) < cd(z, w)$$

siccome  $c < 1$  cioè implica  $d(z, w) = 0$  ergo  $z = w$ .  $\square$

#### 4. Continuità in spazi metrici reloaded

**Teorema 4.1.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $(x_i)$  una successione in  $X$ .  $x_i \rightarrow x \in X$  se e solo se per ogni aperto  $A$  contenente  $x$  si ha che  $x_i \in A$  definitivamente in  $i$  ( $\exists n : \forall i > n, x_i \in A$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $A$  è aperto in  $X$  con  $x \in A$  allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ . Se  $x_i \rightarrow x$  allora definitivamente in  $i$  si ha  $d(x_i, x) < \varepsilon$  e quindi  $x_i \in A$ . Viceversa se esiste  $A$  tale che  $x_i$  sta frequentemente fuori da  $A$  allora  $x_i$  sta frequentemente fuori da  $B(x, \varepsilon)$  e quindi  $d(x_i, x) > \varepsilon$  frequentemente e dunque  $x_i$  non converge a  $x$ .  $\square$

Si noti che una successione si può interpretare come un'applicazione da  $\{1/n\} \cup \{0\}$  in  $X$  ponendo  $f(1/n) = x_n$  e  $f(0) = x$ . Chiaramente  $x_i \rightarrow x$  se e solo se  $f$  è continua. Il caso delle successioni è un caso particolare di un teorema generale.

**Teorema 4.2.** *Siano  $X, Y$  due spazi metrici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua se e solo se per ogni aperto  $A$  di  $Y$  si ha che  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $f^{-1}(A)$  sia aperto per ogni aperto  $A$ . Sia  $x_i \rightarrow x$  in  $X$ . Per ogni  $n$   $B(f(x), 1/n)$  è aperta in  $Y$  e quindi  $f^{-1}(B(f(x), 1/n))$  è aperta in  $X$ . Siccome  $x_i \rightarrow x$ , per il teorema precedente si ha che definitivamente  $x_i \in f^{-1}(B(f(x), 1/n))$  e quindi  $f(x_i) \in B(f(x), 1/n)$  ossia  $d_Y(f(x_i), f(x)) \rightarrow 0$  cioè  $f(x_i) \rightarrow f(x)$ . Quindi  $f$  è continua.

Viceversa, supponiamo che esista un aperto  $A$  in  $Y$  tale che  $B = f^{-1}(A)$  non sia aperto in  $X$ . Esisterà quindi  $x \in B$  (e quindi  $f(x) \in A$ ) e  $x_i \in B^c$  (e quindi  $f(x_i) \notin A$ ) tale che  $x_i \rightarrow x$ . Siccome  $A$  è aperto esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B(f(x), \varepsilon) \subseteq A$ . Siccome  $f(x_i) \notin A$  si ha  $d_Y(f(x_i), f(x)) \geq \varepsilon$  e quindi  $f(x_i)$  non converge a  $f(x)$ . Dunque  $f$  non è continua.  $\square$

**Corollario 4.3.** *Siano  $X, Y$  due spazi metrici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua se e solo se per ogni chiuso  $A$  di  $Y$  si ha che  $f^{-1}(A)$  è chiuso in  $X$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Segue immediatamente dal fatto che  $f^{-1}(A)$  e  $A$  sono chiusi se e solo se i loro complementari sono aperti e

$$(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c).$$

$\square$

**ESEMPIO 4.4.** *In  $\mathbb{R}^2$  l'insieme  $A = \{(x, y) : y > x \sin(1/x)\}$  è aperto ( $x \sin 1/x$  si estende a zero in zero con continuità). Infatti la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $F(x, y) = y - x \sin 1/x$  è continua e  $X = F^{-1}(0, \infty)$ .*

ESEMPIO 4.5. *In generale se  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, gli insiemi di livelli  $F^{-1}((a, b))$  sono aperti e quelli del tipo  $F^{-1}([a, b])$  sono chiusi. In particolare  $F^{-1}((a, \infty))$  è aperto e  $F^{-1}(a)$  è chiuso.*

ESEMPIO 4.6. *In  $\mathbb{R}^2$  gli insiemi  $\{xy > 1\}$ ,  $\{x^2 - y^2 > -2\}$ ,  $\{3x^2 + 5y^2 < 2\}$ , e robe simili son tutti aperti. Gli insiemi del tipo  $\{xy = 1\}$ ,  $\{x^2 - y^2 = -2\}$ ,  $\{3x^2 + 5y^2 \leq 2\}$ , e robe simili son tutti chiusi.*

## Topologia generale

### 1. Spazi topologici

**Definizione 1.1.** *Sia  $X$  un insieme. Una topologia su  $X$  è una famiglia di insiemi  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$  tale che*

- (1)  $\emptyset, X \in \tau$ ;
- (2) *Unione qualsiasi di elementi di  $\tau$  sta in  $\tau$ :*

$$\forall I, \forall A_i \in \tau, i \in I \quad \cup_{i \in I} A_i \in \tau$$

- (3) *Intersezione finita di elementi di  $\tau$  sta in  $\tau$ :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall A_1, \dots, A_k \in \tau \quad A_1 \cap \dots \cap A_k \in \tau.$$

*Se  $\tau$  è una topologia su  $X$  allora  $(X, \tau)$  si chiama spazio topologico. Gli elementi di  $\tau$  si chiamano aperti.*

**Definizione 1.2.** *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico, un sottoinsieme  $A \subseteq X$  si dice chiuso se il suo complementare è un aperto:*

$$A \text{ è chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad A^c \in \tau.$$

**ESEMPIO 1.3.** *Il vuoto e tutto lo spazio sono entrambi sia aperti che chiusi in ogni topologia.*

**ESEMPIO 1.4** (La topologia banale). *Sia  $X$  un insieme. La topologia banale su  $X$  è  $\tau = \{\emptyset, X\}$ : Gli unici aperti sono quindi il vuoto e  $X$ . Gli unici chiusi sono il vuoto e  $X$ .*

**ESEMPIO 1.5** (La topologia discreta). *Sia  $X$  un insieme. La topologia discreta su  $X$  è  $\tau = \mathcal{P}(X)$ : Ogni insieme è aperto. Ogni insieme è chiuso in quanto il suo complementare è aperto.*

**ESEMPIO 1.6** (Spazi metrici). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. La topologia indotta da  $d$  su  $X$  è la collezione di tutti gli insiemi che sono aperti rispetto a  $d$*

$$\tau_d = \{A \subset X : A \text{ è aperto in } (X, d)\}$$

*per i teoremi 2.14 e 2.24,  $\tau_d$  è una topologia e la nozione di chiuso metrico coincide con quella di chiuso topologico.*

Chiaramente per definire una topologia basta dire quali sono i chiusi.

**ESEMPIO 1.7** (Topologia cofinita). *Sia  $X$  un insieme. La topologia cofinita è quella per cui i chiusi sono  $X$  e tutti i sottoinsiemi di  $X$  con un numero finito di elementi. Cioè*

$$\tau = \{A \subset X : \#(A^c) < \infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

**ESERCIZIO 1.8.** *Sia  $X = \{a, b, c, d, e\}$  e sia*

$$\tau = \{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}, \emptyset\}$$

*Dimostrare che  $\tau$  è una topologia.*

**Definizione 1.9.** *Sia  $\tau$  una topologia su un insieme  $X$ .  $\tau$  si dice metrizzabile se esiste una metrica  $d$  su  $X$  tale che  $\tau = \tau_d$ .*

**Definizione 1.10.** *Due metriche  $d_1, d_2$  su un insieme  $X$  si dicono (topologicamente) equivalenti se inducono la stessa topologia. In altre parole se l'identità  $(X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$  è un omeomorfismo.*

**ESEMPIO 1.11.** *In  $\mathbb{R}^2$  tutte le metriche  $L^p$  sono equivalenti (perché?). La metrica  $L^2$  e quella dei raggi infiniti non sono equivalenti (perché?).*

**ESEMPIO 1.12.** *Se  $X$  ha almeno due elementi, la topologia banale su  $X$  non è metrizzabile. Infatti in uno spazio metrico i punti sono chiusi mentre nella banale gli unici chiusi sono il vuoto e il tutto.*

**ESERCIZIO 1.13.** *In  $\mathbb{R}^2$  con la metrica dei raggi infiniti sia  $X = \partial B(0, 1)$ , dotato della metrica indotta. Dimostrare che la topologia indotta su  $X$  è quella discreta.*

**ESEMPIO 1.14.** *La topologia discreta su un insieme  $X$  è sempre metrizzabile. Infatti basta considerare la metrica*

$$d(x, y) = \begin{cases} x & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

*(esercizio: verificare che è una metrica). Per questa metrica i punti sono aperti infatti*

$$\{x\} = B(0, 1/2)$$

*Ne segue che per ogni  $A \subset X$  si ha*

$$A = \cup_{x \in A} \{x\}$$

*e quindi  $A$  è aperto in quanto unione di aperti. Dunque ogni sottoinsieme è aperto.*

**ESERCIZIO 1.15.** *Sia  $X$  un insieme. Allora la topologia cofinita su  $X$  è metrizzabile se e solo se  $X$  è finito. Infatti se  $X$  è finito la topologia cofinita coincide con quella discreta che è sempre metrizzabile. Se  $X$  è infinito e  $A, B$  sono aperti non vuoti si ha*

$$\#(A \cap B)^c = \#(A^c \cup B^c) \leq \#A^c + \#B^c < \infty$$

*e siccome  $X$  è infinito ne segue che  $A \cap B \neq \emptyset$ . In altre parole due aperti non vuoti si intersecano sempre. Ma in uno spazio metrico si trovano sempre aperti non vuoti e disgiunti. Infatti se  $x \neq y$ , detto  $R = d(x, y)/2$  si ha  $B(x, R) \cap B(y, R) = \emptyset$ .*



Le nozioni di parte interna, chiusura e frontiera si definiscono mimando i teoremi sugli spazi metrici:

**Definizione 1.16.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $A \subset X$ .

- $x \in A$  è interno se esiste  $B \in \tau$  tale che  $x \in B \subset A$ ;
- la parte interna di  $A$  è il più grande aperto contenuto in  $A$ ;
- $x$  è di aderenza per  $A$  se per ogni  $B \in \tau$  con  $x \in B$  si ha  $B \cap A \neq \emptyset$ ;
- la chiusura di  $A$  è il più piccolo chiuso contenente  $A$ .
- $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

**Teorema 1.17.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Allora  $\text{Int}(A) = (\overline{A^c})^c$  è l'insieme di tutti i suoi punti interni,  $A \in \tau$  se e solo se  $A = \text{Int}(A)$ .  $\bar{A} = (\text{Int}(A^c))^c$  è l'insieme di tutti i suoi punti di aderenza,  $A$  è chiuso se e solo se  $A = \bar{A}$ .  $\partial A = \partial A^c$ .

Le dimostrazioni sono uguali a quelle del caso metrico e sono lasciate per esercizio.

**Definizione 1.18.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $x \in X$ . Un intorno di  $x$  è un qualsiasi  $N \subset X$  tale che  $x \in \text{Int}(N)$ .

ESEMPIO 1.19. Un aperto è un intorno di ogni suo punto.

ESEMPIO 1.20. In  $\mathbb{R}$  standard  $[0, 2]$  è un intorno di 1 ma non lo è di 0.

**Definizione 1.21** (Base). Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Una base di  $\tau$  è una famiglia  $B \subseteq \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  tale che ogni elemento di  $\tau$  è unione di elementi di  $B$ .

ESEMPIO 1.22. In uno spazio metrico  $(X, d)$ , le palle  $B(x, \varepsilon)$  al variare di  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$  sono una base per la topologia  $\tau_d$ .

**Lemma 1.23.** Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  una famiglia di sottoinsiemi. Allora l'intersezione finita di unioni qualsiasi di elementi di  $\mathcal{F}$  è unione di intersezioni finite. In formule, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  per ogni  $I_1, \dots, I_k$  insiemi qualsiasi di indici, per ogni  $A_i^k \in \mathcal{F}$  con  $i \in I_k$  si ha

$$\left( \bigcup_{i \in I_1} A_i^1 \right) \cap \left( \bigcup_{i \in I_2} A_i^2 \right) \cap \dots \cap \left( \bigcup_{i \in I_k} A_i^k \right) = \bigcup_{i_1 \in I_1, \dots, i_k \in I_k} A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_k}^k$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle proprietà distributive di  $\cup$  e  $\cap$ . Per il lettore non avvezzo a certi formalismi si osserva che la distributiva tra  $\cup$  e  $\cap$  si comporta come quella tra somma e prodotto ove  $\cup$  fa le veci della somma e  $\cap$  del prodotto per cui l'equazione di cui sopra si "legge"  $(\sum_{i \in I_1} A_i^1) \cdots (\sum_{i \in I_k} A_i^k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1}^1 \cdots A_{i_k}^k$ .  $\square$

**Teorema 1.24.** Sia  $X$  un insieme e  $B \subset \mathcal{P}(X)$ . Allora  $B$  è base per una topologia se e solo se

- (1)  $\bigcup_{A \in B} A = X$ ;
- (2)  $\forall A_1, A_2 \in B$  e per ogni  $x \in A_1 \cap A_2$  esiste  $A_3 \in B$  tale che  $x \in A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$ .

In oltre, in tal caso la topologia di cui  $B$  è base è  $\tau = \{\bigcup_{i \in I} A_i : A_i \in B\}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $B$  è base per una topologia  $\tau$  allora ogni aperto è unione di elementi di  $B$ , in particolare  $X$  lo è (condizione 1)) e  $\tau = \{\cup_{i \in I} A_i : A_i \in B\}$ . In oltre se  $B$  è base di  $\tau$  gli elementi di  $B$  sono aperti e quindi  $A_1 \cap A_2$  è aperto. Quindi  $A_1 \cap A_2$  è unione di elementi di  $B$  e quindi ogni  $x \in A_1 \cap A_2$  è contenuto in un  $A_3 \in B$  che è contenuto in  $A_1 \cap A_2$ .

Viceversa, supponiamo che  $B$  goda delle due proprietà elencate. Definiamo  $\tau$  come la famiglia degli insiemi che sono unione di elementi di  $B$ .

$$\tau = \{\cup_{i \in I} A_i : A_i \in B\}$$

Se  $\tau$  è una topologia allora  $B$  ne è una base tautologicamente.  $\emptyset \in \tau$  perchè per convenzione l'unione vuota è vuota.  $X \in \tau$  per la proprietà 1). Dimostriamo ora che  $\tau$  è chiusa per unione qualsiasi ed intersezione finita. Unione qualsiasi di unioni di elementi di  $B$  è ovviamente unione di elementi di  $B$ . Siano ora  $I_1, \dots, I_k$  insiemi qualsiasi di indici, e  $A_i^k \in B$  con  $i \in I_k$ . Per il lemma precedente

$$(\cup_{i \in I_1} A_i^1) \cap \dots \cap (\cup_{i \in I_k} A_i^k) = \bigcup_{i_1 \in I_1, \dots, i_k \in I_k} A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_k}^k$$

Per la proprietà 2) per ogni  $x \in A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_k}^k$  esiste  $C_x \in B$  tale che

$$x \in C_x \subset A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_k}^k$$

per cui

$$A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_k}^k = \bigcup_{x \in A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_k}^k} C_x$$

e quindi  $A_{i_1}^1 \cap \dots \cap A_{i_k}^k$  è unione di elementi di  $B$  e quindi  $(\cup_{i \in I_1} A_i^1) \cap \dots \cap (\cup_{i \in I_k} A_i^k)$  è anch'esso unione di elementi di  $B$  e dunque sta in  $\tau$ .  $\square$

**ESEMPIO 1.25** (La topologia di Zariski). In  $\mathbb{K}^n$  definiamo la topologia di Zariski esibendone una base. Per ogni polinomio  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  poniamo

$$Z(p) = \{x \in \mathbb{K}^n : p(x) = 0\} \quad e \quad A(p) = \{x \in \mathbb{K}^n : p(x) \neq 0\} = Z(p)^c.$$

Dichiariamo gli insiemi  $Z(p)$  chiusi e gli  $A(p)$  aperti. Si noti che

$$Z(pq) = Z(p) \cup Z(q) \quad A(pq) = A(p) \cap A(q)$$

In particolare gli insiemi  $A(p)$  al variare di  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  soddisfano le ipotesi del Teorema 1.24 e quindi sono una base per una topologia, la topologia di Zariski. Per questa topologia i chiusi sono gli zeri di sistemi (non necessariamente finiti) di polinomi. Cioè per ogni insieme di polinomi  $S \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  si pone

$$Z(S) = \bigcap_{p \in S} Z(p) = \{x \in \mathbb{K}^n : p(x) = 0 \forall p \in S\}$$

gli insiemi  $Z(S)$  sono i chiusi della topologia di Zariski.

**Teorema 1.26.** Sia  $X$  un insieme e sia  $\tau_i \subseteq \mathcal{P}(X)$  una famiglia di topologie, allora  $\cap \tau_i$  è una topologia.

**DIMOSTRAZIONE.** Il tutto deriva dal fatto che la relazione di appartenenza è chiusa per intersezione. In dettaglio

- $\forall i(\emptyset, X \in \tau_i) \Rightarrow \emptyset, X \in \bigcap_i \tau_i$ ;
- Per ogni insieme di indici  $J$ , si ha  $A_j \in \bigcap_i \tau_i \Rightarrow \forall i(A_j \in \tau_i) \Rightarrow \forall i(\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau_i) \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \bigcap_i \tau_i$ .
- Per ogni insieme finito di indici  $J$ , si ha  $A_j \in \bigcap_i \tau_i \Rightarrow \forall i(A_j \in \tau_i) \Rightarrow \forall i(\bigcap_{j \in J} A_j \in \tau_i) \Rightarrow \bigcap_{j \in J} A_j \in \bigcap_i \tau_i$ .

□

**Definizione 1.27.** Siano  $X$  un insieme e  $\tau, \sigma$  due topologie su  $X$ . Diciamo che  $\tau$  è più fine di  $\sigma$  se

$$\sigma \subseteq \tau$$

in altre parole, se ogni aperto di  $\sigma$  è anche aperto di  $\tau$ .

In pratica possiamo dire che  $\tau$  è più fine se “ha più aperti”.

**ESERCIZIO 1.28.** Siano  $X$  un insieme e  $\tau, \sigma$  due topologie su  $X$ . Dimostrare che  $\tau$  è più fine di  $\sigma$  se e solo se ogni chiuso di  $\sigma$  è anche un chiuso di  $\tau$ .

**ESEMPIO 1.29.** La banale è meno fine di ogni altra topologia, la discreta è più fine.

**ESEMPIO 1.30.** La topologia cofinita è meno fine della topologia euclidea di  $\mathbb{R}^2$ . Infatti per la topologia euclidea i punti son chiusi e quindi un numero finito di punti è unione di chiusi, ergo chiusa. Quindi gli aperti della cofinita sono anche aperti euclidei.

**ESEMPIO 1.31.** La topologia di Zariski è meno fine della euclidea di  $\mathbb{R}^n$ . Infatti i polinomi sono funzioni continue per la topologia euclidea, quindi il luogo di zeri  $Z(p) = p^{-1}(0)$  è chiuso per ogni  $p$  (preimmagine di un chiuso). Quindi ogni chiuso di Zariski, che è della forma  $\bigcap_{p \in S} Z(p)$ , è un chiuso euclideo.

**Definizione 1.32.** Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici. La topologia unione disgiunta  $\tau \sqcup \sigma$  sull'unione disgiunta  $X \sqcup Y$  quella che ha come base  $\tau \sqcup \sigma$ .

Due topologie non sono necessariamente confrontabili.

**ESEMPIO 1.33.** Sia  $X = \mathbb{R}^1$  e  $Y = \mathbb{R}^2$ . Siano  $\sigma_1, \sigma_2$  le topologia standard su  $\mathbb{R}^1$  e  $\mathbb{R}^2$  e siano  $\tau_1, \tau_2$  quelle di Zariski. Sia  $\alpha = \tau_1 \sqcup \sigma_2$  e  $\beta = \sigma_1 \sqcup \tau_2$ . Nessuna tra  $\alpha$  e  $\beta$  è più fine dell'altra.

**Teorema 1.34.** Sia  $X$  un insieme e siano  $\tau, \sigma$  due topologie su  $X$ . Siano  $B_\sigma, B_\tau$  basi di  $\sigma$  e  $\tau$  rispettivamente. Allora  $\tau$  è più fine di  $\sigma$  se e solo se ogni elemento di  $B_\sigma$  è unione di elementi di  $B_\tau$  se e solo se

$$\forall x \in A \in B_\sigma \exists B \in B_\tau : x \in B \subseteq A.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Vediamo la prima equivalenza. Se  $\sigma \subset \tau$  allora in particolare gli elementi di  $B_\sigma$  sono  $\tau$ -aperti e dunque sono unione di elementi di  $B_\tau$ . Viceversa se ogni elemento di  $B_\sigma$  è unione di elementi di  $B_\tau$  allora ogni aperto di  $\sigma$ , in quanto unione di elementi di  $B_\sigma$  è anche unione di elementi di  $B_\tau$  e quindi è aperto anche in  $\tau$ .

Veniamo alla seconda equivalenza. Se  $\sigma \subset \tau$  e  $A \in \sigma$  allora  $A$  è unione di elementi di  $B_\tau$  e quindi per ogni  $x \in A$  esiste  $B \in B_\tau$  tale che  $x \in B$  e  $B \subseteq A$ . Viceversa per ogni  $x \in A$  sia  $B_x \in B_\tau$  tale che  $x \in B_x \subset A$ . È chiaro che  $A = \cup_x B_x$ .

**ESERCIZIO 1.35.** Sia  $X = \mathbb{R}^2$ . Sia  $\tau$  la topologia euclidea e sia  $\sigma$  definita come segue

$$\sigma = \{A \in \tau : 0 \notin A\} \cup \{X\}.$$

Dimostrare che  $\sigma$  è una topologia, si dica se sono confrontabili, se sono uguali o se una sia più fine dell'altra.

**Definizione 1.36** (Topologia generata da). Sia  $X$  un insieme e sia  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . La topologia generata da  $\mathcal{A}$  è la topologia meno fine che contiene  $\mathcal{A}$ .

**Teorema 1.37.** Sia  $X$  un insieme e sia  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . La topologia generata da  $\mathcal{A}$  è l'intersezione  $\tau_{\mathcal{A}}$  di tutte le topologie contenenti  $\mathcal{A}$ . Esplicitamente, i suoi aperti sono tutte e sole le unioni qualsiasi di intersezioni finite di elementi di  $\mathcal{A}$ :

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{\cup_{j \in J} \cap_{i=1}^k A_i^j : A_i \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}, J \text{ insieme qualsiasi}\} \cup \{X\}$$

e una sua base è formata dalle intersezioni finite di elementi di  $\mathcal{A}$ :

$$B = \{\cap_{i=1}^k A_i^j : A_i \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{X\}$$

**DIMOSTRAZIONE.** La topologia discreta contiene  $\mathcal{A}$  quindi l'intersezione  $\tau_{\mathcal{A}}$  delle topologie contenenti  $\mathcal{A}$  non è vuota; in oltre intersezione di topologie è una topologia, ergo  $\tau_{\mathcal{A}}$  è una topologia. Chiaramente  $\tau_{\mathcal{A}}$  è la meno fine delle topologie contenenti  $\mathcal{A}$  perché ogni topologia contenente  $\mathcal{A}$  è usata nell'intersezione che definisce  $\tau_{\mathcal{A}}$ . In oltre, l'insieme  $B = \{\cap_{i=1}^k A_i^j : A_i \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{X\}$  soddisfa le ipotesi del Teorema 1.24 in quanto è chiuso per intersezione finita e contiene  $X$ . Per il Teorema 1.24 la topologia di cui  $B$  è base è formata dalle unioni qualsiasi di elementi di  $B$ .  $\square$

Si noti che se  $Y = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$  non è tutto  $X$ , allora la topologia generata da  $\mathcal{A}$  non distingue i punti di  $X \setminus Y$ , nel senso che per ogni  $z \in X \setminus Y$  l'unico intorno di  $z$  è  $X$ . Quindi in realtà la topologia generata da  $\mathcal{A}$  fornisce informazioni solo su  $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$ .

Il concetto di base si può localizzare.

**Definizione 1.38** (Base locale). Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $x \in X$ . Un sistema fondamentali di intorni per  $x$  (o base locale) è una famiglia  $N_x$  di intorni di  $x$  tale che per ogni intorno  $A$  di  $x$  esiste  $B \in N_x$  tale che  $x \in B \subset A$ .

Per definire una topologia si possono elencare le basi fondamentali di intorni di ogni punto e considerare la topologia da essi generata.

**ESEMPIO 1.39.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Per ogni  $x$  definiamo  $N_x = \{B(x, \varepsilon) : 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$ . La topologia indotta da  $d$  è quella generata da  $\cup_{x \in X} N_x$ .  $N_x$  forma un sistema fondamentale di intorni per  $\tau_d$ .

**Definizione 1.40** (Convergenza di successioni). Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Una successione  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $X$  converge a  $x \in X$  se per ogni intorno  $A$  di  $x$  si ha  $x_i \in A$  definitivamente in  $i$ . Equivalentemente, data un sistema fondamentale di intorni  $N_x$  di  $x$ , si ha  $x_i \rightarrow x$  se per ogni  $A \in N_x$  si ha  $x_i \in A$  definitivamente in  $i$ .

ESEMPIO 1.41. Se  $\tau$  è metrizzabile la definizione di convergenza appena data coincide con quella metrica.

ESEMPIO 1.42 (Topologia della convergenza puntuale). Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico e sia  $A$  un insieme. Sia  $X = Y^A = \{f : A \rightarrow Y\}$ . Per ogni  $f \in X$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , per ogni  $a = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ , per ogni  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in (0, \infty)^k$  definiamo

$$N_{a,\varepsilon}(f) = \{g \in X : d(f(a_i), g(a_i)) < \varepsilon_i : \forall i = 1, \dots, k\}$$

La topologia che ha gli insiemi  $N_{a,\varepsilon}(f)$  come sistema fondamentale di intorni è la topologia della convergenza uniforme.

Secondo questa topologia infatti  $f_n \rightarrow f$  se e solo se per ogni  $x \in A$  la successione  $f_n(x)$  converge in  $Y$  a  $f(x)$ . (Perché?)

ESEMPIO 1.43 (Topologia della convergenza uniforme). Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico e sia  $A$  un insieme. Sia  $X = Y^A =: \{f : A \rightarrow Y\}$ . Per ogni  $f \in X$ , per ogni  $\varepsilon > 0$ , definiamo

$$N_\varepsilon(f) = \{g \in X : d(f(a), g(a)) < \varepsilon : \forall a \in A =\}$$

La topologia che ha gli insiemi  $N_\varepsilon(f)$  come sistema fondamentale di intorni è la topologia della convergenza uniforme.

Secondo questa topologia infatti  $f_n \rightarrow f$  se e solo se per ogni  $x \in A$  la successione  $\sup_{a \in A} d(f_n(x), f(x))$  converge a zero in  $\mathbb{R}$ . (Perché?)

ESEMPIO 1.44 (Topologia dell'ordine). Sia  $X$  un insieme totalmente ordinato. La topologia dell'ordine è quella generata dagli intervalli illimitati, ossia insiemi del tipo  $\{x \in X : x < b\}$  o  $\{x \in X : a < x\}$ . Si noti che gli intervalli in generale non sono una base per la topologia dell'ordine. Per esempio, in  $[0, \infty)$  con l'ordine usuale, l'intervallo  $(1, 2)$  non è unione di intervalli illimitati.

ESERCIZIO 1.45 (Falsa topologia dell'ordine). Sia  $X$  un insieme totalmente ordinato. Sia  $\tau$  la topologia generata dagli intervalli limitati, ossia insiemi del tipo  $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$ . Dimostrare che in generale tale topologia non è quella dell'ordine. (Suggerimento: Provare con  $X = [0, 1]$ . Chi sono gli intorni di 0?) Si diano almeno due esempi in cui  $\tau$  coincide con la topologia dell'ordine.

ESERCIZIO 1.46. Sia  $X = \mathbb{R}^2$  con l'ordine lessicografico:

$$(x, y) < (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ x = a, y < b \end{cases}$$

Si descriva un sistema fondamentale di intorni dell'origine. Si dica se la topologia dell'ordine lessicografico e quella euclidea sono una più fine dell'altra.

ESERCIZIO 1.47. Si dica se la topologia dell'ordine lessicografico su  $\mathbb{R}^2$  è metrizzabile e nel caso si esibisca una metrica che induce tale topologia.

## 2. Minicorso di aritmetica ordinale

**Definizione 2.1** (Buoni ordini). *Un insieme  $X$  totalmente ordinato si dice ben ordinato (e l'ordine si dice un buon ordine) se ogni sottoinsieme non vuoto di  $X$  ha un minimo:*

$$\forall \emptyset \neq A \subset X \exists a \in A : \forall b \in A : a \leq b.$$

In particolare ogni insieme ben ordinato ha un minimo. Il minimo di un insieme ben ordinato si chiama spesso 0, se ciò non crea confusione ovviamente.

ESEMPIO 2.2.  $\mathbb{N}$  (con l'ordine usuale) è ben ordinato.

ESEMPIO 2.3.  $\mathbb{Z}$  (con l'ordine usuale) non è ben ordinato. Per esempio perchè non ha un minimo.

Occhio che il minimo di  $A$  deve stare in  $A$ :

ESEMPIO 2.4. L'insieme  $[0, \infty)$  (con l'ordine usuale) non è ben ordinato:  $(1, 2)$  non ha un minimo (ha un inf, ma non un minimo!).

ESEMPIO 2.5. L'insieme  $\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$  con l'ordine indotto da  $\mathbb{R}$  è ben ordinato. L'insieme  $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$  no.

ESEMPIO 2.6. L'insieme  $\{k - \frac{1}{n+1} : k, n \in \mathbb{N}\}$  con l'ordine indotto da  $\mathbb{R}$  è ben ordinato. L'insieme  $\{k + \frac{1}{n+1} : k, n \in \mathbb{N}\}$  no. L'insieme  $\{k - \frac{1}{n+1} : k, n \in \mathbb{Z}\}$  con l'ordine indotto da  $\mathbb{R}$  non è ben ordinato.

ESERCIZIO 2.7. Dimostrare che l'insieme  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  con l'ordine

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{N} \\ x \leq \infty \quad \forall x \text{ e } y = \infty \end{cases}$$

è ben ordinato.

ESERCIZIO 2.8. Dimostrare che l'insieme  $\mathbb{N} \cup \{\infty_1\} \cup \{\infty_2\}$  con l'ordine

$$\begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{N} \\ x < \infty_1 \forall x \in \mathbb{N} \\ x < \infty_2 \forall x \in \mathbb{N} \\ \infty_1 < \infty_2 \end{cases}$$

è ben ordinato.

ESERCIZIO 2.9. Dimostrare che l'insieme  $\mathbb{Z}$  con l'ordine

$$x < y \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < y \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{Z} \\ y < x < 0 \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{Z} \\ y < 0 \leq x \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{Z} \end{cases}$$

è ben ordinato.

**Definizione 2.10.** *Sia  $X$  un insieme ben ordinato e sia  $x \in X$ .  $x$  è il massimo di  $X$  se  $\forall y \in X : y \leq x$ .*

Chiaramente il massimo se esiste è unico, ma non tutti gli insiemi ben ordinati hanno un massimo.

ESEMPIO 2.11. *L'insieme ben ordinato  $\mathbb{N}$  non ha un massimo.*

ESEMPIO 2.12. *Il massimo di  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  è  $\infty$ .*

**Definizione 2.13.** *Sia  $X$  un insieme ben ordinato e sia  $x \in X$ . Se  $x$  non è il massimo, l'insieme  $S_x = \{y \in X : y > x\}$  (maggiore stretto) è non vuoto. In tal caso si definisce il successore di  $x$  come*

$$s(x) = \min S_x.$$

*(Il minimo di  $S_x$  esiste perché  $X$  è ben ordinato.) Il successore di  $x$ , se esiste, si suole indicare spesso con la notazione  $x + 1$*

$$s(x) = x + 1$$

ESEMPIO 2.14. *In  $\mathbb{N}$  il successore di 0 è 1. Il successore di  $n$  è  $n + 1$ .*

ESEMPIO 2.15. *Sia  $X$  l'insieme  $\{k - \frac{1}{n+1} : k, n \in \mathbb{N}\}$  con l'ordine indotto da  $\mathbb{R}$ . Il minimo di  $X$  è  $-1$  (ottenuto per  $k = n = 0$ ),  $X$  non ha massimo. Il successore di 3 (ottenuto per  $k = 4$  e  $n = 0$ ) è  $7/2$  (ottenuto per  $k = 4$  e  $n = 1$ ). Quindi si può dire*

$$"-1 = 0" \quad "3 + 1 = 7/2"$$

*(questa la potete riciclare agli aperitivi con gli ingegneri.)*

**Definizione 2.16.** *Sia  $X$  un insieme ben ordinato e sia  $x \in X$ .  $x$  si dice successore se esiste  $y$  tale che  $x = y + 1$ , si dice limite se  $0 \neq x$  e  $x$  non è successore. Ci sono quindi tre tipi di punti:*

$$\begin{cases} 0 & (\text{il minimo di } X) \\ \text{successori} \\ \text{limiti} \end{cases}$$

ESEMPIO 2.17. *In  $\mathbb{N}$  non ci sono numeri limite.*

ESEMPIO 2.18. *In  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  l'unico punto limite è  $\infty$ .*

ESEMPIO 2.19. *In  $\mathbb{N} \cup \{\infty_1\} \cup \{\infty_2\}$  con l'ordine dell'Esercizio 2.8 l'unico punto limite è  $\infty_1$ . In oltre  $\infty_2 = \infty_1 + 1$  (e quindi  $\infty_2$  è un successore).*

ESEMPIO 2.20. *Sia  $X$  l'insieme  $\{k - \frac{1}{n+1} : k, n \in \mathbb{N}\}$  con l'ordine indotto da  $\mathbb{R}$ . Gli elementi limite sono gli elementi di  $\mathbb{N}$ . Gli altri, tranne  $-1$  che è il minimo, sono successori.*

**Teorema 2.21** (Induzione transfinita). *Sia  $\alpha$  un insieme ben ordinato. Sia  $P(x)$  una proposizione che dipende da  $x \in \alpha$ . Se*

$$\begin{cases} P(0) \text{ è vera} \\ \forall x \in \alpha : (\forall y < x P(y) \text{ è vera}) \Rightarrow P(x) \text{ è vera} \end{cases}$$

*allora  $P(x)$  è vera per ogni  $x \in \alpha$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $F$  l'insieme degli  $x \in \alpha$  per cui  $P(x)$  è falsa. Se  $F$  non è vuoto allora ha un minimo  $x_0 \in F$  perchè  $\alpha$  è ben ordinato. Ma allora  $P(y)$  è vera per tutti gli  $y < x_0$ . Per ipotesi induttiva ne segue che  $P(x_0)$  è vera e dunque non può stare in  $F$ . Dunque  $F$  è vuoto.  $\square$

Si noti che l'induzione usuale è un caso particolare della transfinita (con  $\alpha = \mathbb{N}$ ). Come l'usuale, anche l'ipotesi induttiva transfinita si può rimpiazzare con un'ipotesi del tipo  $P(x) \Rightarrow P(x+1)$ , ma solo per i successori, per i limiti si deve mantenere l'ipotesi induttiva generale:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0) \text{ è vera} \\ \forall x \in \alpha : (P(x) \text{ è vera}) \Rightarrow P(x+1) \text{ è vera} \\ \forall x \in \alpha \text{ limite} : (\forall y < x P(y) \text{ è vera}) \Rightarrow P(x) \text{ è vera} \end{array} \right.$$

**Definizione 2.22.** Sia  $X$  un insieme ben ordinato. Un segmento di  $X$  è un insieme del tipo:

$$\begin{aligned} [a, b) &= \{x \in X : a \leq x < b\} && \text{segmento generico} \\ [0, b) &= \{x \in X : x < b\} && \text{segmento iniziale} \\ [a, \infty) &= \{x \in X : x \geq a\} && \text{segmento finale} \end{aligned}$$

Si noti che un segmento può avere un massimo anche se la sintassi è quella di “aperto in b” e ciò succede precisamente tutte le volte che  $b$  è un successore. Quindi il segmento che vorreste indicare con “[a, b]” non è altro che  $[a, b+1)$ :

$$\{x \in X : a \leq x \leq b\} = [a, b+1).$$

In oltre, siccome  $X$  è ben ordinato, ogni segmento ha un minimo quindi non esistono “segmenti  $(a, b)$  aperti in  $a$ ” in quanto quello che vorreste chiamare “[a, b]” non è altro che  $[a+1, b)$ :

$$\{x \in X : a < x < b\} = [a+1, b).$$

**Definizione 2.23.** Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi ben ordinati. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice monotona se  $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ ;  $f$  si dice immersione se è monotona e l'immagine di  $f$  è un segmento di  $Y$ , si dice isomorfismo se è bigettiva e monotona. Due insiemi ben ordinati si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo tra loro.

**ESERCIZIO 2.24.** Dimostrare che una funzione monotona è iniettiva.

Si noti che un'immersione è sempre un isomorfismo con l'immagine (perché?). Di particolare importanza nella teoria degli ordinali sono i segmenti iniziali.

**Definizione 2.25** (Ordinali come tipi d'ordine). Un ordinale è la classe di isomorfismo di un insieme ben ordinato. Se  $\alpha = [X]$  è un ordinale, un segmento di  $\alpha$  è la classe di un segmento di  $X$ . Un segmento iniziale di  $\alpha$  è la classe di un segmento iniziale di  $X$ . Dati due ordinali  $\alpha$  e  $\beta$ , si dice che  $\alpha < \beta$  se  $\alpha$  è un segmento iniziale di  $\beta$  (cioè, posto  $\beta = [Y]$ , se  $X$  è isomorfo a un segmento iniziale di  $Y$ ).

In parole povere,  $\alpha < \beta$  significa che  $\beta$  “comincia” come  $\alpha$ .



**Teorema 2.26.** *Siano  $\alpha = [X]$  e  $\beta = [Y]$  due ordinali. Allora uno dei due è un segmento iniziale dell'altro.*

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione transfinita su  $X$ . Sia  $0_X$  il minimo di  $X$  e sia  $0_Y$  quello di  $Y$ . Definiamo un'immersione  $f$  da (un segmento iniziale di)  $X$  a  $Y$  come segue:

$$\begin{cases} f(0_X) = f(0_Y) \\ \forall x \in X \text{ se } f(z) \text{ è definito per ogni } z < x, \text{ e se } f([0, x)) \neq Y \\ \text{allora si pone } f(x) = \min\{y \in Y : \forall z < x : y > f(z)\} \end{cases}$$

Sia  $A$  l'insieme degli elementi su cui  $f$  è definita. Chiaramente  $A$  è un segmento iniziale di  $X$  perché se  $f(x)$  è definito allora lo è anche  $f(z)$  per ogni  $z < x$ . In oltre  $f$  è monotona crescente perché se  $z < x$  allora  $f(x) > f(z)$  per definizione. Vediamo ora che  $f(A)$  è un segmento iniziale di  $Y$ . Supponiamo per assurdo che non lo sia, in particolare  $f(A) \neq Y$ . Sia  $y_0$  il minimo del complementare di  $f(A)$ . Se  $f(A)$  non è un segmento, esiste  $b \in f(A)$  con  $b > y_0$ . Sia  $b_0$  il più piccolo di tali  $b$  e sia  $a_0 \in A$  tale che  $b = f(a_0)$ . Per come sono stati definiti  $y_0$  e  $b_0$ , per ogni  $x < a_0$  si ha  $f(x) < y_0$ . Ma allora per definizione si avrebbe  $f(a_0) = y_0 \in f(A)$ . Assurdo perché  $y_0 \in f(A)^c$ .

Riassumendo,  $f$  è un'isomorfismo tra il segmento iniziale  $A$  di  $X$  e il segmento iniziale  $f(A)$  di  $Y$ .

Se  $A = X$  allora  $X$  è isomorfo a un segmento iniziale di  $Y$ . Viceversa, se  $A \neq X$  allora sia  $x_0 = \min\{x \in X : \forall a \in A : a < x\}$  il minimo del complementare di  $A$ , ossia  $A = [0, x_0)$ . Siccome  $f$  è definita per tutti gli elementi minori di  $x_0$  ma non su  $x_0$  allora necessariamente  $f(A) = Y$  e dunque  $Y$  è isomorfo a un segmento iniziale di  $X$ .  $\square$

**Corollario 2.27.** *La classe<sup>1</sup> degli ordinali è totalmente ordinata.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema precedente, dati due qualsiasi ordinali  $\alpha, \beta$  si ha che o  $\alpha \leq \beta$  oppure  $\beta \leq \alpha$ .  $\square$

ESERCIZIO 2.28. *Sia  $X$  un insieme ben ordinato e sia  $Y \subseteq X$ . Dimostrare che  $[Y] \leq [X]$ .*

**Teorema 2.29.** *La classe degli ordinali è ben ordinata.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $A$  una classe di ordinali e sia  $\alpha \in A$ . Gli elementi di  $A$  minori di  $\alpha$  non sono altro che classi di equivalenza di ordini di segmenti iniziali di  $\alpha$ . Ad ogni segmento iniziale  $[0, x)$  corrisponde il suo sup  $x$ . Quindi l'insieme degli elementi di  $A$  minori di  $\alpha$  corrisponde a un sottoinsieme di  $\alpha$ . Siccome  $\alpha$  è bene ordinato, ha un minimo. Tale minimo è ovviamente il minimo di  $A$ .  $\square$

Dato un ordinale si può quindi definire il suo successore come il più piccolo ordinale maggiore di esso. Gli ordinali sono di tre tipi, come gli elementi

$$\begin{cases} 0 = \emptyset & \text{lo zero, l'ordinale più piccolo} \\ X \text{ successore, se esiste } Y : X = s(Y) & \text{se e solo se } X \text{ ha un massimo} \\ X \text{ limite, se non è successore né vuoto} \end{cases}$$

<sup>1</sup>Si è volutamente usata la parola "classe" al posto di "insieme" perché in genere "l'insieme" degli ordinali è troppo grosso per essere catalogato come insieme senza incorrere in paradossi di tipo Russell.

Questi fatti suggeriscono che gli ordinali stiano uno dentro l'altro. Ebbene, si possono scegliere dei rappresentanti canonici per i tipi d'ordine in modo che questo sia effettivamente vero.

**Definizione 2.30** (Ordinali di Von Neumann). *Un insieme  $X$  si dice ordinale di Von Neumann, se  $X \subset \mathcal{P}(X)$  — cioè se ogni elemento di  $X$  è un sottoinsieme di  $X$  — e se la relazione di appartenenza è un buon ordinamento su  $X$ .*

Gli ordinali di Von Neumann sono i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \emptyset \\ 1 = \{0\} = \{\emptyset\} \\ 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ \vdots \\ \omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots \\ \vdots \end{array} \right.$$

e in generale

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \emptyset \\ \forall \alpha \text{ successore, } \alpha = \beta + 1, \text{ si ha } \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\} \\ \forall \alpha \text{ limite si ha } \alpha = \cup_{\beta < \alpha} \beta \end{array} \right.$$

**Teorema 2.31.** *Ogni ordinale ha uno e un solo rappresentante di Von Neumann.*

**DIMOSTRAZIONE.** Procediamo per induzione transfinita. Il vuoto è un ordinale di Von Neumann. Se  $X$  è di Von Neumann allora  $X \cup \{X\}$ , che ha il tipo d'ordine di  $X + 1$ , è di Von Neumann. Se ogni  $Y < X$  ha un rappresentante  $Y_{VN}$  di Von Neumann, allora l'unione

$$\bigcup_{Y < X} Y_{VN}$$

è di Von Neumann ed ha il tipo d'ordine di  $X$ . □

Possiamo quindi identificare gli ordinali con gli ordinali di Von Neumann. Per definizione  $\omega$  è il tipo d'ordine di  $\mathbb{N}$ .  $\omega$  è il primo ordinale limite. Ogni ordinale è l'insieme dei suoi predecessori.

Il fatto che gli ordinali siano ben ordinati ci permette, per ogni proprietà  $P$ , di trovare il più piccolo ordinale con tale proprietà, che non è altro che il minimo degli elementi con  $P$ . Per esempio

$$\omega_1$$

è il più piccolo ordinale non numerabile.

**Definizione 2.32.** *Un ordinale cardinale è il più piccolo ordinale della sua classe di cardinalità.*

Per esempio sia  $\omega$  che  $\omega + 1$  sono numerabili, ma solo  $\omega$  è un cardinale. Vediamo ora un po' di aritmetica ordinale

**Definizione 2.33.** Dati  $\alpha = [X], \beta = [Y]$  ordinali, si definisce  $\alpha + \beta$  come il tipo d'ordine su  $X \sqcup Y$  dato da

$$z < w \Leftrightarrow \begin{cases} z \in X, w \in Y \\ z, w \in X, z < w \\ s, w \in Y, z < w \end{cases}$$

in parole povere "si mette  $Y$  dopo  $X$ ".

Il successore di  $\alpha = [X]$  è quindi definito come  $\alpha + 1$ , coerentemente con la notazione usata finora, ed è costruito aggiungendo ad  $X$  un elemento dichiarato più grande di tutti gli altri. Negli ordinali di Von Neumann tale elemento è  $\alpha$  stesso.

Si noti che la somma non è abeliana

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$$

ESERCIZIO 2.34. Dimostrare che  $1 + \omega \neq \omega + 1$ .

Su un prodotto  $X \times Y$  abbiamo visto l'ordine lessicografico. Possiamo considerare l'ordine antilexicografico: il lessicografico di  $Y \times X$ .

ESERCIZIO 2.35. Dimostrare che se  $X$  e  $Y$  sono ben ordinati allora l'ordine antilexicografico è un buon ordine su  $X \times Y$ .

**Definizione 2.36.** Dati due ordinali  $\alpha, \beta$  si definisce  $\alpha \cdot \beta$  come il tipo d'ordine di  $X \times Y$  con l'ordine antilexicografico (o se preferite, il tipo d'ordine di  $Y \times X$  con l'ordine lessicografico).

ESERCIZIO 2.37. Dimostrare che  $2\omega = \omega \neq \omega 2 = \omega + \omega$ .

ESERCIZIO 2.38. Dimostrare che per ogni  $\alpha$  si ha  $0\alpha = \alpha 0 = 0$ .

ESERCIZIO 2.39. Dimostrare che per ogni  $\alpha$  si ha  $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ .

ESERCIZIO 2.40. Dimostrare che per ogni  $\alpha, \beta$  ordinali si ha

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha 0 = 0 & \text{caso } \beta = 0 \\ \alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha & \text{caso successore} \\ \cup_{\gamma < \beta} \alpha\gamma & \text{caso limite} \end{cases}$$

In soldoni, per fare  $\alpha \cdot \beta$  si prendono  $\beta$  copie di  $\alpha$  e si mettono una dopo l'altra (l'ordine lessicografico questo fa). Per esempio

$$\omega\omega = \omega + \omega + \omega + \dots \text{"}\omega \text{ volte"}$$

Per la potenza bisogna stare un po' attenti perchè i prodotti infiniti non sono ben ordinati di suo. (Cos'è l'ordine antilexicografico su un prodotto infinito?)

**Definizione 2.41.** Per ogni  $\alpha, \beta$  ordinali si pone

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha^0 = 1 & \text{caso } \beta = 0 \\ \alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta \alpha & \text{caso successore} \\ \cup_{\gamma < \beta} \alpha^\gamma & \text{caso limite} \end{cases}$$

ESEMPIO 2.42.  $2^\omega = \bigcup_n 2^n = \omega$ .

ESEMPIO 2.43.  $2^{\omega+1} = 2^\omega 2^1 = \omega 2 = \omega + \omega$ .

ESEMPIO 2.44.  $\omega\omega = \omega^2 \neq 2^\omega$ . Infatti  $\omega^2 = \omega + \omega$  contiene un elemento limite ( $\omega$ ) mentre tutti gli elementi di  $2^\omega = \omega$  sono successori.

Abbiamo quindi visto che le operazioni non sono commutative. Sono associative (perchè?) ed in oltre valgono la distributiva con il prodotto a sinistra

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

e la regola delle potenze ordinata

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta + \alpha^\gamma$$

ESERCIZIO 2.45. Dimostrare la distributiva sinistra e la regola delle potenze.

Per i più curiosi: si possono definire  $\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$  e molti altri ordinali curiosi.

### 3. Cofinalità e convergenza di successioni generalizzate

Veniamo adesso alle proprietà più topologiche degli ordinali. In questa sezione cercherò di convincervi che la convergenza di successioni usuali non è sufficiente per una nozione generale di convergenza, e che esistono “successioni” veramente strane.

Dato un ordinale  $\alpha$ , una  $\alpha$ -successione, o successione di tipo  $\alpha$  in un insieme  $X$  è una successione indicizzata da  $\alpha$

$$(x_i)_{i \in \alpha}$$

In altre parole, una  $\alpha$ -successione in  $X$  è una funzione da  $\alpha$  in  $X$ . Se  $X$  è a sua volta ordinato, una successione si dice monotona (crescente) se  $i > j \Rightarrow x_i > x_j$ . Nella classe degli ordinali una successione monotona crescente ha sempre limite (per la topologia dell'ordine): il suo sup, ovvero il minimo degli elementi più grandi di tutti gli elementi della successione. Dati  $\alpha_i$  con  $i \in \beta$  si ha (usando gli ordinali di Von Neumann)

$$\sup_{i \in \beta} \alpha_i = \lim_{i \in \beta} \alpha_i = \bigcup_i \alpha_i$$

**Definizione 3.1** (Insiemi cofinali). Sia  $X$  un insieme ordinato. Non necessariamente totalmente ordinato, non necessariamente ben ordinato. Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  si dice cofinale in  $X$  se

$$\forall x \in X \exists a \in A : a \geq x.$$

**Definizione 3.2** (Successioni cofinali). Sia  $X$  un qualsiasi insieme (parzialmente) ordinato. Una  $\alpha$ -successione  $(x_i)_{i \in \alpha}$  in  $X$  si dice cofinale se la sua immagine è un sottoinsieme cofinale in  $X$ , cioè se

$$\forall x \in X \exists i \in \alpha : x_i \geq x.$$

Un ordinale  $\alpha$  si dice cofinale in  $X$  se esiste una  $\alpha$ -successione cofinale in  $X$ .

**Definizione 3.3** (Cofinalità). Sia  $X$  un qualsiasi insieme (parzialmente) ordinato. La cofinalità di  $X$ , denotata con  $\text{cof}(X)$  è il più piccolo ordinale cofinale in  $X$ .

Chiaramente la definizione di cofinalità si applica anche agli ordinali che sono (classi di) ben ordinati.

**Definizione 3.4** (Cofinalità). *La cofinalità di  $\beta$  è il più piccolo ordinale cofinale in  $\beta$ .*

ESEMPIO 3.5.  *$n$  è cofinale in  $\omega + 1$  per ogni  $n \in \omega$ . La cofinalità di  $\omega + 1$  è 1.*

ESEMPIO 3.6.  *$n$  è cofinale in  $\omega + 2$  per ogni  $n \in \omega$ . La cofinalità di  $\omega + 2$  è 1.*

ESEMPIO 3.7. *Se  $\alpha$  ha un massimo (cioè se è un successore) allora ha cofinalità 1.*

ESEMPIO 3.8.  *$\omega + \omega$  ha cofinalità  $\omega$ .*

**Teorema 3.9.** *Sia  $X$  un insieme totalmente ordinato e sia  $(x_i)_{i \in \alpha}$  una  $\alpha$ -successione cofinale in  $X$ . Allora esiste  $0 \neq \gamma \leq \alpha$  e una  $\gamma$ -successione monotona e cofinale in  $X$ . In particolare, se  $\alpha = \text{cof}(X)$  allora  $\gamma = \alpha$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $A \subset \alpha$  l'insieme definito come

$$i \in A \Leftrightarrow x_j < x_i \quad \forall j < i.$$

Chiaramente  $0 \in A$ , perchè non esiste nessun  $j < 0$ . Quindi  $A \neq \emptyset$ . In oltre per ogni  $i, j \in A$  si ha  $j < i \Rightarrow x_j < x_i$  per come è definito  $A$ . Infine  $(x_i)_{i \in A}$  è una successione cofinale in  $X$ . Infatti per ogni  $x \in X$  esiste  $i \in \alpha$  tale che  $x_i \geq x$ . Se  $x_j < x_i$  per ogni  $j < i$  allora  $i \in A$ . Altrimenti esiste  $j < i$  tale che  $\text{NON}(x_j < x_i)$ . Siccome  $X$  è totalmente ordinato ciò è equivalente a  $x_j \geq x_i$ . Sia dunque  $k$  il più piccolo degli  $i \in \alpha$  tali che  $x_i \geq x$ . Allora per ogni  $j < k$  si ha  $x_j < x_k$  e dunque  $k \in A$  e  $x_k \geq x$ .

Visto che  $A \subset \alpha$  si ha che  $\gamma = [A] \leq \alpha$ . □

**Corollario 3.10.** *Sia  $X$  un insieme totalmente ordinato. Allora*

$$\text{cof}(\text{cof}(X)) = \text{cof}(X)$$

*In altre parole le cofinalità degli ordinali che sono cofinalità di totalmente ordinati sono loro stessi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\beta = \text{cof}(X)$  e  $\alpha = \text{cof}(\beta)$ . Si deve provare che  $\alpha = \beta$ . Per definizione  $\text{cof}(\beta) \leq \beta$ , ossia  $\alpha \leq \beta$ .

Siccome  $\alpha = \text{cof}(\beta)$ , esiste una  $\alpha$ -successione  $(b_i)_{i \in \alpha}$  cofinale in  $\beta$ . Siccome  $X$  è totalmente ordinato, per il Teorema 3.9 esiste una successione  $(x_j)_{j \in \beta}$  monotona e cofinale in  $X$ . Quindi per ogni  $x \in X$  esiste  $j \in \beta$  tale che  $x_j > x$ . Siccome  $(b_i)_{i \in \alpha}$  è cofinale in  $\beta$  allora esiste  $i$  tale che  $b_i > j$ . Siccome  $x_j$  è monotona si ha

$$x_{b_i} > x_j > x$$

e quindi la successione  $(x_{b_i})_{i \in \alpha}$  è cofinale in  $X$ , ergo  $\text{cof}(X) \leq \alpha$ . Quindi  $\beta \leq \alpha$ . □

**Teorema 3.11.** *Siano  $\alpha, \beta$  ordinali. Se esiste una  $\alpha$ -successione monotona e cofinale in  $\beta$  allora  $\text{cof}(\alpha) = \text{cof}(\beta)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\text{cof}(\beta) = 1$  allora il teorema è ovvio. Possiamo quindi supporre che la cofinalità di  $\beta$  sia un ordinale limite.

Sia  $(x_a)_{a \in \alpha}$  una successione monotona e cofinale in  $\beta$ . Sia  $\gamma$  la cofinalità di  $\alpha$ . Allora esiste una  $\gamma$ -successione  $(a_i)_{i \in \gamma}$  monotona e cofinale in  $\alpha$ . La successione  $(x_{a_i})_{i \in \gamma}$  è cofinale in  $\beta$ . Quindi  $\text{cof}(\beta) \leq \gamma$ .

Viceversa, se  $\delta$  è la cofinalità di  $\beta$  allora esiste una  $\delta$ -successione  $(y_j)_{j \in \delta}$  monotona e cofinale in  $\beta$ . Siccome  $x_{a_i}$  è cofinale, per ogni  $j \in \delta$  esiste  $i \in \gamma$  tale che  $x_{a_i} \geq y_j$ . Sia  $i_j$  il più piccolo di tali elementi. La successione  $(i_j)_{j \in \delta}$  è una  $\delta$ -successione in  $\gamma$  che è cofinale perché per ogni  $i \in \gamma$ , siccome  $y_j$  è cofinale esiste  $j^i \in \delta$  tale che  $y_{j^i} \geq x_{a_i}$  e quindi  $y_{j^{i+1}} > x_{a_i}$  e dunque  $i_{j^{i+1}} \geq i$ . Ne segue che  $\text{cof}(\gamma) \leq \delta$ . Abbiamo quindi

$$\text{cof}(\alpha) = \gamma = \text{cof}(\gamma) \leq \delta = \text{cof}(\beta) \leq \gamma$$

e dunque tutte le disuguaglianze sono uguaglianze. □

In generale, non è detto che esistano successioni monotone e cofinali.

**Definizione 3.12.** *Sia  $X$  un insieme ordinato.  $X$  si dice linearmente cofinale se esiste un ordinale  $\alpha$  e una  $\alpha$ -successione monotona e cofinale in  $X$ . In questo caso si definisce  $\text{coflin}(X)$  il minimo ordinale con tale proprietà.*

**Teorema 3.13.** *Ogni insieme totalmente ordinato è linearmente cofinale.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X$  totalmente ordinato. Sia  $\beta$  il primo ordinale di cardinalità  $|X|$  e sia  $f : \beta \rightarrow X$  una biiezione. Chiaramente  $f$  rappresenta una  $\beta$ -successione cofinale in  $X$  e per il Teorema 3.9 esso risulta linearmente cofinale. □

**Teorema 3.14.** *Sia  $X$  un insieme (parzialmente) ordinato e linearmente cofinale. Allora  $\text{coflin}(X) = \text{cof}(X)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\beta$  la cofinalità lineare di  $X$  e  $\alpha = \text{cof}(X)$ . Sia  $(x_i)_{i \in \alpha}$  una successione cofinale in  $X$  e sia  $(y_j)_{j \in \beta}$  una successione monotona e cofinale in  $X$ . Ovviamente  $\alpha \leq \beta$  perché ogni successione monotona e cofinale è in particolare cofinale. Per dimostrare  $\beta \leq \alpha$  costruiamo una  $\gamma$ -successione  $(b_n)_{n \in \gamma}$  monotona e cofinale in  $\beta$  con  $\gamma \leq \alpha$ . Fatto ciò avremo che  $(y_{b_n})_{n \in \gamma}$  è monotona e cofinale in  $X$  e quindi  $\beta = \text{coflin}(X) \leq \gamma \leq \alpha$ .

Per ogni  $i \in \alpha$  esiste  $b \in \beta$  tale che  $y_b > x_i$  (perché  $y_j$  è cofinale). Sia  $b_i$  il più piccolo di tali indici

$$b_i = \min\{b \in \beta : y_b > x_i\}$$

La successione  $(b_i)_{i \in \alpha}$  è cofinale in  $\beta$ : Infatti, siccome  $(x_i)$  è cofinale, per ogni  $j \in \beta$  esiste  $i \in \alpha$  tale che  $x_i > y_j$  e dunque, siccome  $(y_j)$  è monotona,  $b_i > j$ .

Per il Teorema 3.9, siccome  $\beta$  è totalmente ordinato, esiste  $\gamma \leq \alpha$  e una  $\gamma$ -successione  $(b_n)_{n \in \gamma}$  monotona e cofinale in  $\beta$ . □

**ESERCIZIO 3.15.** *Dimostrare che se  $X$  è un insieme (parzialmente) ordinato e linearmente cofinale, allora  $\text{cof}(\text{cof}(X)) = \text{cof}(X)$ .*

**Teorema 3.16.**  $\omega_1$  ha cofinalità non numerabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che  $\omega_1$  è il più piccolo ordinale non numerabile. Consideriamo un ordinale numerabile  $\alpha$  e una  $\alpha$ -successione  $x_i$  in  $\omega_1$ . Poniamo  $X_i = [0, x_i) < \omega_1$ . Siccome  $\omega_1$  è il primo ordinale non numerabile, tutti gli  $X_i$  sono numerabili. Se  $(x_i)_{i \in \alpha}$  fosse cofinale in  $\omega_1$  si avrebbe

$$\bigcup_{i \in \alpha} X_i = \omega_1$$

e quindi avremmo ottenuto  $\omega_1$  come unione numerabile di numerabili, il che lo renderebbe numerabile.  $\square$

**Corollario 3.17.**  $\text{cof}(\omega_1) = \omega_1$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Ovviamente  $\omega_1$  è cofinale in  $\omega_1$  ed essendo lui il primo non numerabile, visto che  $\text{cof}(\omega_1)$  non è numerabile, si ha  $\text{cof}(\omega_1) = \omega_1$ .  $\square$

La cofinalità non è però una questione di cardinalità, ma di come “finisce” un ordinale:

**ESEMPIO 3.18.**  $\omega_1 + \omega$  ha cofinalità  $\omega$ .

**ESEMPIO 3.19.**  $\omega_1 + \omega + 1$  ha cofinalità 1.

**ESERCIZIO 3.20.** *Dimostrare che un ordinale ha cofinalità 1 se e solo se è un successore, se e solo se ha un massimo.*

**Corollario 3.21.** *Sia  $X = \omega_1$  con la topologia dell'ordine. Allora non esistono, in  $X$ , successioni classiche che tendono all'infinito nel senso classico.*

**DIMOSTRAZIONE.** Una successione classica che tende all'infinito implicherebbe una cofinalità di  $\omega_1$  numerabile.  $\square$

**Corollario 3.22.** *Sia  $X = \omega_1 + \omega_1$  con la topologia dell'ordine. Allora non esistono, in  $X$ , successioni classiche che tendono  $\omega_1$  e che non siano definitivamente costanti.*

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che  $\omega_1 + 1 = \omega_1 \cup \{\omega_1\}$  quindi  $\omega_1$  è un elemento di  $\omega_1 + \omega_1$ . In oltre  $\{x \in \omega_1 + \omega_1 : x < \omega_1\}$  non è altro che  $\omega_1$ .

Una successione  $x_n$  che tende a  $\omega_1$  è definitivamente strettamente minore di  $\omega_1 + 1$ . Se non fosse definitivamente costante, esisterebbe una sottosuccessione  $x_{n_i}$  strettamente minore di  $\omega_1$  che converge a  $\omega_1$ . Sarebbe quindi una successione cofinale in  $\omega_1$  e ciò implicherebbe una cofinalità di  $\omega_1$  numerabile.  $\square$

**Definizione 3.23** (Definitivamente e frequentemente negli ordinali). *Sia  $\alpha$  un ordinale e sia  $P(i)$  una proposizione dipendente da  $i \in \alpha$ . Diciamo che  $P$  è vera definitivamente in  $\alpha$  se esiste  $i_0 \in \alpha$  tale che  $P(i)$  è vera per ogni  $i > i_0$ . Diciamo che  $P$  è vera frequentemente in  $\alpha$  se l'insieme degli  $i \in \alpha$  per cui  $P(i)$  è vera è cofinale in  $\alpha$ .*

**ESERCIZIO 3.24.** *Dimostrare che i concetti di definitivamente in  $\mathbb{N}$  e frequentemente in  $\mathbb{N}$  usuali coincidono con quelli appena dati nel caso di  $\alpha = \omega$ .*

**ESERCIZIO 3.25.** *Dimostrare che “Non (definitivamente  $P$ )” coincide con “Frequentemente Non  $P$ ”.*

Adesso possiamo dare la definizione di  $\alpha$ -successione convergente in modo compatibile con il Teorema 4.1 (che vale per le  $\omega$ -successioni).

**Definizione 3.26** ( $\alpha$ -successioni convergenti). *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $x \in X$ . Sia  $\alpha$  un ordinale e sia  $(x_i)_{i \in \alpha}$  una  $\alpha$ -successione in  $X$ . Si dice che*

$$x_i \rightarrow x$$

*se per ogni intorno  $A$  di  $x$  si ha  $x_j \in A$  definitivamente in  $\alpha$ .*

**ESERCIZIO 3.27.** *Dimostrare che se  $\alpha$  è numerabile e  $(x_i)_{i \in \alpha}$  è una  $\alpha$ -successione in  $\omega_1 + \omega_1$  che tende a  $\omega_1$ , allora  $x_i = \omega_1$  definitivamente in  $\alpha$ .*

Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $x \in X$ . La famiglia  $\mathcal{F}(x)$  degli intorni di  $x$  ha le seguenti proprietà:

- $\mathcal{F}(x)$  non è vuoto;
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ ,  $A \in \mathcal{F}(x)$  e  $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}(x)$ ;
- $\forall A, B \in \mathcal{F}(x)$   $A \cap B \in \mathcal{F}(x)$ .

Queste proprietà si dicono proprietà di filtro. In particolare  $\mathcal{F}(x)$  è un filtro in  $\mathcal{P}(X)$ . In generale la nozione di filtro la si dà per insiemi parzialmente ordinati.

**Definizione 3.28** (Filtro). *Sia  $X$  un insieme parzialmente ordinato  $F \subseteq X$  si dice filtro se:*

$$F \neq \emptyset;$$

$$\forall A \in F \forall B \in X, B \leq A \Rightarrow B \in F;$$

$$\forall A, B \in F \exists C \in F : C \geq A, C \geq B.$$

Il filtro degli intorni corrisponde alla relazione d'ordine  $A < B$  se e solo se  $B \subset A$ . (Ma questa scelta notazionale non è standard, d'altronde la nozione di filtro si può dare ribaltando le disuguaglianze).

**ESERCIZIO 3.29.** *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico, sia  $x \in X$  e  $\mathcal{F}(x)$  il filtro degli intorni di  $x$ . Si dimostri che se  $\{x\}$  è aperto in  $X$  allora  $\text{cof}(\mathcal{F}(x)) = 1$ .*

**ESERCIZIO 3.30.** *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico, sia  $x \in X$  e  $\mathcal{F}(x)$  il filtro degli intorni di  $x$ . Si dimostri che se  $\{x\}$  non è aperto in  $X$  e  $\text{cof}(\mathcal{F}(x)) = 1$ , allora esiste  $y \in X$ , diverso da  $x$ , tale che ogni successione in  $X$  che converge a  $y$  converge simultaneamente anche a  $x$ . (Bel troiaio vero?)*

**Definizione 3.31** (Successioni banali). *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico sia  $x \in X$  e  $\mathcal{F}(x)$  il filtro degli intorni di  $x$ . Sia  $\alpha > 1$  e sia  $\alpha$ -successione  $(x_i)_{i \in \alpha}$  in  $X$  convergente a  $x$ . Si dice che  $\alpha$  converge banalmente a  $x$  se definitivamente in  $\alpha$  si ha*

$$\forall A \in \mathcal{F}(x) : x_i \in A$$

*Cioè se esiste  $i_0 \in \alpha$  tale che per ogni  $i > i_0$  e per ogni  $A$  intorno di  $x$  si ha  $x_i \in A$ . In altre parole, detta  $N$  l'intersezione di tutti gli intorni di  $x$ ,  $x_i$  è banale se definitivamente sta in  $N$ .*



Si noti che “definitivamente per ogni” è diverso da “per ogni definitivamente” e quindi la definizione di convergenza (per ogni  $A$ , definitivamente in  $\alpha$ ,  $x_i \in A$ ) è diversa dalla definizione di convergenza banale (definitivamente in  $\alpha$ , per ogni  $A$ ,  $x_i \in A$ ).

In oltre, per convenzione se  $\alpha = 1$  allora diciamo che una  $\alpha$ -successione è sempre non banale.

**ESEMPIO 3.32.** *Una successione definitivamente costante converge banalmente.*

**ESEMPIO 3.33.** *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico sia  $x \in X$  e  $\mathcal{F}(x)$  il filtro degli intorni di  $x$ . Supponiamo  $\text{cof}(\mathcal{F}(x)) = 1$  e sia  $N$  un elemento massimale di  $\mathcal{F}(x)$ . Una qualsiasi successione a valori in  $N$  converge banalmente a  $x$ .*

**ESEMPIO 3.34.** *Sia  $X = [0, 1]$  con la topologia generata dagli insiemi di tipo  $(a, b)$  con  $a, b \in (0, 1)$ . Allora  $X$  è un elemento massimale sia di  $\mathcal{F}(0)$  che di  $\mathcal{F}(1)$ . Quindi ogni successione in  $X$  converge banalmente a 0 e a 1 simultaneamente (e magari anche a qualche altro numero).*

**Teorema 3.35.** *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico, sia  $x \in X$  e sia  $\mathcal{F}(x)$  il filtro degli intorni di  $x$ . Se  $\mathcal{F}(x)$  è linearmente cofinale, allora esiste una  $\alpha$ -successione  $(x_i)_{i \in \alpha}$  in  $X$  convergente a  $x$  non banalmente se e solo se  $\text{cof}(\alpha) = \text{cof}(\mathcal{F}(x))$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $N = \bigcap_{A \in \mathcal{F}(x)} A$  l'intersezione di tutti gli intorni di  $x$ . (Si noti che  $x \in N$ .) Se  $N \in \mathcal{F}(x)$  allora  $N$  è il massimo di  $\mathcal{F}(x)$  e le uniche successioni convergenti a  $x$  sono quelle definitivamente contenute in  $N$ . In tal caso le uniche  $\alpha$ -successioni convergenti a  $x$  non banalmente sono per  $\alpha = 1 = \text{cof}(\mathcal{F}(x))$ . Possiamo quindi supporre che per ogni  $A \in \mathcal{F}(x)$  esista  $y \in A \setminus N$ .

Sia  $\beta = \text{cof}(\mathcal{F}(x))$ . Sia  $(B_j)_{j \in \beta}$  una  $\beta$ -successione monotona e cofinale in  $\mathcal{F}(x)$ . (Si noti che  $N = \bigcap_j B_j$ .) Per ogni  $j \in \beta$  scegliamo  $y_j \in B_j \setminus N$ . La successione  $(y_j)_{j \in \beta}$  converge a  $x$ . Infatti per ogni intorno  $A$  contenente  $x$  esiste  $j_0 \in \beta$  tale che  $B_{j_0} \subseteq A$  e quindi  $B_j \subseteq B_{j_0} \subseteq A$  per ogni  $j > j_0$ . Quindi  $y_j \in A$  definitivamente in  $\beta$ . In oltre la successione è non banale perchè  $y_j \notin N$ . Quindi esistono  $\beta$ -successioni convergenti a  $x$  non banalmente. Se  $\alpha$  è un ordinale con cofinalità  $\beta$  allora esiste una  $\beta$  successione  $(a_j)_{j \in \beta}$  monotona e cofinale in  $\alpha$ . Per ogni  $a \in \alpha$  definiamo  $j_a \in \beta$  come il primo  $j \in \beta$  tale che  $a_j \geq a$ . Ponendo  $x_a = y_{j_a}$  otteniamo una  $\alpha$ -successione convergente a  $x$  non banalmente.

Viceversa, dato un ordinale  $\alpha$  supponiamo che esista una  $\alpha$ -successione  $(x_a)_{a \in \alpha}$  che converge a  $x$  non banalmente. Allora  $x_a$  sta frequentemente fuori da  $N$ , ossia esiste una  $\gamma$ -successione  $(a_i)_{i \in \gamma}$  cofinale in  $\alpha$  tale che  $x_{a_i} \notin N$ . A meno di passare a sottosuccessioni, cioè passando a sottoinsiemi di  $\gamma$ , possiamo supporre che  $a_i$  sia monotona. Quindi per il Teorema 3.11 si ha  $\text{cof}(\gamma) = \text{cof}(\alpha)$  e passando a sottosuccessioni cofinali possiamo supporre  $\gamma = \text{cof}(\alpha)$ . Si noti che  $\text{cof}(\gamma) = \gamma$ .

Per ogni  $i \in \gamma$  sia  $j_i$  il più piccolo elemento  $j$  di  $\beta$  tale che  $x_{a_i} \notin B_j$ . Siccome  $x_a \rightarrow x$  allora la  $\gamma$ -successione  $(j_i)_{i \in \gamma}$  è cofinale in  $\beta$ . Quindi  $\gamma \geq \text{cof}(\beta)$ . Ne segue che

$$\text{cof}(\alpha) = \gamma \geq \text{cof}(\beta) = \text{cof}(\text{cof}(\mathcal{F}(x))) = \text{cof}(\mathcal{F}(x)) = \beta.$$

Viceversa, siccome  $x_a \rightarrow x$ , per ogni  $j \in \beta$ ,  $x_i$  sta definitivamente dentro  $B_j$  e quindi possiamo definire  $i^j$  come il più piccolo elemento di  $\gamma$  tale che  $x_{a_i} \in B_j$  per ogni  $i > i^j$ .

Siccome  $x_{a_i} \notin N$ , per ogni  $i \in \gamma$  esiste  $j$  tale che  $x_{a_i} \notin B_j$  e dunque  $i^j \geq i$ . Dunque la  $\beta$ -successione  $(i^j)_{i \in \beta}$  è cofinale in  $\gamma$ . Quindi  $\beta \geq \text{cof}(\gamma)$ . Dunque in conclusione si ha

$$\beta \geq \text{cof}(\gamma) = \gamma = \text{cof}(\alpha)$$

e siccome avevamo già  $\text{cof}(\alpha) \geq \beta$  si ha

$$\text{cof}(\alpha) = \beta = \text{cof}(\mathcal{F}(x)).$$

□

Le successioni di tipo ordinale si generalizzano alle cosiddette “reti dirette”.

**Definizione 3.36.** *Sia  $I$  un insieme parzialmente ordinato.  $I$  si dice diretto se per ogni  $a, b \in I$  esiste  $c \in I$  tale che  $c > a$  e  $c > b$ .*

**ESEMPIO 3.37.** *Gli insiemi totalmente ordinati sono diretti. In particolare gli ordinali sono insiemi diretti.*

**ESEMPIO 3.38.** *Il filtro degli intorni di un punto in uno spazio topologico è un'insieme diretto. In generale un filtro è un insieme diretto.*

**ESEMPIO 3.39.** *Sia  $I$  un'insieme diretto e  $X$  un'insieme. Una  $I$ -successione a valori in  $X$  è una funzione da  $I$  in  $X$ . Di solito si indica con la notazione usuale  $(x_i)_{i \in I}$ . Se  $X$  è anch'esso ordinato una successione si dice monotona se  $i > j \Rightarrow x_i > x_j$ . Una successione generalizzata (chiamata anche rete) è una successione indicizzata da un insieme diretto.*

Le sottosuccessioni di successioni generalizzate corrispondono a sottoinsiemi diretti e cofinali dell'insieme diretto  $I$  degli indici della successione.

Le successioni di tipo ordinale sono casi particolari di successioni generalizzate.

**Definizione 3.40.** *Sia  $I$  un insieme diretto e  $P$  una proprietà. Si dice che  $P$  vale definitivamente in  $I$  se esiste  $i_0 \in I$  tale che per ogni  $i > i_0$  si ha che  $P(i)$  è vera. Si dice che vale frequentemente in  $I$  se l'insieme degli indici  $i$  per cui  $P(i)$  è vera è cofinale in  $I$ .*

Come nel caso degli ordinali, “Non definitivamente  $P$  coincide con frequentemente Non  $P$ ”.

**Definizione 3.41.** *Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x \in X$ . Sia  $(x_i)_{i \in I}$  una successione generalizzata in  $X$ . Si dice che  $x_i$  converge a  $x$  se per ogni intorno  $A$  di  $x$  si ha  $x_i \in A$  definitivamente in  $A$ .*

#### 4. Assiomi di numerabilità

**Definizione 4.1** (Assiomi di numerabilità). *Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si dice a base numerabile se  $\tau$  ammette una base numerabile. Uno spazio topologico si dice localmente numerabile se ogni  $x \in X$  ammette una sistema fondamentale di intorni numerabile. È in uso la seguente terminologia:*

- *Primo assioma di numerabilità.  $X$  si dice “First countable” (primo numerabile, ma in italiano rende proprio male) se  $X$  è localmente numerabile.*

- *Secondo assioma di numerabilità.*  $X$  si dice “Second countable” (secondo numerabile, come sopra suona da far schifo) se  $X$  è a base numerabile.

Chiaramente il secondo implica il primo.

ESEMPIO 4.2. *Gli spazi metrici sono localmente numerabili: basta considerare le palle di raggio razionale.*

**Definizione 4.3** (Spazi separabili). *Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si dice separabile se contiene un sottoinsieme denso numerabile.*

ESEMPIO 4.4.  $\mathbb{R}$  è separabile perché  $\mathbb{Q}$  è numerabile e denso in  $\mathbb{R}$ .

ESEMPIO 4.5. *Uno spazio metrico separabile è a base numerabile: Basta considerare le palle di raggio razionale centrate nei punti di un numerabile denso.*

ESERCIZIO 4.6. *Dimostrare che se  $(X, d)$  è uno spazio metrico e  $Q$  è numerabile e denso in  $X$  allora l'insieme  $\{B(q, \varepsilon) : q \in Q, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$  è una base della topologia indotta da  $d$ .*

ESERCIZIO 4.7.  $\mathbb{R}^2$  con la topologia dell'ordine lessicografico è separabile? È localmente numerabile? È a base numerabile?

ESEMPIO 4.8. *La topologia discreta è localmente numerabile, infatti ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni fatto da un solo punto: lui stesso.*

ESEMPIO 4.9. *Sia  $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  con la topologia generata dalla topologia discreta su  $\mathbb{R}$ . Gli aperti di tale topologia sono  $X$ , il vuoto e tutti e soli i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  (infinito escluso). Quindi la chiusura di  $\{\infty\}$  è tutto  $X$ . Quindi  $X$  è separabile perchè ha un sottoinsieme fatto da un punto che è denso in  $X$ . In oltre  $X$  è localmente numerabile: una base di intorni di  $x \in \mathbb{R}$  è  $\{x\}$  mentre una base di intorni di  $\infty$  è  $X$ , quindi ogni punto ha una base di intorni con un elemento. Infine,  $X$  non è a base numerabile perchè una base deve necessariamente contenere gli insiemi di tipo  $\{x\}$  e quindi non può essere numerabile perchè  $\mathbb{R}$  non lo è.*

ESEMPIO 4.10.  $\omega_1$  è localmente numerabile, infatti ogni intervallo limitato di  $\omega_1$  è numerabile e per ogni  $x \in \omega_1$  una base locale di intorni di  $x$  è formata dai sottointervalli di  $[0, x + 1)$  che contengono  $x$ . (Perché?)

ESEMPIO 4.11.  $\omega_1$  non è separabile. Infatti siccome  $\text{cof}(\omega_1) = \omega_1$ , ogni sottoinsieme numerabile di  $\omega_1$  è limitato. Quindi non può essere denso. (Perché?)

ESERCIZIO 4.12. *Dimostrare che  $\omega_1$  non è a base numerabile. (Suggerimento: procurarsi una quantità non numerabile di aperti disgiunti.)*

ESERCIZIO 4.13 (Questo è difficile, ma si può fare con filtri su  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  oppure a mano in  $\mathbb{R}$ ). *Trovare un'insieme  $X$  con due topologie  $\tau$  e  $\sigma$ . Con  $\sigma$  che non sia a base numerabile ma  $\tau$  più fine di  $\sigma$  (e quindi con più aperti) e a base numerabile.*

### 5. Continuità in spazi topologici e omeomorfismi

**Teorema 5.1.** *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $A \subseteq X$ . Un punto  $x \in A$  è interno se e solo se per ogni insieme diretto  $\alpha$ , se  $(x_i)_{i \in \alpha}$  è una  $\alpha$ -successione convergente a  $x$  allora  $x_i \in A$  definitivamente in  $\alpha$ .*

*In particolare  $A$  è aperto se e solo se per ogni  $x \in A$  e per ogni insieme diretto  $\alpha$ , se  $(x_i)_{i \in \alpha}$  è una  $\alpha$ -successione convergente a  $x$  allora  $x_i \in A$  definitivamente in  $\alpha$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dire che  $x$  è interno ad  $A$  è equivalente per definizione a dire che  $A$  è un intorno di  $x$ . Se  $x_i \rightarrow x \in A$  e  $A$  è un intorno di  $x$  allora per definizione di convergenza  $x_i \in A$  definitivamente in  $i$ . Viceversa, supponiamo che  $A$  non sia un intorno di  $x$ , cioè  $x$  non è interno ad  $A$ . Sia  $I = \mathcal{F}(x)$  il filtro degli intorni di  $x$ .

Per ogni  $B \in I$  esiste  $x_B \in B \cap A^c$  perchè  $x$  non è interno ad  $A$ . La  $I$ -successione  $(x_B)_{B \in I}$  converge a  $x$ : Infatti, per ogni intorno  $U$  di  $x$ , per ogni  $B > U$  si ha  $x_B \in B \subset U$ . Quindi  $x_B$  sta dentro  $U$  definitivamente in  $I$ . Quindi se  $A$  non è un intorno di  $x$  abbiamo trovato una successione  $x_B$  che converge a  $x$  ma  $x_B \notin A$ .  $\square$

**ESERCIZIO 5.2.** *Dimostrare che un sottoinsieme di uno spazio topologico è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le sue successioni generalizzate.*

**ESERCIZIO 5.3.** *Dare un esempio di spazio topologico  $(X, \tau)$  che contenga un sottoinsieme  $A$  che non sia chiuso ma tale che  $A$  contenga tutti i limiti di  $\omega$ -successioni in  $A$ .*

**Definizione 5.4.** *Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $x \in X$ . Esso si dice isolato in  $X$  (o semplicemente isolato) se  $\{x\}$  è aperto in  $X$ .*

Si noti che se  $x$  è isolato in  $x$  allora  $\text{cof}(\mathcal{F}(x)) = 1$ .

**ESEMPIO 5.5.** *Sia  $\alpha$  un ordinale con la topologia dell'ordine. Allora  $x \in \alpha$  è isolato se è nullo o successore.*

**ESEMPIO 5.6.** *Il punto  $2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  è isolato in  $\mathbb{N}$  ma non in  $\mathbb{R}$ .*

**ESEMPIO 5.7.** *Una topologia è la discreta se e solo se ogni punto è isolato. (perché?)*

Passiamo adesso alla nozione di funzione continua. Con in mente la Definizione 1.18 ed il Teorema 4.2 diamo la definizione di continuità per spazi topologici.

**Definizione 5.8** (Funzioni continue). *Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice continua se per ogni  $A \in \sigma$  si ha  $f^{-1}(A) \in \tau$ . Cioè se  $f^{-1}(\text{aperto})$  è aperto.*

**ESEMPIO 5.9.** *Se  $X$  ha la topologia discreta ogni funzione da  $X$  a qualsiasi spazio è continua.*

**ESEMPIO 5.10.** *Se  $Y$  ha la topologia banale ogni funzione da qualsiasi spazio verso  $Y$  è continua.*

**ESEMPIO 5.11.** *Siano  $\tau$  e  $\sigma$  due topologie su  $X$ . Allora  $\tau$  è più fine di  $\sigma$  se e solo se l'identità da  $(X, \tau)$  a  $(X, \sigma)$  è continua. (Perché?)*

**Teorema 5.12.** *Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici. Allora una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua se e solo se per ogni  $C$  chiuso in  $Y$  si ha che  $f^{-1}(C)$  è chiuso in  $X$ .*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è un facile esercizio lasciato al lettore (si passi ai complementari nella definizione di continuità).  $\square$

**Definizione 5.13** (Continuità in un punto). *Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici e sia  $x \in X$ . Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice continua in  $x$  se per ogni intorno  $A$  di  $f(x)$  si ha che  $f^{-1}(A)$  è un intorno di  $x$ .*

Le due definizioni sono coerenti:

**Teorema 5.14** (Continuità in ogni punto). *Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici e sia  $x \in X$ . Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua se e solo se è continua in ogni punto di  $X$ .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo  $f$  continua e sia  $x \in X$ . Sia  $A$  un intorno di  $f(x)$ . Allora per definizione  $f(x)$  è interno ad  $A$  e quindi esiste un aperto  $B$  tale che  $f(x) \in B \subseteq A$ . Siccome  $f$  è continua  $f^{-1}(B)$  è un aperto. Siccome contiene  $x$  ne è un intorno. In oltre  $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A)$  e quindi quest'ultimo risulta un intorno di  $x$ .

Viceversa, supponiamo  $f$  continua in ogni punto. Sia  $A$  un aperto di  $Y$ , dunque esso è un intorno di ogni suo punto. Sia  $x \in f^{-1}(A)$ . Siccome  $f$  è continua in  $x$  e  $A$  è un intorno di  $f(x)$ , si ha che  $f^{-1}(A)$  è un intorno di  $x$ . Quindi ogni  $x \in f^{-1}(A)$  è interno e quindi  $f^{-1}(A)$  è aperto.  $\square$

Si noti che queste definizioni non fanno uso di ordinali. Ma visto che li abbiamo fatti li possiamo usare. (Anche se la definizione più comoda in generale è quella con gli aperti.)

**Teorema 5.15** (Continuità per  $\alpha$ -successioni). *Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua in  $x \in X$  se e solo se per ogni insieme diretto  $\alpha$  e per ogni  $\alpha$ -successione  $(x_i)_{i \in \alpha}$  che converge a  $x$  si ha  $f(x_i) \rightarrow x$ .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo  $f$  continua in  $x$  e sia  $x_i \rightarrow x$  un  $\alpha$ -successione. Per ogni intorno  $A$  di  $f(x)$  si ha che  $f^{-1}(A)$  è un intorno di  $x$  e quindi  $x$  è interno a  $f^{-1}(A)$ . Per il Teorema 5.1 la successione  $x_i$  sta in  $f^{-1}(A)$  definitivamente in  $\alpha$  e quindi la successione  $f(x_i)$  sta in  $A$  definitivamente in  $\alpha$ . Quindi  $f(x_i) \rightarrow x$ .

Viceversa, se  $f$  non è continua in  $x$ , esiste un intorno  $A$  di  $f(x)$  tale che  $f^{-1}(A)$  non sia un intorno di  $x$ . Per il Teorema 5.1 esiste un insieme diretto  $\beta$  e una  $\beta$ -successione  $x_i$  tale che  $x_i \rightarrow x$  e  $x_i \in (f^{-1}(A))^c$ . Per cui  $f(x_i) \notin A$  mentre  $f(x) \in A$ . Dunque

$$f(x_i) \not\rightarrow f(x).$$

$\square$

Visto il Teorema 5.1 ed il corrispondente Esercizio 5.2 (l'hai fatto?) quest'ultimo teorema è in realtà equivalente al seguente enunciato, di cui diamo però una dimostrazione alternativa.

**Teorema 5.16** (Continuità per chiusura). *Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua se e solo se per ogni sottoinsieme  $A \subset X$  si ha*

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** In termini di  $\alpha$ -successioni questo teorema segue immediatamente dal precedente, ma visto che lo si può enunciare senza far uso degli insiemi diretti, dimostriamolo senza.

Se  $f$  è continua allora  $f^{-1}(\overline{f(A)})$  è chiuso. In oltre  $f^{-1}(\overline{f(A)})$  contiene  $A$  e quindi contiene  $\bar{A}$ . Quindi

$$f(\bar{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) = \overline{f(A)}.$$

Viceversa, sia  $C$  un qualsiasi chiuso di  $Y$  e sia  $A = f^{-1}(C)$ . Per ipotesi si ha

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(C))} = \bar{C} = C$$

per cui

$$f^{-1}(C) \supseteq f^{-1}(f(\bar{A})) = \bar{A} = \overline{f^{-1}(C)}$$

e quindi  $f^{-1}(C)$  contiene la sua chiusura e dunque è chiuso.  $\square$

**Definizione 5.17** (Omeomorfismi). *Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice omeomorfismo se è invertibile e se sia  $f$  che  $f^{-1}$  sono continue.*

**ESEMPIO 5.18.**  $\omega + 1$  con la topologia dell'ordine il sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  definito da  $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  sono omeomorfi.

**ESEMPIO 5.19.**  $\omega^2 = \omega\omega = \omega + \omega + \omega + \dots$  con la topologia dell'ordine il sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  definito da  $\{\frac{k}{n+1} : k, n \in \mathbb{N}\}$  sono omeomorfi.

Due spazi omeomorfi hanno le stesse caratteristiche topologiche, per esempio le stesse successioni convergenti, gli stessi filtri di intorni etc...

**ESEMPIO 5.20.**  $\omega_1$  e  $\mathbb{R}$  non sono omeomorfi. Infatti in  $\omega_1$  ogni  $\omega$ -successione ha un punto di accumulazione (esercizio: dimostrarlo), mentre in  $\mathbb{R}$  ci sono  $\omega$ -successioni illimitate. (Ma anche perchè in  $\mathbb{R}$  non ci sono punti isolati, mentre  $\omega_1$  ne è pieno.)

**ESEMPIO 5.21.**  $\omega_1$  e  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$  non sono omeomorfi. Infatti  $S^2$  è separabile,  $\omega_1$  no. (Oppure perchè  $S^2$  non ha punti isolati.)

**ESEMPIO 5.22.**  $\omega_1$  e  $\omega_1 + \omega_1$  non sono omeomorfi. Infatti  $\omega_1$  è localmente numerabile,  $\omega_1 + \omega_1$  no. Questo perchè il filtro degli intorni di  $\omega_1 \in \omega_1 + \omega_1$  non è numerabile perchè  $\text{cof}(\omega_1) = \omega_1$ .

**ESEMPIO 5.23.**  $\omega + 1$  e  $\omega + 2$  sono omeomorfi. Infatti, ricordando il fatto che  $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\}$ , si può costruire un omeomorfismo esplicito  $f : \omega + 2 \rightarrow \omega + 1$  ponendo

$$\begin{cases} f(n) = n + 1 & n \in \omega \\ f(\omega) = \omega \\ f(\omega + 1) = 0 \end{cases}$$

**ESERCIZIO 5.24.** Dimostrare che quello appena descritto è un omeomorfismo.

ESERCIZIO 5.25.  $\omega$  e  $\omega + 1$  sono omeomorfi?

ESERCIZIO 5.26.  $\omega + 1$  e  $\omega + \omega$  sono omeomorfi?

SOLUZIONE. No. Supponiamo che esista un omeomorfismo  $f : \omega + \omega \rightarrow \omega + 1$  allora  $f(\omega) = \omega$  perchè  $\omega$  è l'unico punto che non è isolato sia in  $\omega + 1$  che in  $\omega + \omega$  (Si ricordi che  $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ , quindi  $\omega$  è un elemento sia di  $\omega + 1$  che di  $\omega + \omega$ .) Sia  $A = [0, \omega + 2)$ . Esso è un intorno aperto di  $\omega$  in  $\omega + \omega$ . Quindi  $f(A)$  è un intorno aperto di  $\omega$  in  $\omega + 1$ . Ne segue che  $f(A)^c$  è costituito da un numero finito di elementi e quindi non può essere in relazione biunivoca con  $A^c = [\omega + 2, \infty)$  che è infinito.  $\square$

ESERCIZIO 5.27.  $\omega + \omega$  e  $\omega + \omega + \omega$  sono omeomorfi?

**Definizione 5.28** (Mappe aperte). *Siano  $X, Y$  due spazi topologici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice aperta se per ogni aperto  $A$  di  $X$ , si ha  $f(A)$  aperto in  $Y$ .*

ESEMPIO 5.29. La proiezione da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  definita da  $f(x, y) = x$  è aperta. (Perché?)

ESEMPIO 5.30. La funzione  $f(x) = x^2$  non è aperta da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  (per esempio la sua immagine non è un aperto di  $\mathbb{R}$ ). Lo è da  $\mathbb{R}$  a  $[0, \infty)$ . (Perché?)

**Definizione 5.31** (Mappe chiuse). *Siano  $X, Y$  due spazi topologici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice chiusa se per ogni chiuso  $C$  di  $X$ , si ha  $f(C)$  chiuso in  $Y$ .*

ESEMPIO 5.32. L'inclusione da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^2$  data da  $f(x) = (x, 0)$  è chiusa. (Perché?)

ESERCIZIO 5.33. La funzione  $f(x) = x^2$  è chiusa da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^2$ ?

ESERCIZIO 5.34. Sia  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  il grafico della funzione  $1/x$  e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  la restrizione della proiezione  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dica se  $f$  è aperta/chiusa.

ESERCIZIO 5.35. Sia  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  il grafico della funzione  $e^x$  e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  la restrizione della proiezione  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dica se  $f$  è aperta/chiusa.

ESERCIZIO 5.36. Sia  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  la circonferenza unitaria e sia  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  la restrizione della proiezione  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dica se  $f$  è aperta/chiusa.

**Teorema 5.37.** *Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se è continua, bigettiva e aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $f$  è un omeomorfismo allora è bigettiva e continua. In oltre, siccome  $f^{-1}$  è continua, per ogni aperto  $A$  di  $X$  si ha  $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$  è aperto in  $Y$  e dunque  $f$  è anche aperta. Viceversa se  $f$  è continua e bigettiva, dire che  $f$  è aperta equivale a dire che  $f^{-1}$  sia continua.  $\square$

**Teorema 5.38.** *Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se è continua, bigettiva e chiusa.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è uguale alla precedente ed è lasciata per esercizio.  $\square$

---

<sup>2</sup>SI, Perché?

**ESERCIZIO 5.39.** Tradurre le condizioni di essere una funzione aperta/chiusa in termini di convergenza di  $\alpha$ -successioni.

Il seguente è un teorema, la cui dimostrazione richiede tecniche complicate, che non faremo in tempo a sviluppare durante il corso. Ma fa comodo saperlo.

**Teorema 5.40** (Teorema dell'invarianza del dominio). *Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e iniettiva è aperta. (Si intende che  $\mathbb{R}^n$  sia dotato della usuale topologia euclidea.)*

**Corollario 5.41** (Gli  $\mathbb{R}^n$  non sono omeomorfi tra loro). *Se  $n \neq m$  allora  $\mathbb{R}^n$  non è omeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ . (Con le usuali topologie Euclidee.)*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $n \neq m$  possiamo supporre  $m > n$ . L'inclusione  $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  data da

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

è continua rispetto alle topologie Euclidee ed in oltre è ovviamente iniettiva. Se esistesse un omeomorfismo  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , allora la composizione  $g = i \circ f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  sarebbe continua e iniettiva e dunque aperta. Ma l'immagine di  $g$  è contenuta in  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$  che ha parte interna vuota in  $\mathbb{R}^m$  e quindi  $g$  non può essere aperta. Ciò contraddirebbe il teorema di invarianza del dominio.  $\square$

Tutte le dimostrazioni che conosco di questo corollario fanno uso di strumenti di topologia algebrica. Ve ne sono però alcune che usano "solo" il teorema del punto fisso di Brouwer (per dimostrare l'invarianza del dominio). Il teorema di Brouwer, uno dei classici della topologia algebrica (che ahimé non arriveremo a trattare) ha però anche una dimostrazione meravigliosa di Milnor, che ne attribuisce il metodo a D. Asimov, che si basa sul fatto che  $\sqrt{x}$  non è un polinomio.

Diffidate da chi vi propone dimostrazioni a buon mercato del fatto che  $\mathbb{R}^5$  non è omeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ !<sup>3</sup>

## 6. Topologia indotta da una funzione, sottospazi e immersioni

Data una funzione  $f$ , la si può sempre rendere continua nel modo più economico possibile. Il seguente enunciato è una Definizione/Teorema che rende precisa tale affermazione.

**Teorema 6.1** (Definizione di topologia indotta da  $f$ ). *Siano  $X, Y$  insiemi qualsiasi e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione qualsiasi.*

- (1) *Se  $\tau$  è una topologia su  $X$  allora esiste unica topologia  $\sigma$  su  $Y$  che rende continua  $f$  e che sia la più fine tra quelle che rendono continua  $f$ . Tale topologia si chiama topologia indotta da  $f$  su  $Y$ . Esplicitamente*

$$\sigma = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \tau\}$$

---

<sup>3</sup>Oh, comunque magari esiste una dimostrazione semplice che  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  sono diversi. Se la trovate fatemelo sapere.



- (2) Se  $\sigma$  è una topologia su  $Y$  allora la topologia pull-back su  $X$ , o topologia indotta da  $f$  su  $X$  è la topologia  $\tau$  meno fine che rende la  $f$  continua. Esplicitamente,  $\tau$  è l'intersezione di tutte le topologie che rendono continua la  $f$ , e si ha

$$\tau = \{f^{-1}(A) : A \in \sigma\}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione si basa sul fatto che se  $A_i$  è una famiglia di sottoinsiemi di  $Y$  si ha

$$f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i) \quad f^{-1}(\cap_i A_i) = \cap_i f^{-1}(A_i).$$

Ne segue che, nel primo caso  $\sigma$  e nel secondo  $\tau$ , entrambe sono topologie. Dalla definizione di continuità segue che, nel primo caso,  $\sigma$  contiene ogni topologia che rende continua la  $f$ ; nel secondo,  $\tau$  è contenuta in ogni topologia che rende continua la  $f$ .  $\square$

**Definizione 6.2** (Sottospazio topologico). Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $Y \subset X$ . La topologia indotta da  $X$  su  $Y$  è la topologia indotta dall'inclusione  $i : Y \rightarrow X$ . Lo spazio  $Y$  dotato della topologia indotta si dice sottospazio di  $X$ .

**ESEMPIO 6.3.** Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è un sottospazio topologico di  $\mathbb{R}^n$  (con le usuali topologie indotte dalla metrica Euclidea).

**ESERCIZIO 6.4.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $\tau$  la topologia indotta da  $d$  su  $X$ . Sia  $Y \subseteq X$  e sia  $\tau_Y$  la topologia indotta da  $\tau$  su  $Y$ . Sia  $d_Y$  la distanza indotta da  $d$  su  $Y$  e sia  $\sigma$  la distanza indotta da  $d_Y$  su  $Y$ . Dimostrare che  $\tau_Y = \sigma$ .

**ESERCIZIO 6.5.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $Y \subset X$  un sottospazio. Dimostrare che  $A \subseteq Y$  è aperto in  $Y$  se e solo se esiste un aperto  $B \in \tau$  tale che  $A = Y \cap B$ .

**ESERCIZIO 6.6.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $Y \subset X$  un sottospazio. Dimostrare che  $A \subseteq Y$  è chiuso in  $Y$  se e solo se esiste un chiuso  $B$  di  $X$  tale che  $A = Y \cap B$ .

**ESERCIZIO 6.7.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $Y \subset X$  un sottospazio. Dimostrare che se  $A \subseteq Y$  è aperto in  $Y$  e  $Y$  è aperto in  $X$  allora  $A$  è aperto in  $X$ .

**ESERCIZIO 6.8.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $Y \subset X$  un sottospazio. Dimostrare che se  $A \subseteq Y$  è chiuso in  $Y$  e  $Y$  è chiuso in  $X$  allora  $A$  è chiuso in  $X$ .

**ESERCIZIO 6.9.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $Y \subset X$  un sottospazio. Dare un esempio di un sottoinsieme  $A \subseteq Y$  che sia chiuso in  $Y$  e aperto in  $X$ .

**ESERCIZIO 6.10.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $Y \subset X$  un sottospazio. Dare un esempio di un sottoinsieme  $A \subseteq Y$  che sia aperto in  $Y$  e chiuso in  $X$ .

**Definizione 6.11** (Immersione topologica). Siano  $X, Y$  due spazi topologici. Una funzione  $f : Y \rightarrow X$  si dice immersione topologica se è continua ed è un omeomorfismo tra  $Y$  e  $f(Y)$ .

In altre parole un'immersione  $f$  da  $(Y, \tau)$  in uno spazio topologico è una funzione continua, iniettiva e tale che la topologia indotta da  $f$  su  $Y$  coincida con  $\tau$ .

ESEMPIO 6.12. *L'inclusione di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^2$  con le topologie standard è un'immersione.*

ESEMPIO 6.13. *Sia  $X = (-\infty, \pi)$  con la topologia standard e sia*

$$f(x) = \begin{cases} (x, 0) & x < -\pi \\ \pi(\cos x, \sin x) & x \in [-\pi, \pi) \end{cases}$$

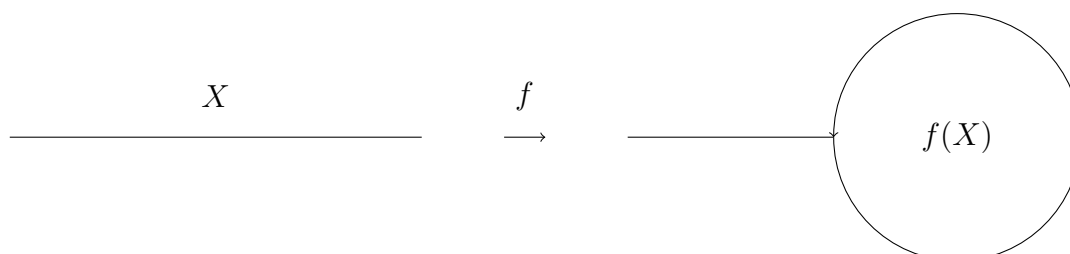


FIGURA 1. La funzione  $f$

*La funzione  $f$  non è un'immersione da  $X$  in  $\mathbb{R}^2$  standard perché gli intorno di  $-\pi$  con la topologia indotta contengono tutti insiemi del tipo  $(\pi - \varepsilon, \pi)$ . Si noti che  $f$  è continua e iniettiva, quindi è una bijezione continua tra  $Y$  e la sua immagine.*

ESERCIZIO 6.14. *Sia  $f$  come nell'esempio precedente. Si dimostri che  $f^{-1}$  non è continua.*

**Teorema 6.15** (Teorema dell'immersione aperta). *Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua e iniettiva tra spazi topologici. Se  $f$  è aperta allora è un'immersione.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome  $f$  è aperta  $f(X)$  è un aperto di  $Y$  e chiaramente  $f$  è una biiezione tra  $X$  e  $f(X)$ . In particolare, la topologia di  $X$  coincide con quella indotta da  $f$  e quindi  $X$  è omeomorfo a  $f(X)$  tramite  $f$ .  $\square$

ESERCIZIO 6.16 (Teorema dell'immersione chiusa). *Dimostrare che se  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione continua e iniettiva e chiusa tra spazi topologici, allora è un'immersione.*

**Definizione 6.17** (Immersioni aperte/chiusure). *Un'immersione topologica aperta si dice immersione aperta. Un'immersione topologica chiusa si dice immersione chiusa.*

Visto che le immersioni sono parametrizzazioni di sottospazi topologici, le immersioni aperte corrispondono a sottospazi aperti, quelle chiuse a sottospazi chiusi.

ESEMPIO 6.18. *L'immersione  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da  $(x, y) \rightarrow (x, y, 0)$  è un'immersione chiusa.*

ESEMPIO 6.19. *L'immersione  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $(x, y) \rightarrow (x, y)$  è un'immersione aperta.*

ESEMPIO 6.20. *L'immersione  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  data da  $f(z) = 1/z$  è un'immersione aperta.*

ESEMPIO 6.21. *La funzione  $f(x, y) = (e^x, e^y)$  è un'immersione aperta da  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

## 7. Prodotti

Cominciamo col caso facile del prodotto di due spazi.

**Definizione 7.1** (Topologia prodotto). *Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici. Sia  $X \times Y$  il prodotto cartesiano dei due, ossia  $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ . Siano  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  e  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  le proiezioni naturali  $\pi_X(x, y) = x$  e  $\pi_Y(x, y) = y$ .*

*La topologia prodotto  $\tau \times \sigma$  è la topologia meno fine che rende continue  $\pi_X$  e  $\pi_Y$*

**Teorema 7.2.** *Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici. Allora la topologia prodotto è generata dagli insiemi di tipo  $A \times B$  con  $A \in \tau$  e  $B \in \sigma$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\pi_X$  è continua, allora per ogni  $A \in \tau$  si ha che  $A \times Y$  deve essere aperto. Allo stesso modo, se  $\pi_Y$  è continua per ogni  $B \in \sigma$  si ha che  $X \times B$  deve essere aperto. Quindi la loro intersezione  $A \times B$  deve essere un aperto. Quindi ogni topologia che rende continue le proiezioni, contiene la topologia  $\rho$  generata dagli insiemi di tipo  $A \times B$ . D'altronde  $\rho$  rende continue le proiezioni. Infatti se  $A$  è un aperto di  $X$  allora  $\pi_X^{-1}(A) = A \times Y \in \rho$ , quindi  $\pi_X$  è continua. Stesso discorso per  $\pi_Y$ .  $\square$

**Teorema 7.3.** *Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  due spazi topologici e siano  $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I_X}$  una base di  $\tau$  e  $\mathcal{B} = (B_j)_{j \in I_Y}$  una base di  $\sigma$ . Allora la famiglia  $\mathcal{C} = \{A_i \times B_j : i \in I_X, j \in I_Y\}$  è una base di  $\tau \times \sigma$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome la topologia prodotto è generata dagli insiemi di tipo  $A \times B$  con  $A, B$  aperti, una sua base è formata dalla famiglia  $\mathcal{F}$  di tutte le intersezioni finite di tali insiemi. (Teorema 1.37.) In particolare,  $\mathcal{C} \subseteq \tau \times \sigma$ .

In generale, per ogni  $A, B, C, D$  vale

$$(A \times B) \cap (C \times D) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in A, y \in B, \text{ e } x \in C, y \in D\} = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Ne segue che intersezioni finite di prodotti di aperti sono prodotti di aperti.

Siccome  $\mathcal{A}$  è una base di  $\tau$ , per ogni aperto  $A$  di  $X$  esiste  $S_A \subset I_X$  tale che

$$A = \bigcup_{i \in S_A} A_i$$

e similmente

$$\forall B \in \sigma \exists S_B \subset I_Y : B = \bigcup_{j \in S_B} B_j$$

Ne segue che

$$A \times B = \bigcup_{i \in S_A} \bigcup_{j \in S_B} A_i \times B_j$$

dunque ogni elemento di  $\mathcal{F}$  è unione di elementi di  $\mathcal{C}$ , che quindi risulta essere una base di  $\tau \times \sigma$ .  $\square$

**Corollario 7.4.** *Se  $X$  e  $Y$  sono a base numerabile allora anche  $X \times Y$  lo è.*

**DIMOSTRAZIONE.** Deriva immediatamente dal teorema precedente.  $\square$

**ESERCIZIO 7.5.** *Dimostrare che la topologia Euclidea di  $\mathbb{R}^2$  è il prodotto delle topologie Euclidee di  $\mathbb{R}$ .*

**ESERCIZIO 7.6.** *Sia  $\tau$  la topologia discreta su  $\mathbb{R}$  e  $\sigma$  quella banale. Si dica chi sono gli aperti di  $\tau \times \sigma$ .*

**ESERCIZIO 7.7.** *Sia  $\tau$  la topologia dell'ordine lessicografico su  $\mathbb{R}^2$ . Su  $\mathbb{R}$  siano  $\sigma$  la topologia discreta ed  $\varepsilon$  quella Euclidea. Si dimostri che  $\tau = \sigma \times \varepsilon$ .*

Il prodotto si può fare di una quantità di spazi qualsiasi.

**ESERCIZIO 7.8.** *Siano  $(X, \tau), (Y, \sigma), (Z, \rho)$  tre spazi topologici, dimostrare su  $X \times Y \times Z$  le topologie  $(\tau \times \sigma) \times \rho$  e  $\tau \times (\sigma \times \rho)$  coincidono.*

In generale, se  $(X_i)_{i \in I}$  è una famiglia finita di spazi topologici, il loro prodotto può essere definito ricorsivamente.

Più in generale ancora, se  $(X_i)_{i \in I}$  è una famiglia qualsiasi di insiemi, assumendo l'assioma di scelta si può definire il prodotto

$$\prod_{i \in I} X_i$$

come l'insieme delle  $I$ -uple  $(x_i)_{i \in I}$  ove  $x_i \in X_i$  per ogni  $i \in I$ . (L'assioma di scelta ci dice che tale insieme di  $I$ -uple è non vuoto.)

Nel caso semplice in cui gli  $X_i$  sono tutti lo stesso insieme  $X$ , allora

$$\prod_{i \in I} X = X^I = \{f : I \rightarrow X\}$$

(e questo è sempre non vuoto perché è un sottoinsieme di  $I \times X$ )

**Definizione 7.9** (Topologia prodotto infinito). *Sia  $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$  una famiglia qualsiasi di spazi topologici e siano  $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  le proiezioni naturali. La topologia prodotto  $\prod_{i \in I} \tau_i$  è la meno fine che rende continue tutte le proiezioni.*

Anche se le definizioni sono uguali, quando si fanno prodotti infiniti c'è una piccola sottigliezza a cui stare attenti.

**Teorema 7.10.** *Sia  $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$  una famiglia qualsiasi di spazi topologici. Allora la topologia prodotto è generata dagli insiemi  $\prod_{i \in I} A_i$  ove  $A_i \in \tau_i$  e*

$$A_i \neq X_i \quad \text{solo per un numero finito di indici}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\pi_i$  è continua, allora per ogni  $A_i \in \tau_i$ , ponendo  $A_j = X_j$  per  $j \neq i$ , si ha che  $\prod_{i \in I} A_i$  deve essere aperto. Quindi ogni intersezione finita di tali insiemi deve essere un aperto. Quindi ogni topologia che rende continue le proiezioni, contiene la topologia  $\rho$  generata dagli insiemi di tipo  $\prod_{i \in I} A_i$  con solo un numero finito di  $A_i$  diversi da tutto lo spazio. D'altronde per come è definita,  $\rho$  rende continue le proiezioni.  $\square$

**Teorema 7.11.** *Sia  $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$  una famiglia qualsiasi di spazi topologici e per ogni  $i$  sia  $\mathcal{B}_i$  una base di  $\tau_i$ . Allora una base della topologia prodotto è formata dalla famiglia  $\mathcal{C} = \{\prod_{i \in I} A_i : A_i \neq X_i \text{ solo per un numero finito di indici e } A_i \in \mathcal{B}_i\}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La topologia prodotto è generata dalla famiglia  $\mathcal{F}$  di insiemi del tipo  $\Pi A_i$  con  $A_i \neq X_i$  solo per un numero finito di indici. La famiglia  $\mathcal{F}$  è chiusa per intersezione finita e dunque è una base della topologia prodotto. Per ogni  $A_i \neq X_i$  esistono elementi  $(B_i^j)_{j \in S_i}$  tali che  $A_i = \cup_j B_i^j$ . Quindi, ponendo  $S_i = \{1\}$  se  $A_i = X_i$  e  $B_i^1 = X_i$ ,

$$\Pi_i A_i = \cup_i \cup_{j \in S_i} \Pi_i B_i^j.$$

Ne segue che  $\mathcal{C}$  è una base della topologia prodotto.  $\square$

Si ricordi che gli aperti della topologia prodotto non sono necessariamente dei prodotti. Per esempio  $B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$  è aperto ma non è un prodotto.

**Teorema 7.12** (Le proiezioni sono aperte). *Sia  $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$  una famiglia qualsiasi di spazi topologici, sia  $X = \Pi X_i$  con topologia prodotto. Ogni proiezione naturale  $\pi_j : \Pi X_i \rightarrow X_j$  è aperta.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $U \subset \Pi X_i$  un aperto. Si deve dimostrare che ogni  $x \in \pi_j(U)$  è un punto interno di  $\pi_j(U)$ . Se  $x \in \pi_j(U)$  allora esiste  $(x_i)_{i \in I} \in U$  con  $x_j = x$ . Siccome  $U$  è aperto,  $(x_i)$  è interno ad  $U$ . Esiste quindi un elemento della base  $A = \Pi_i A_i$  contenuto in  $U$  e contenente  $(x_i)$ . Chiaramente  $A_j \subseteq \pi_j(U)$  è un aperto contenente  $x$ . Quindi  $x$  è interno a  $\pi_j(U)$ .  $\square$

Occhi che le proiezioni non sono in generale chiuse.

**ESEMPIO 7.13.** *La proiezione da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  data da  $f(x, y) = x$  non è chiusa. Infatti il grafico dell'iperbole  $xy = 1$  è un chiuso in  $\mathbb{R}^2$  ma la sua proiezione è  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  che non è chiuso.*

**Teorema 7.14.** *Sia  $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$  una famiglia qualsiasi di spazi topologici e sia  $X = \Pi X_i$  con topologia prodotto. Sia  $(x_n)$  una successione in  $X$ . Allora  $x_n \rightarrow x \in X$  se e solo se per ogni  $i \in I$  si ha  $\pi_i(x_n) \rightarrow \pi_i(x)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $x_n \rightarrow x$ , siccome le proiezioni sono continue, allora  $\pi_i(x_n) \rightarrow \pi_i(x)$  per ogni  $i \in I$ . Vediamo il viceversa. Usiamo la base della topologia prodotto data da Teorema 7.10. Per ogni intorno  $U$  di  $x$  in  $X$  esiste un elemento della  $A$  base tale che  $x \in A$ . L'aperto  $A$  sarà della forma

$$A = \Pi_i A_i$$

con  $A_i \neq X_i$  solo per un numero finito di indici. Siccome  $\pi_i(x_n) \rightarrow \pi_i(x)$  per ogni  $i$ , esiste  $n_0 > 0$  tale che per ogni  $n > n_0$  e ogni  $i \in I$  si ha

$$\pi_i(x_n) \in A_i.$$

Dunque  $x_n \in A \subseteq U$  definitivamente e quindi  $x_n \rightarrow x$ .  $\square$

**Corollario 7.15.** *Siano  $X, Y$  due spazi topologici. La topologia della convergenza puntuale su  $X^Y$  (che è lo spazio delle funzioni da  $Y$  a  $X$ ) è quella prodotto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Segue immediatamente dal teorema precedente con  $I = Y$  e  $X_i = X$  per ogni  $i \in Y$ .  $\square$

**Teorema 7.16.** *Sia  $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$  una famiglia qualsiasi di spazi topologici e sia  $X = \prod X_i$  con topologia prodotto. Sia  $X$  uno spazio topologico e per ogni  $i \in I$  sia  $f_i : X \rightarrow X_i$  una funzione. Sia  $f : X \rightarrow \prod X_i$  la funzione definita da*

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

*essa è continua se e solo se ogni  $f_i$  lo è.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $f$  è continua, siccome  $f_i = \pi_i \circ f$  e le proiezioni sono continue, allora ogni  $f_i$  è continua. Viceversa, supponiamo che ogni  $f_i$  sia continua. Sia  $B$  un aperto in  $\prod X_i$ . Si deve dimostrare che  $f^{-1}(B)$  è aperto in  $X$ . Basta dimostrare che ogni  $x \in f^{-1}(B)$  è interno a  $f^{-1}(B)$ . Siccome  $f(x)$  è interno a  $B$ , esiste un insieme della base della topologia prodotto  $A = \prod A_i$  tale che  $f(x) \in A \subseteq B$ . Siccome  $A_i$  è aperto in  $X_i$ , per continuità l'insieme  $f_i^{-1}(A_i)$  è aperto in  $X$ .

In  $A$ , solo un numero finito degli aperti  $A_i$  è diverso da  $X_i$ . Ne segue che

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} = \{x \in X : f_i(x) \in A_i \forall i\} = \bigcap_i f_i^{-1}(A_i)$$

è in realtà un'intersezione finita di aperti di  $X$  e quindi è un aperto. Per costruzione  $x \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$ . Quindi  $x$  è interno ad  $f^{-1}(B)$ .  $\square$

## 8. Quozienti

**Definizione 8.1** (Quozienti). *Sia  $X$  un insieme e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ . Si denota con  $X/\sim$  il quoziente di  $X$  e con  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  la proiezione naturale  $x \mapsto [x]$ .*

*Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  si dice saturo se  $x \in A, y \sim x \Rightarrow y \in A$ . In altre parole  $A$  è saturo se è unione di classi di equivalenza. In altre parole  $A$  è saturo se  $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ .*

*Il saturato di un sottoinsieme  $A$  è il più piccolo saturo contenente  $A$ ; esso coincide con l'intersezione di tutti i saturi contenenti  $A$  o, equivalentemente, con l'unione di tutte le classi di equivalenza di elementi di  $A$ .*

**ESERCIZIO 8.2.** *Sia  $X$  un insieme e  $\sim$  una relazione d'equivalenza su  $X$ . Se  $A \subset B$  allora il saturato di  $A$  è contenuto nel saturato di  $B$ .*

**Definizione 8.3** (Topologia quoziente). *Sia  $X$  un insieme e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ . Per ogni topologia su  $X$ , si definisce la topologia quoziente come la topologia indotta da  $\pi$  su  $X/\sim$  (e cioè la più fine che rende  $\pi$  continua).*

In altre parole gli aperti di  $X/\sim$  sono tutte e sole le proiezioni di aperti saturi di  $X$ .

Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $\sim$  una relazione d'equivalenza. Sia  $\sigma$  la topologia quoziente su  $X/\sim$ . La topologia pull-back, tramite  $\pi$ , di  $\sigma$  su  $X$  è quella formata da tutti gli aperti saturi di  $\tau$ . È chiaramente meno fine di  $\tau$ .

Tale topologia si chiama talvolta la saturata di  $\tau$ .

**ESEMPIO 8.4** (Nastro di Moebius). *Sia  $X = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$  e sia  $\sim$  la relazione d'equivalenza generata da  $(0, t) \sim (2\pi, -t)$  per ogni  $t \in ]-1, 1[$ . Lo spazio quoziente è il nastro di Moebius. Chi è il saturato di  $[0, 2\pi] \times \{1\}$ ? Chi è il saturato di  $\{0\} \times [-1, 0]$ ?*

Se  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , la funzione  $f : S^1 \rightarrow X/\sim$  data da  $f(z) = (\arg(z), -1)$  è continua? E  $f(z) = (\arg(z), -1 + \frac{\arg(z)}{\pi})$ ?

**ESEMPIO 8.5** (Rosa con infiniti petali). Sia  $X = \mathbb{R}$ .  $X$  è a base numerabile. Sia  $\sim$  la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

In altre parole si sono identificati tutti i punti di  $\mathbb{Z}$  in un solo punto. Visivamente il quoziente è formato da infiniti cerchi che passano per un punto. Vediamo chi sono gli aperti di  $X/\sim$ . Sia  $z = [\mathbb{Z}]$  il punto comune a tutti i cerchi. Se  $x \neq z$  allora una base di intorni di  $x$  è fatta come in  $\mathbb{R}$ . Gli intorni di  $z$  sono un po' strani invece. Affinché un insieme  $U$  contenente  $z$  sia aperto, è necessario che la sua preimmagine sia aperta. Ne segue che un sistema fondamentale di intorni di  $z$  è fatta scegliendo un successione di numeri positivi  $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  e poi facendo  $\pi(\cup_i B(n, \epsilon_n))$ . In altre parole, si deve scegliere, per ogni cerchio passante da  $z$ , un'intervallino aperto.

Vediamo che  $z$  non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile e quindi  $X/\sim$  non può essere a base numerabile. Sia  $U_n$  una famiglia numerabile di intorni di  $z$ . Consideriamo  $A_n = \pi^{-1}(U_n) \subset \mathbb{R}$ . Ogni  $k \in \mathbb{Z}$  è interno ad  $A_n$  per ogni  $n$ . Quindi esiste  $0 < \epsilon_n^k$  tale che la palla  $B(k, \epsilon_n^k) \subseteq A_n$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  scegliamo  $0 < \delta_n < \epsilon_n^n$ . Poniamo  $\delta_k = 1/2$  per  $k$  negativo. Sia  $A = \cup_{k \in \mathbb{Z}} B(k, \delta_k)$ .  $A$  è un aperto saturo e quindi  $\pi(A)$  è un aperto. In oltre nessuno degli  $A_n$  è contenuto in  $A$  per come è definito  $\delta_n$ . Quindi nessuno degli  $U_n$  è contenuto in  $\pi(A)$ . Quindi  $U_n$  non può essere un sistema fondamentale di intorni di  $z$ .

Si noti che questo esempio fornisce una topologia su  $\mathbb{R}$ , quella saturata, meno fine di quella standard ma che non è a base numerabile.

**Teorema 8.6.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ . Se  $X$  è a base numerabile e la proiezione  $\pi$  è aperta, allora anche  $X/\sim$  è a base numerabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $B_n$  una base numerabile di  $\tau$  e siano  $A_n$  i saturati di  $B_n$ . Evidentemente

$$A_n = \pi^{-1}(\pi(B_n))$$

e visto che  $\pi$  è aperta, allora  $\pi(B_n)$  è aperto. Ne segue che  $A_n$  è un aperto. Vediamo che gli  $A_n$  formano una base per la topologia saturata di  $\tau$ .

Sia  $A$  un aperto saturo, allora siccome è aperto, è unione di elementi della base

$$A = \cup_{i \in I_A} B_i.$$

Siccome è saturo è unione dei saturati dei  $B_i$  cioè  $A = \cup_i A_i$ . Quindi ogni aperto saturo è unione degli  $A_n$ .  $\square$

**Teorema 8.7.** Siano  $X, Y$  spazi topologici, sia  $\sim$  una relazione di equivalenza e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. Allora esiste  $g : X/\sim \rightarrow Y$  tale che  $f = g \circ \pi$  se e solo se  $f$  è costante sulle classi di equivalenza. In oltre, in tal caso  $f$  è continua se e solo se lo è (rispetto alla topologia quoziente).

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $f$  è continua sulle classi di equivalenza allora basta porre  $g([x]) = f(x)$ . Viceversa, se tale  $g$  esiste e  $x \sim y$  allora  $f(x) = g(\pi(x)) = g(\pi(y)) = f(y)$ .

Siccome  $\pi$  è continua, allora se  $g$  è continua anche  $f = g \circ \pi$  è continua. Infine, se  $f$  è continua e  $A$  è un aperto di  $Y$  allora  $f^{-1}(A)$  è un aperto di  $X$  e siccome  $f$  è costante sulle classi di equivalenza, esso è saturo. Quindi  $\pi(f^{-1}(A)) = g^{-1}(A)$  è aperto e dunque  $g$  è continua.  $\square$

**Teorema 8.8.** *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico, sia  $\sim$  una relazione di equivalenza e sia  $f : X \rightarrow X$  una funzione tale che*

$$x \sim y \Rightarrow f(x) \sim f(y)$$

*Se  $f$  è continua allora la funzione indotta  $[f] : X/\sim \rightarrow X/\sim$ , (definita da  $f([x]) = [f(x)]$ ) è continua.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A$  un aperto in  $X/\sim$ . Allora  $\pi^{-1}(A)$  è un aperto saturo di  $X$ .  $f^{-1}(\pi^{-1}(A))$  è un aperto di  $X$ . Siccome  $f$  è compatibile con  $\sim$ , esso è anche saturo. Quindi  $[f]^{-1}(A) = \pi(f^{-1}(\pi^{-1}(A)))$  è aperto in  $X/\sim$ .  $\square$

Possiamo finalmente studiare un po' meglio gli spazi proiettivi. Ci restringiamo per semplicità a  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  (o  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ).

**ESEMPIO 8.9.** *Le topologie standard di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  o  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  sono quelle quoziente, ove su  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $\mathbb{C}^{n+1}$  si usa la topologia Euclidea.*

Siccome le applicazioni lineari invertibili sono continue e commutano con la moltiplicazione, le proiettività sono continue. Siccome l'inversa di una proiettività è una proiettività, esse sono in particolare omeomorfismi degli spazi proiettivi. Per esempio, le trasformazioni di Moebius lo sono.

Vediamo nel dettaglio come sono fatti gli aperti in  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . Se  $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , il suo saturato di  $A$  è il cono su  $A$

$$\text{sat}(A) = \{\lambda v : 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}, v \in A\}$$

**Lemma 8.10.** *La proiezione  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  è aperta.*

**DIMOSTRAZIONE.** Il cono su un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  è aperto in  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .  $\square$

**ESERCIZIO 8.11.** *Il cono su un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  è aperto in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ?*

Ne segue che  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  è a base numerabile. In particolare se  $p = [v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ , una sistema fondamentale di intorni di  $p$  è dato da i coni sugli elementi di un sistema fondamentale di intorni di  $v$ . Per esempio si possono prendere le palle di raggio  $r < |v|$ :

$$\{\text{sat}(B(v, r)) : r < |v|\}$$

**Teorema 8.12.** *Sia  $p_n = [v_n] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  una successione. Allora  $p_n \rightarrow [v]$  se e solo se esistono  $\lambda_n \neq 0$  tali che*

$$\lambda_n v_n \rightarrow v \quad \text{in } \mathbb{R}^{n+1}.$$



**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\lambda_n v_n \rightarrow v$  allora  $p_n = [\lambda_n v_n] \rightarrow [v]$  perchè  $\pi$  è continua. Viceversa, se  $p_n \rightarrow [v]$  allora per ogni  $\varepsilon > 0$ , definitivamente in  $n$ , la retta generata da  $v_n$  sta nel cono su  $B(v, \varepsilon)$ . Prendendo una successione  $0 \leq \varepsilon_i \rightarrow 0$  e con un argomento diagonale, si trova quindi una successione  $\lambda_n$  tale che per ogni  $i$  si ha  $\lambda_n v_n \in B(v, \varepsilon_i)$  definitivamente. Quindi  $\lambda_n v_n \rightarrow v$ .<sup>4</sup>  $\square$

**Definizione 8.13** (Chiusura proiettiva). *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  con la topologia Euclidea. La chiusura proiettiva di  $A$  è la chiusura dell'immagine di  $A$  tramite la carta affine  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1, \dots, x_n, 1]$ .*

**ESEMPIO 8.14.** *La chiusura proiettiva di un'iperbole in  $\mathbb{R}^2$  si ottiene aggiungendo due punti. Per questo si dice che un'iperbole ha due punti all'infinito.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$  un'iperbole (a meno di proiettività, e quindi omeomorfismi del proiettivo, ci possiamo sempre ricondurre a questo caso). Nella carta affine  $I$  corrisponde all'insieme

$$\{[x, 1/x, 1] : 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

Le uniche successioni divergenti sono per  $x \rightarrow 0$  e  $x \rightarrow \infty$ . Riscaldando (dividendo per  $1/x$ ) si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x, 1/x, 1] = \lim_{x \rightarrow 0} [x^2, 1, x] = [0, 1, 0]$$

Dunque, proiettivamente, per  $x \rightarrow 0$  il punto  $[x, 1/x, 1]$  converge a  $[0, 1, 0]$ . (Sarebbe l'asintoto verticale dell'iperbole.)

Stessa cosa per  $x \rightarrow \infty$ . Questa volta dividiamo per  $x$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x, 1/x, 1] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [1, 1/x^2, 1/x] = [1, 0, 0]$$

Dunque, proiettivamente, per  $x \rightarrow \pm$  il punto  $[x, 1/x, 1]$  converge a  $[1, 0, 0]$ . (Sarebbe l'asintoto orizzontale dell'iperbole.)  $\square$

**ESEMPIO 8.15.** *La chiusura proiettiva di una parabola in  $\mathbb{R}^2$  si ottiene aggiungendo un solo punto. Per questo si dice che una parabola ha un solo punto all'infinito.*

**DIMOSTRAZIONE.** Procediamo come nell'esempio dell'iperbole considerando questa volta la parabola  $y = x^2$ . Sia  $P = \{[x, x^2, 1] : x \in \mathbb{R}\}$  la parabola letta nella carta affine. L'unica successione divergente è per  $x \rightarrow \infty$ . Riscaldando per  $x^2$  si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x, x^2, 1] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [1/x, 1, 1/x^2] = [0, 1, 0]$$

$\square$

**ESERCIZIO 8.16.** *Dimostrare che la chiusura proiettiva di un'iperbole qualsiasi e quella di una parabola qualsiasi sono sempre omeomorfe a un'ellisse.*

<sup>4</sup>Si poteva anche prendere direttamente  $\lambda_n = \pm \frac{\|v\|}{\|v_n\|}$  e poi aggiustare i segni in modo che  $\lambda_n v_n \rightarrow v$ , ma non volevo usare la norma.

ESERCIZIO 8.17. Sia  $A = \{xy < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dimostrare che la chiusura proiettiva di  $A$  è omeomorfa a un nastro di Moebius. (Per ora fatelo a mano, esibendo un omeo, in seguito avremo strumenti un po' più raffinati.)

ESERCIZIO 8.18. Sia  $B = \{xy > 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dimostrare che la chiusura proiettiva di  $B$  è omeomorfa a un disco (e.g.  $B(0, 1)$ .)

ESERCIZIO 8.19. Sia  $C = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dimostrare che la chiusura proiettiva del complementare di  $C$  è omeomorfa a un nastro di Moebius. (Usare che le quadriche sono proiettivamente equivalenti e gli esercizi sull'iperbole.)

ESERCIZIO 8.20. Sia  $D = \{y > x^2\}$ . Dimostrare che la chiusura proiettiva di  $C$  è omeomorfa a un disco e che la chiusura proiettiva di  $D^c$  è omeomorfa a un nastro di Moebius.

Vediamo adesso un altro esempio comune di quoziente, il collasso di un sottoinsieme. Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A \subseteq X$ . Sia  $\sim_A$  la relazione d'equivalenza data da

$$x \sim_A y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x, y \in A \end{cases}$$

Le classi di equivalenza sono di due tipi: se  $x \notin A$  si ha  $[x] = \{x\}$ , se  $x \in A$  si ha  $[x] = A$ . Un sottoinsieme  $B$  di  $X$  è  $\sim_A$ -satturo se  $B \cap A \neq \emptyset \Rightarrow A \subset B$ .

Il quoziente  $X/\sim_A$  si indica spesso, se non ci sono ambiguità notazionali, con  $X/A$ . Un esempio lo abbiamo già visto: la rosa a infiniti petali.

ESEMPIO 8.21. Sia  $X = \mathbb{R}^2$  e  $A = B(0, 1)$ . Lo spazio  $X/A$  è formato da  $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$ , con la topologia usuale, più un punto  $a = [A]$ . Siccome  $A$  è un aperto di  $X$  si ha che  $a$  è un aperto, quindi  $\hat{a} = a$ . La chiusura di  $a$  corrisponde a più piccolo chiuso saturo di  $\mathbb{R}^2$  contenente  $B(0, 1)$  e quindi a  $\overline{B(0, 1)}$ . La chiusura di  $a$  è quindi  $a \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$  e  $\partial a = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ . Se  $x, y \in \partial a$  ogni intorno di  $x$  contiene  $a$ , così come ogni intorno di  $y$ ; ne segue per esempio che  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  non hanno intorni disgiunti in  $X/A$ .

ESEMPIO 8.22. Sia  $X = \mathbb{R}^2$  e  $A = \overline{B(0, 1)}$ . Lo spazio  $X/A$  è formato da  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0, 1)}$ , con la topologia usuale, più un punto  $a = [A]$ . Siccome  $A$  è un chiuso di  $X$  si ha che  $a$  è chiuso. In oltre, siccome  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0, 1)}$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , si ha che  $X/A$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cup \{a\}$  con una certa topologia.

ESERCIZIO 8.23. Sia  $X = \mathbb{R}^2$  e  $A = \overline{B(0, 1)}$ . Dimostrare che  $X/A$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . (Il punto  $a$  fa le veci dell'origine.)

ESERCIZIO 8.24. Sia  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  e sia  $A = 0 \times [0, 1]$  dimostrare che  $X/A$  è omeomorfo a un triangolo. Dimostrare che  $X/A$  è omeomorfo a  $X$ .

ESERCIZIO 8.25. Sia  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  e sia  $\sim$  la relazione generata da  $(x, 0) \sim (x, 1)$ . Dimostrare che  $X/\sim$  è omeomorfo al cilindro  $S^1 \times [0, 1]$ .

ESERCIZIO 8.26. Sia  $X = S^1 \times [0, 1]$  un cilindro e sia  $A = S^1 \times \{0\}$ . Dimostrare che  $X/A$  è omeomorfo a  $D^2 = \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^2$ .

ESERCIZIO 8.27. Sia  $X = D^2 \subset \mathbb{R}^2$  sia  $A = S^1 = \partial D^2$ . Dimostrare che  $X/A$  è omeomorfo a  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ .

**Definizione 8.28** (Cono su  $X$ ). Sia  $X$  uno spazio topologico, sia  $Y = X \times [0, 1]$  e sia  $A = X \times \{0\} \subset Y$ . Il cono su  $X$  è lo spazio  $Y/A$ .

ESEMPIO 8.29. Il cono su  $S^1$  è  $D^2$ . (Sono le coordinate polari di  $D^2$ .)

**Definizione 8.30.** Sono notazioni standard:  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  e  $D^n = \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^n$ .  $T^2 = S^1 \times S^1$ ,  $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$   $n$  volte.

ESERCIZIO 8.31. Dimostrare che per ogni  $n$  il cono su  $S^{n+1}$  è  $D^n$ .

ESERCIZIO 8.32. Sia  $X = \{a, b, c\}$  con la topologia discreta e sia  $Y$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  corrispondente al simbolo epsilon (con grafia semplificata). Dimostrare che il cono su  $X$  è omeomorfo a  $Y$ .

ESERCIZIO 8.33. Sia  $X = \mathbb{R}$  con la topologia discreta. Dimostrare che il cono su  $X$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  con la topologia degli infiniti raggi.

ESERCIZIO 8.34. Dimostrare che se  $X$  e  $Y$  sono omeomorfi, allora i loro coni lo sono.

ESERCIZIO 8.35. Sia  $X = S^1 \times [0, 1]$  un cilindro e sia  $\sim$  la relazione generata da  $(x, 0) \sim (x, 1)$ . Dimostrare che  $X/\sim$  è omeomorfo a  $T^2$ .

ESERCIZIO 8.36. Sia  $C$  il cerchio di centro  $(2, 0)$  e raggio 1 nel piano  $YZ$  di  $\mathbb{R}^3$ :  $C = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(y, z) - (2, 0)\| = 1\}$  e sia  $T$  la superficie di rotazione di  $\mathbb{R}^3$  ottenuta ruotando  $C$  attorno all'asse  $Z$ . Dimostrare che  $T$  è omeomorfo a  $T^2$ . Siano  $A$  il cerchio più interno di  $T$  e  $B$  quello più esterno:

$$A = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\} \quad B = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 9\}$$

Dimostrare che  $X/A, X/B, X/C$  sono tutti omeomorfi tra loro.

## 9. Spazi di Hausdorff

**Definizione 9.1.** Uno spazio topologico  $X$  si dice  $T_2$  o di Hausdorff se per ogni  $x \neq y \in X$  esistono aperti  $U, V$  con  $x \in U, y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

In generale esistono nozioni di spazi  $T_0, T_1, T_3, T_{3/2}, \dots$  che non tratteremo in dettaglio. Sono tutte proprietà dette di *separazione* e si esprimono in genere con formule del tipo "oggetti di tipo tal si separano attraverso insiemi di tipo tal altro". La nozione  $T_2$  ad esempio si può parafrasare dicendo che i punti si separano con aperti.

**Teorema 9.2** (Unicità del limite). Sia  $X$  uno spazio  $T_2$  e sia  $x_i \rightarrow x$  una successione convergente. Se  $x_i \rightarrow y$  allora  $x = y$ .

DIMOSTRAZIONE. Se è  $T_2$  e  $x \neq y$  allora esistono  $U, V$  intorno di  $x, y$  rispettivamente, tali che  $U \cap V = \emptyset$ . Ne segue che se  $x_i \rightarrow x$  allora non converge a  $y$ .  $\square$

**ESEMPIO 9.3.** Sia  $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^2$  e sia  $\sim$  la relazione d'equivalenza generata da

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = x' \neq 0$$

Lo spazio  $X/\sim$  non è  $T_2$ .  $(x, 0)$  è identificato con  $(x, 1)$  per ogni  $x \neq 0$ , ma  $(0, 0)$  non è equivalente a  $(0, 1)$ . Quindi  $X/\sim$  assomiglia a una retta con due zeri:  $[(0, 0)]$  e  $[(0, 1)]$ . Gli insiemi saturi sono fatti così: se contengono  $(x, 0)$  con  $x \neq 0$  allora contengono anche  $(x, 1)$  e viceversa. Quindi due intorni saturi qualsiasi di  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  non sono mai disgiunti. In particolare, la successione  $[(1/n, 0)]$  converge simultaneamente sia a  $[(0, 0)]$  che a  $[(0, 1)]$ .

**Teorema 9.4.** Sia  $X$  uno spazio  $T_2$ . Allora i punti son chiusi.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x \in X$  dimostriamo che il complementare di  $x$  è aperto in  $X$ . Se  $y \neq x$  allora esiste  $U_y$  intorno aperto di  $y$  tale che  $x \notin U_y$ . In particolare  $\{x\}^c = \cup U_y$  è aperto.  $\square$

Il viceversa non è vero in generale (gli spazi i cui punti son chiusi sono i  $T_1$ ).

**ESEMPIO 9.5.** La topologia cofinita su  $\mathbb{R}$  ha la proprietà che i punti sono chiusi ma non è  $T_2$ .

**Teorema 9.6.** Uno spazio topologico  $X$  è  $T_2$  se e solo se la diagonale

$$D = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$$

è chiusa in  $X \times X$  per la topologia prodotto.

**DIMOSTRAZIONE.** Dire che  $(x, y) \notin D$  equivale a dire  $x \neq y$  e dire  $A \cap B = \emptyset$  equivale a dire  $A \times B \cap D = \emptyset$ .

$D$  è chiusa se e solo se il suo complementare  $D^c$  è aperto, se e solo se ogni  $(x, y) \in D^c$  è interno a  $D^c$  se e solo se esiste  $U$  intorno di  $(x, y)$  tale che  $U \subset D^c$ . Siccome la topologia prodotto è generata dai prodotti di aperti, ciò è equivalente a dire che esistono  $A, B$  aperti tale che  $(x, y) \in A \times B \subset D^c$ , ma ciò è equivalente a chiedere che  $x \in A$ ,  $y \in B$  e  $A \cap B = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 9.7.** Siano  $X, Y$  spazi di Hausdorff. Allora  $X \times Y$  è di Hausdorff.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $(x, y) \neq (x', y')$  due punti diversi di  $X \times Y$ . Se  $x \neq x'$  allora esistono  $A, A'$  aperti di  $X$  tali che  $x \in A$  e  $x' \in A'$  con  $A \cap A' = \emptyset$ . Quindi  $A \times Y$  e  $A' \times Y$  separano  $(x, y)$  e  $(x', y')$ . Stesso discorso se  $y \neq y'$ .  $\square$

**Teorema 9.8.** Siano  $X, Y$  spazi topologici. Se  $X \times Y$  è di Hausdorff allora entrambi  $X, Y$  lo sono.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x \neq x' \in X$ . I punti  $(x, y)$  e  $(x', y)$  sono diversi in  $X \times Y$ . Esistono quindi aperti  $A, A'$  in  $X \times Y$  tali che  $(x, y) \in A$  e  $(x', y) \in A'$  con  $A \cap A' = \emptyset$ . Siccome la topologia prodotto è generata dai prodotti di aperti, esistono  $U, U'$  aperti di  $X$  con  $x \in U$  e  $x' \in U'$  e  $V$  aperto di  $Y$  con  $y \in V$  tali che  $U \times V \subset A$  e  $U' \times V \subset A'$ . Ne segue che  $U \cap U' = \emptyset$ . Quindi  $X$  è  $T_2$ . Stesso discorso per  $Y$ .  $\square$

### 10. Quozienti per gruppi di omeomorfismi

Sia  $X$  uno spazio topologico. L'insieme  $\text{omeo}(X)$  di tutti gli omeomorfismi è un gruppo rispetto alla composizione: l'elemento neutro è l'identità e  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ . Dato un gruppo  $G$ , si dice che  $G$  agisce su  $X$  se è una rappresentazione (cioè un morfismo di gruppi)  $\rho : G \rightarrow \text{omeo}(X)$  se ci sono ambiguità si dice che  $G$  agisce via  $\rho$ .

ESEMPIO 10.1. Sia  $\mathbb{Z} < \mathbb{R}$ .  $\mathbb{Z}$  agisce su  $\mathbb{R}$  tramite traslazioni, cioè attraverso la rappresentazione

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{omeo}(\mathbb{R}) \quad n \mapsto \tau_n \quad \tau_n(x) = x + n$$

ESEMPIO 10.2. Sia  $\mathbb{Z}$  può agire su  $\mathbb{R}$  in altri modi, per esempio per moltiplicazione per  $2^n$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{omeo}(\mathbb{R}) \quad n \mapsto \sigma_n \quad \sigma_n(x) = 2^n x$$

ESEMPIO 10.3. Sia  $\mathbb{Z}^2 < \mathbb{R}^2$ . Esso agisce su  $\mathbb{R}^2$  per traslazioni.

ESEMPIO 10.4. Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ , con la topologia indotta da un prodotto scalare. Allora  $\mathbb{R}^*$  (come gruppo moltiplicativo) agisce su  $V$  per moltiplicazione

$$\mathbb{R} \rightarrow \text{omeo}(V) \quad \lambda \mapsto \rho(\lambda) \quad \rho(\lambda)(v) = \lambda v$$

ESEMPIO 10.5. Sia  $X = GL(n, \mathbb{R})$  con la topologia indotta dall'identificazione di  $GL(n, \mathbb{R})$  con un aperto di  $\mathbb{R}^{n^2}$ .  $X$  agisce su sé stesso tramite coniugio

$$\rho : X \rightarrow \text{omeo}(X) \quad M \mapsto \rho(M) \quad \rho(M)A = M^{-1}AM$$

ESERCIZIO 10.6. Dimostrare che  $SO(2)$  è omeomorfo a  $S^1$  (usare che gli elementi di  $SO(2)$  sono le rotazioni).

ESEMPIO 10.7.  $S^1$  agisce su  $S^2$  per rotazioni orizzontali. Usando  $S^1 \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ,  $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  e ponendo  $S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\}$ , si ha

$$\rho : S^1 \rightarrow \text{omeo}(S^2) \quad \rho(\xi)(z, t) = (\xi z, t)$$

ESEMPIO 10.8. Se  $G < \text{omeo}(X)$  allora  $G$  agisce su  $X$  tramite l'inclusione  $G \subset \text{omeo}(X)$ .

A livello di azione su  $X$ , non è importante la rappresentazione  $\rho : G \rightarrow \text{omeo}(X)$  quanto l'immagine  $\rho(G) < \text{omeo}(X)$ . In seguito useremo la notazione  $g(x)$  o semplicemente  $gx$  per indicare  $\rho(g)(x)$ .

Data un'azione di  $G$  su  $X$ , si definisce la relazione di equivalenza  $\sim_G$

$$x \sim_G y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = gx$$

essa è una relazione d'equivalenza perché  $G$  è un gruppo. Le classi di equivalenza si chiamano orbite

$$[x] = Gx = \{gx : g \in G\}$$

Nell'esempio del coniugio, l'orbita di una matrice  $A$  è costituita da tutte le matrici simili ad  $A$ .

**Definizione 10.9.** Si pone  $X/G = X/\sim_G$ .

Questa notazione va usata con cura, infatti è la stessa a quella del collasso di sottoinsiemi. Per esempio:  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  è il quoziente che si ottiene da  $\mathbb{R}$  identificando tutto  $\mathbb{Z}$  a un punto o è il quoziente di  $\mathbb{R}$  per l'azione di  $\mathbb{Z}$ ? E quale azione stiamo considerando? Di solito queste cose sono chiare dal contesto, altrimenti vanno specificate.

**Teorema 10.10.** Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $G < \text{omeo}(X)$ . Allora  $\pi : X \rightarrow X/G$  è aperta.

**DIMOSTRAZIONE.** Dire che  $\pi$  è aperta è equivalente a dire che il saturato di un aperto è aperto, in quanto  $\text{sat}(A) = \pi^{-1}(\pi(A))$  e  $\pi(A)$  è aperto se e solo se  $\pi^{-1}(\pi(A))$  è aperto. Sia  $A$  un aperto di  $X$ . Per ogni  $g \in \text{omeo}(X)$ ,  $g(A)$  è aperto. Quindi

$$\text{sat}(A) = \cup_{g \in G} g(A)$$

è unione di aperti e quindi è aperto.  $\square$

Si noti che con la stessa dimostrazione si vede che se  $G$  è finito allora  $\pi$  è anche chiusa. Il teorema precedente implica in particolare che se  $X$  è a base numerabile, anche  $X/G$  lo è. Quindi per esempio  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (come quoziente di azione) non è omeomorfo a  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (come collasso di  $\mathbb{Z}$ ).

**Teorema 10.11.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $G < \text{omeo}(X)$ . Allora  $X/G$  è di Hausdorff se e solo se l'insieme

$$\Delta = \{(x, g(x)) : x \in X, g \in G\}$$

è chiuso in  $X \times X$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dire  $[x] \neq [y]$  è equivalente a dire  $(x, y) \notin \Delta$ .  $\Delta$  è chiusa se e solo se il suo complementare è aperto. Se e solo se ogni  $(x, y) \notin \Delta$  è interno a  $\Delta^c$ , se e solo se per ogni  $[x] \neq [y]$  esistono aperti  $A, B$  tali che  $x \in A$  e  $y \in B$  con  $A \times B \subseteq \Delta^c$ .  $A \times B \subseteq \Delta^c$  equivale a dire che non esiste  $g \in G$  tale che  $g(A) \cap B \neq \emptyset$ . Cioè  $\text{sat}(A) \cap \text{sat}(B) = \emptyset$ . Ma ciò è equivalente a dire che  $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$ . Chiaramente  $[x] \in \pi(A)$  e  $[y] \in \pi(B)$ . Quindi  $\Delta$  chiuso equivale a dire che ogni  $[x] \neq [y]$  sono separati da aperti.  $\square$

**Corollario 10.12.** Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $G < \text{omeo}(X)$ . Se  $X/G$  è  $T_2$  allora le orbite dell'azione di  $G$  son tutte chiuse.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che esista  $x \in X$  tale che l'orbita  $Gx$  non è chiusa. Allora esiste  $y \in X$  tale che  $[x] \neq [y]$  ma  $y \in \overline{Gx}$ . Per ogni intorno  $A$  di  $y$  esiste quindi  $g \in G$  tale che  $gx \in A$ . Siccome  $[x] \neq [y]$  il punto  $(x, y) \notin \Delta$ . Per ogni intorno  $U$  di  $(x, y)$  esistono  $A$  intorno di  $y$  e  $B$  intorno di  $x$  tali che  $B \times A \subseteq U$ . Ma allora esiste  $g \in G$  con  $gx \in A$  e quindi  $(x, gx) \in U$ . Cioè ogni intorno di  $(x, y)$  interseca  $\Delta$ .

Ne segue che  $(x, y)$  non è interno in  $\Delta^c$  che quindi non è aperto e dunque  $\Delta$  non è chiuso e  $X/G$  non è  $T_2$ .  $\square$

**ESEMPIO 10.13.** Sia  $X = \mathbb{R}^3$  e consideriamo l'azione di  $\mathbb{R}^*$  data dalla moltiplicazione. Le orbite non son chiuse perchè si accumulano nell'origine. Dunque il quoziente non è  $T_2$ . Questo è uno dei motivi per cui quando si fa il proiettivo si toglie l'origine.

Il viceversa in generale non è vero:

**ESEMPIO 10.14.** Sia  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Consideriamo l'azione di  $\mathbb{R}^*$  data da  $\rho(\lambda)(x, y) = (\lambda x, y/\lambda)$ . Se  $ab \neq 0$ , l'orbita di  $(a, b)$  è

$$[(a, b)] = \{(x, y) : xy = ab\}$$

Se  $x = 0$  l'orbita di  $(0, y)$  è l'asse  $Y$  meno l'origine e se  $y = 0$  l'orbita di  $(x, 0)$  è l'asse  $X$  meno l'origine. I punti di  $X/\mathbb{R}$  sono quindi

$$[(1, c)] = \{xy = c\}, \quad c \neq 0 \quad [X] \quad [Y]$$

Le orbite sono dunque chiuse in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Ma un aperto saturo che contiene l'asse  $X$  e un aperto saturo che contiene l'asse  $Y$  si intersecano sempre in un ramo di iperbole  $xy = \varepsilon$  per un certo  $\varepsilon \neq 0$ . Quindi  $X/\mathbb{R}$  non è  $T_2$ .

Vediamo adesso un altro esempio classico: il vento in direzione  $d$ . Sia  $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  (con l'azione per traslazioni).  $T^2$  è omeomorfo al toro  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Fissiamo una direzione  $d \in \mathbb{R}^2$  e consideriamo l'azione di  $\mathbb{R}$  (come gruppo additivo)

$$\rho_d : \mathbb{R} \rightarrow \text{omeo}(\mathbb{R}^2) \quad \rho_d(\lambda)(v) = v + \lambda d$$

Se  $v \sim w$ , cioè se  $v - w \in \mathbb{Z}^2$ , allora  $\rho_d(\lambda)v - \rho_d(\lambda)w \in \mathbb{Z}^2$ , cioè  $\rho_d(\lambda)(v) \sim \rho_d(\lambda)(w)$ . Ne segue che  $\rho_d$  induce una rappresentazione

$$\mathbb{R} \rightarrow \text{omeo}(T^2) \quad \lambda([v]) = [\rho_d(\lambda)(v)]$$

Le orbite dell'azione di  $\mathbb{R}$  su  $\mathbb{R}^2$  sono rette parallele con direzione  $d$  e quindi sono chiuse.

**ESERCIZIO 10.15.** Dimostrare che  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

Le orbite nel quoziente  $T^2$  sono linee "parallele" che si avvolgono su  $T^2$ . Se  $d \in \mathbb{Q}^2$  allora sono chiuse in  $T^2$  e in questo caso si può dimostrare che il quoziente è Hausdorff.

**ESERCIZIO 10.16.** Determinare il quoziente  $T^2/\mathbb{R}$  nel caso  $d \in \mathbb{Q}^2$ . (Pensate a cosa succede quando si srotola il cilindretto di cartone dei rotoli di carta igienica.)

Nel caso in cui nessun multiplo di  $d$  sia in  $\mathbb{Q}^2$ , per esempio  $d = (1, \sqrt{2})$ , le orbite in  $T^2$  sono dense. In particolare il quoziente non è Hausdorff.

**ESERCIZIO 10.17.** Dimostrare che le orbite dell'azione di  $\mathbb{R}$  su  $T^2$  nel caso  $d = (1, \sqrt{2})$  sono tutte dense.

## 11. Ricoprimenti e compattezza

**Definizione 11.1** (Ricoprimenti). Sia  $X$  uno spazio topologico. Un ricoprimento di  $X$  è una famiglia  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  di sottoinsiemi di  $X$  tali che

$$\cup_{i \in I} U_i = X.$$

Il ricoprimento si dice aperto se tutti gli  $U_i$  sono aperti. Si dice chiuso se tutti gli  $U_i$  lo sono.

Un sottoricoprimento di  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento della forma  $\{U_i\}_{i \in J}$  con  $J \subseteq I$ . Un raffinamento di  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento  $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  tale che

$$\forall \alpha \in A \exists i \in I : V_\alpha \subseteq U_i.$$

Un ricoprimento si dice finito se ha un numero finito di elementi. Si dice localmente finito se per ogni  $x \in X$  esiste un intorno  $V$  di  $x$  tale che il numero degli  $U_i$  che intersecano  $V$  è finito.

**ESEMPIO 11.2.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Allora  $\{X\}$  è un ricoprimento di  $X$ .

**ESEMPIO 11.3.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Allora  $\tau$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . Ogni ricoprimento aperto di  $X$  è un sottoricoprimento di  $\tau$ .

**ESEMPIO 11.4.** Sia  $X$  uno spazio topologico  $T_2$  con almeno due punti. Per ogni  $x \in X$  sia  $U_x = \{x\}^c$ . Siccome in un  $T_2$  i punti son chiusi,  $U_x$  è aperto. Siccome  $X$  ha almeno due punti la famiglia  $\{U_x\}_{x \in X}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ .

**ESEMPIO 11.5.** Sia  $X$  uno spazio metrico e sia  $x \in X$ . La famiglia  $\mathcal{U} = \{B(x, r)\}_{0 < r \in \mathbb{R}}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . Anche la famiglia  $\mathcal{V} = \{B(p, 1)\}_{p \in X}$  lo è. In oltre,  $\mathcal{V}$  è un raffinamento di  $\mathcal{U}$ .

**Definizione 11.6** (Compattezza). Uno spazio topologico  $X$  si dice compatto se ogni ricoprimento aperto di  $X$  ha un sottoricoprimento finito.

Si noti che la compattezza è una proprietà intrinseca di uno spazio topologico, al contrario dell'essere chiuso/aperto. In altre parole, se  $A \subset X$  è compatto, ciò non dipende da  $X$  ma solo dalla topologia indotta da  $X$  su  $A$ . Ancora, può succedere che  $A \subset X \subset Y$  con  $A$  chiuso in  $Y$  e aperto in  $X$ . Ma se  $A$  è compatto come sottospazio di  $X$ , lo è anche come sottospazio di  $Y$ , in quanto  $X$  e  $Y$  inducono su  $A$  la stessa topologia.

**ESEMPIO 11.7.** Ogni topologia finita è compatta. In particolare ogni spazio con un numero finito di elementi è compatto. La topologia banale è sempre compatta.

**ESEMPIO 11.8.** Se  $X$  ha un'infinità di elementi, allora la topologia discreta su  $X$  non è compatta: basta prendere come ricoprimento aperto quello fatto dai singoletti  $\{x\}$  al variare di  $x \in X$ .

**ESEMPIO 11.9.** Unione finita di compatti è compatta, cioè se  $K_1, \dots, K_n$  sono sottospazi compatti di uno spazio  $X$ , allora la loro unione è compatta. (perché?)

**Teorema 11.10.** Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  un ricoprimento aperto. Se esiste un raffinamento  $\mathcal{V}$  di  $\mathcal{U}$  che ammette un sottoricoprimento finito, allora anche  $\mathcal{U}$  ammette un sottoricoprimento finito.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $X = V_1 \cup \dots \cup V_k$  con  $V_i \in \mathcal{V}$ , siccome per ogni  $V_i$  esiste  $\alpha(i)$  tale che  $V_i \subseteq U_{\alpha(i)}$  allora

$$X = V_1 \cup \dots \cup V_k \subseteq U_{\alpha(1)} \cup \dots \cup U_{\alpha(k)}.$$

□



**ESEMPIO 11.11.**  $\mathbb{R}$  non è compatto. Infatti il ricoprimento  $\{B(0, r)\}_{0 < r \in \mathbb{R}}$  non ha sottoricoprimenti finiti.

**Teorema 11.12.** Lo spazio  $[0, 1]$  con la topologia standard è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{U}\{U_i\}$  un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$ . Sia

$$A = \{x \in [0, 1] \text{ tale che } [0, x] \text{ è contenuto nell'unione di un numero finito di } U_i\}$$

Dire che esiste un sottoricoprimento finito di  $\mathcal{U}$  equivale a dire che  $1 \in A$ .

Per prima cosa,  $0 \in A$  perchè  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento, il che implica anche che un intero intorno di zero sta in  $A$ . Sia  $t = \inf A^c$  (ponendo  $t = 1$  se  $A^c$  è vuoto). In particolare  $t > 0$ . Siccome  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento, esiste  $i$  tale che  $t \in U_i$ . Siccome  $U_i$  è aperto esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset U_i$ . Siccome  $t = \inf A^c$  per ogni  $x < t$  si ha  $x \in A$ . Siccome  $t > 0$ , esiste  $x \in (t - \varepsilon, t) \cap [0, 1]$ . Per definizione esistono  $i_1, \dots, i_k$  tali che

$$[0, x] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

e quindi

$$[0, 1] \cap [0, t + \varepsilon] \subset (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}) \cup U_i.$$

In particolare  $t \in A$  e se  $t \neq 1$  allora  $t$  non è l'estremo inferiore di  $A^c$ .  $\square$

**Corollario 11.13.**  $\mathbb{R}$  standard e  $[0, 1]$  standard non sono omeomorfi tra loro.

**DIMOSTRAZIONE.** Uno è compatto e l'altro no.  $\square$

**Teorema 11.14** (Chiuso in compatto è compatto). Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X$  uno spazio compatto e  $A \subseteq X$  chiuso. Sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  un ricoprimento aperto di  $A$ . Per ogni  $i$  esiste  $V_i$  aperto in  $X$  tale che  $U_i = V_i \cap A$ . Dunque  $\mathcal{V} = \{V_i\}$  è una famiglia di aperti di  $X$  e, siccome  $A$  è chiuso, allora  $\mathcal{V} \cup \{A^c\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . Esso ammette per compattezza un sottoricoprimento finito  $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_n}, A^c\}$ . Siccome  $A \cap A^c = \emptyset$ , abbiamo che  $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$  ricopre  $A$  e quindi  $\mathcal{U}$  ha un sottoricoprimento finito.  $\square$

Per il viceversa serve un'ipotesi in più.

**Teorema 11.15** (Compatto in  $T_2$  è chiuso). Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio  $T_2$  è chiuso. Più precisamente, se  $A \subseteq X$  è compatto e  $x \notin A$  allora esistono un intorno  $V$  di  $x$  e un aperto  $U$  contenente  $A$  tali che  $U \cap V = \emptyset$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A \subseteq X$  compatto. Dimostriamo che il complementare è aperto dimostrando che ogni punto di  $A^c$  è interno ad  $A^c$ . Sia  $x \in A^c$ . Siccome  $X$  è  $T_2$ , per ogni  $a \in A$  esistono aperti  $U_a, V_a$  disgiunti con  $a \in U_a$  e  $x \in V_a$ . La famiglia  $\{U_a\}_{a \in A}$  ricopre  $A$ . Per compattezza, esiste  $k \in \mathbb{N}$  e  $a_1, \dots, a_k \in A$  tali che  $U = U_{a_1}, \dots, U_{a_k}$  ricopre  $A$ . L'insieme  $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_k}$  è aperto e contiene  $x$ . In oltre  $V$  è disgiunto da  $U_{a_1}, \dots, U_{a_k}$  e quindi dalla loro unione  $U$ . In particolare  $V \subseteq A^c$  e  $x$  è interno ad  $A^c$ .  $\square$

Allo stesso modo si dimostra la seguente generalizzazione.

**Teorema 11.16** (In un  $T_2$  i compatti si separano con aperti). *Sia  $X$  uno spazio  $T_2$  e siano  $A, B \subset X$  compatti disgiunti. Allora esistono aperti disgiunti  $U_A, U_B$  tali che  $U \supseteq A$  e  $V \supseteq B$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema precedente, per ogni  $x \in B$  esistono aperti  $U_x, V_x$  disgiunti tali che  $x \in V_x$  e  $A \subseteq U_x$ . La famiglia  $\{V_x : x \in B\}$  è un ricoprimento aperto di  $B$ . Per compattezza esistono  $x_1, \dots, x_k$  tali che  $B \subseteq V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k}$ . L'aperto  $U = U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k}$  contiene  $A$  ed è disgiunto da  $V$ .  $\square$

**ESEMPIO 11.17.** *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico compatto e sia  $Y = X \cup \{\infty\}$ . Sia  $\sigma$  la topologia generata da  $\tau$  su  $Y$ . Si ha  $\sigma = \tau \cup \{Y\}$  (perché?). Dunque  $\{\infty\}$  non è aperto in  $Y$ . Quindi  $X \subset Y$  è un sottospazio compatto di  $Y$  che però non è chiuso. Ciò non contraddice quanto detto sin ora in quanto  $Y$  non è di Hausdorff.*

**Definizione 11.18** (Insiemi limitati). *Sia  $X$  uno spazio metrico e  $A \subseteq X$ . A si dice limitato se esiste  $x \in X$  e  $r \in \mathbb{R}$  tale che  $A \subseteq B(x, r)$ .*

**Teorema 11.19** (Compatto implica limitato). *Sia  $A$  un sottoinsieme non limitato di uno spazio metrico. Allora  $A$  non è compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x \in X$  e sia  $\mathcal{U} = \{B(x, n) : n \in \mathbb{N}\}$ . Per intersezione, ciò definisce un ricoprimento di  $A$ . Una unione finita di elementi di  $\mathcal{U}$  è contenuta in una palla centrata in  $x$ . Siccome  $A$  non è limitato non può essere contenuto in una unione finita di elementi di  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**Corollario 11.20.** *Sia  $A$  un sottoinsieme compatto di uno spazio metrico. Allora  $A$  è chiuso e limitato.*

**DIMOSTRAZIONE.** I metrici son  $T_2$ . Il resto segue dai due teoremi precedenti.  $\square$   
Occhio che i chiusi e limitati non sono necessariamente compatti!

**ESEMPIO 11.21.** *In  $\mathbb{R}^2$  con la metrica degli infiniti raggi, sia  $X = \overline{B(0, 1)}$ . Esso è chiuso, limitato ma non compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $S = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : d(0, x) = 1\}$  e sia

$$\mathcal{U} = \{B(x, 1)\}_{x \in S}$$

Chiaramente  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . In oltre ogni elemento di  $S$  è contenuto in uno e un solo elemento di  $\mathcal{U}$ . Siccome  $S \subset X$ , ne segue che nessuna sottofamiglia propria di  $\mathcal{U}$  può ricoprire  $X$ , in particolare nessuna sottofamiglia di  $\mathcal{U}$  può ricoprire  $X$ .  $\square$

**Teorema 11.22** (Immagine continua di compatti è compatta). *Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua tra spazi topologici. Se  $X$  è compatto allora  $f(X)$  è compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $f(X)$ . Allora  $V_i = f^{-1}(U_i)$  fornisce un ricoprimento aperto di  $X$  che, siccome  $X$  è compatto, ammette un sottoricoprimento finito  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ . Ne segue che  $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$  è una sottoricoprimento finito di  $f(X)$ .  $\square$

**Corollario 11.23** (Weierstrass). *Sia  $X$  uno spazio compatto e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  ha massimo e minimo su  $X$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che  $f(X)$  è compatto perchè le funzioni continue mandano compatti in compatti. Siccome i compatti di  $\mathbb{R}$  son chiusi e limitati allora  $f(X)$  ha max e min.  $\square$

**Definizione 11.24** (Totalmente limitati). *Uno spazio metrico si dice totalmente limitato se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un ricoprimento finito di palle aperte di raggio al più  $\varepsilon$ .*

A volte è comodo usare il linguaggio degli  $\varepsilon$ -net, che in italiano si tradurrebbe con  $\varepsilon$ -rete o  $\varepsilon$ -reticolo. La notazione non è standard.

**Definizione 11.25** ( $\varepsilon$ -net). *Un  $\varepsilon$ -reticolo in uno spazio metrico  $X$  è un sottoinsieme  $Y \subset X$  tale che*

$$\forall x \in X \exists y \in Y : d(x, y) < \varepsilon$$

*in altre parole, se la famiglia  $\{B(y, \varepsilon)\}_{y \in Y}$  è un ricoprimento di  $X$ .*

Con questa terminologia, uno spazio metrico è totalmente limitato se per ogni  $\varepsilon > 0$  ha un  $\varepsilon$ -reticolo finito.

**Teorema 11.26** (Compatti in spazi metrici). *Sia  $X$  uno spazio metrico completo e totalmente limitato. Allora  $X$  è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Per prima cosa un lemmetto:

**Lemma 11.27.** *Sia  $X$  uno spazio metrico totalmente limitato. Allora ogni successione in  $X$  ha una sottosuccessione di Cauchy.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $x_n$  una successione in  $X$ . Siccome  $X$  è totalmente limitato esiste un ricoprimento finito di  $X$  fatto di palle di raggio al più  $1/2$ . Per il principio dei cassetti c'è una sottosuccessione di  $\{x_n\}$  che sta tutta dentro una di queste palle, che chiamiamo  $B_1$ . Sia  $I_1 \subset \mathbb{N}$  l'insieme degli indici  $i$  tali che  $x_i \in B_1$ .

Definiamo  $I_k \subset I_{k-1}$  e  $B_k \subset B_{k-1}$  induttivamente. Siccome  $X$  è totalmente limitato, per ogni  $k$  esiste un ricoprimento finito di  $X$  fatto di palle di raggio al più  $1/2^k$ . Per il principio dei cassetti esiste una palla  $B_k$  di raggio al più  $1/2^k$  e un sottoinsieme infinito  $I_k \subset I_{k-1}$  tale che  $x_i \in B_k$  per ogni  $i \in I_k$ .

Sia  $i_1$  il primo elemento di  $I_1$  e sia  $i_k$  il primo elemento di  $I_k$  maggiore di  $i_{k-1}$ . La sottosuccessione  $\{x_{i_k}\}$  è di Cauchy perchè  $x_{i_s} \in B_k$  per ogni  $s \geq k$  ed il raggio di  $B_k$  tende a zero.  $\square$

Continuiamo adesso con la dimostrazione del teorema. Sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $X$ . Per ogni  $x$  definiamo  $\varepsilon_x$  come

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \sup\{\varepsilon > 0 : \exists i \in I : B(x, \varepsilon) \subset U_i\}$$

siccome  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento,  $\varepsilon_x > 0$  per ogni  $x$ . Mostriamo adesso che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $\varepsilon \leq \varepsilon_x$  per ogni  $x \in X$ . Sia  $\varepsilon = \inf_x \varepsilon_x$ . Per definizione  $\varepsilon \leq \varepsilon_x$  per ogni  $x$ . Si deve solo

mostrare che  $\varepsilon > 0$ . Sia  $x_n$  una successione minimizzante, cioè tale che  $\varepsilon_{x_n} \rightarrow \varepsilon$ . Per il lemma precedente,  $x_n$  ha una sottosuccessione di Cauchy  $x_{n_k}$  e siccome  $X$  è completo, essa ha un limite  $x_\infty$ . Siccome  $\varepsilon_{x_\infty} > 0$ , definitivamente in  $k$  si ha  $\varepsilon_{x_k} > \varepsilon_{x_\infty}/2$  e dunque  $\varepsilon > 0$ .

Ricapitolando, per ogni  $x \in X$  esiste  $i_x$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_x}$ . Dunque il ricoprimento  $\mathcal{V} = \{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$  è un raffinamento di  $\mathcal{U}$ .

Siccome  $X$  è totalmente limitato,  $\mathcal{V}$  ammette un sottoricoprimento finito. Ergo  $\mathcal{U}$  ammette un sottoricoprimento finito.  $\square$

**Corollario 11.28.** *Sia  $A$  un sottoinsieme di uno spazio metrico completo  $X$ . Allora  $A$  è compatto se e solo se è chiuso e totalmente limitato.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $A$  è chiuso in un completo allora è completo. Quindi per il teorema precedente se  $A$  è chiuso e totalmente limitato allora è compatto. Viceversa, abbiamo già visto che un compatto di un metrico è chiuso. Per ogni  $\varepsilon > 0$  il ricoprimento  $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in A}$  ammette un sottoricoprimento finito, e quindi  $A$  è totalmente limitato.  $\square$

Una conseguenza famosa di questo teorema è il teorema di Ascoli-Arzelà.

**Definizione 11.29** (Relativamente compatti). *Un sottoinsieme  $A$  di uno spazio topologico  $X$  si dice relativamente compatto se la sua chiusura in  $X$  è compatto.*

**Definizione 11.30** (Diametro). *Il diametro di un sottoinsieme  $A$  di uno spazio metrico è  $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ .*

**Teorema 11.31** (Ascoli-Arzelà). *Siano  $X$  uno spazio compatto e  $Y$  uno spazio metrico. Sia  $F$  una famiglia di funzioni da  $X$  a  $Y$  equicontinue ed equilimitate, e cioè tali che*

- *Equilimitatezza: esiste un compatto  $K \in Y$  tale che  $f(X) \subset K$  per ogni  $f \in F$ ;*
- *Equicontinuità: per ogni  $\varepsilon > 0$  per ogni  $x \in X$  esiste un intorno  $U_x$  di  $x$  tale che per ogni  $f \in F$  il diametro di  $f(U_x)$  sia minore di  $\varepsilon$ .*

*Allora la chiusura di  $F$  è un insieme totalmente limitato. In particolare, se  $Y$  è completo allora  $F$  è relativamente compatto rispetto alla metrica del sup di  $Y^X$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'ultima affermazione deriva dal fatto che se  $Y$  è completo allora  $Y^X$  rispetto alla metrica del sup. (Teorema 3.15.)

Mostriamo ora che per ogni  $\varepsilon > 0$  lo spazio  $\overline{F}$  ha un  $4\varepsilon$ -reticolo finito. Sia  $\{y_i\}_I$  un  $\varepsilon$ -reticolo finito in  $K$ . Per equicontinuità, ogni  $x$  in  $X$  ha un intorno  $U_x$  tale che  $f(U_x)$  ha diametro al più  $\varepsilon$ . Il ricoprimento aperto  $\{U_x\}$  ha un sotto ricoprimento finito  $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ . Sia  $\Sigma$  l'insieme delle funzioni da  $\{1, \dots, n\}$  a  $I$ . Esso è chiaramente un insieme finito. Ad ogni funzione  $f$  da  $X$  in  $K$  possiamo associare una (non unica in generale)  $\sigma(f) \in \Sigma$  tale che

$$d(f(x_i), y_{\sigma(i)}) < \varepsilon$$

per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

Per ogni funzione  $\sigma \in \Sigma$  scegliamo, se esiste, una funzione  $f_\sigma \in F$  tale che  $\sigma(f_\sigma) = \sigma$ .

L'insieme

$$\{f_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$$

è un  $4\varepsilon$ -reticolo finito nella chiusura di  $F$  in  $Y^X$  con la metrica del sup. Infatti se  $g \in F$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$  si ha:

$$d(g(x_i), f_{\sigma(g)}(x_i)) \leq d(g(x_i), y_{\sigma(g)(i)}) + d(y_{\sigma(g)(i)}, f_{\sigma(g)}(x_i)) \leq 2\varepsilon$$

e quindi se  $x \in U_{x_i}$

$$d(g(x), f_{\sigma(g)}(x)) \leq d(g(x), g(x_i)) + d(g(x_i), f_{\sigma(g)}(x_i)) + d(f_{\sigma(g)}(x_i), f_{\sigma(g)}(x)) \leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

quindi

$$d(g, f_{\sigma(g)}) = \sup_{x \in X} d(g(x), f_{\sigma(g)}(x)) \leq 4\varepsilon$$

e tutte le disuguaglianze passano al limite per  $g \in \overline{F}$ .  $\square$

Sappiamo che le funzioni continue mandano compatti in compatti, il viceversa non è in generale vero.

**ESEMPIO 11.32.** Sia  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la proiezione canonica. Per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}$  (non vuoto) la sua preimmagine  $\pi^{-1}(K)$  non è mai compatta perché illimitata.

**Definizione 11.33.** Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici si dice propria se per ogni compatto  $K \subseteq Y$  si ha che  $f^{-1}(K)$  è compatto.

**Teorema 11.34.** siano  $X, Y$  spazio topologici di cui  $Y$  compatto e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione tale che per ogni  $y \in Y$  l'insieme  $f^{-1}(y)$  sia compatto. Supponiamo che per ogni  $y \in Y$  e per ogni aperto  $U$  contenente  $f^{-1}(y)$  esista un aperto  $V$  contenente  $y$  tale che  $f^{-1}(V) \subseteq U$  (in particolare  $f$  è suriettiva). Allora  $X$  è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  un ricoprimento aperto di  $X$ . Per ogni  $y \in Y$  l'insieme  $f^{-1}(y)$  è compatto per ipotesi. Esistono quindi  $i_1, \dots, i_k$  — che dipendono da  $y$  — tali che  $f^{-1}(y) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$ . Per ipotesi esiste un intorno aperto  $V_y$  di  $y$  tale che  $f^{-1}(V_y) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$ . La famiglia  $\{V_y\}$  è chiaramente un ricoprimento aperto di  $Y$ . Siccome  $Y$  è compatto, un numero finito dei  $V_y$  copre  $Y$ . Ne segue che  $X$  è coperto da un numero finito di insiemi del tipo  $f^{-1}(V_y)$ , ognuno dei quali è coperto da un numero finito di  $U_i$ . Dunque  $X$  è ricoperto da un numero finito degli  $U_i$ .  $\square$

**Corollario 11.35.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una applicazione chiusa tale che le preimmagini di ogni punto siano compatte. Se  $A \subseteq X$  è tale che  $f(A)$  è compatto, allora  $A$  è compatto. In particolare  $f$  è propria.

**DIMOSTRAZIONE.** Usiamo il teorema precedente. Se  $y \in Y$  e  $U$  è un aperto contenente  $f^{-1}(y)$  allora  $U^c$  è chiuso e quindi  $f(U^c)$  è un chiuso che non contiene  $y$ . Quindi  $V = f(U^c)^c$  è un aperto contenente  $y$ . Siccome  $f^{-1}f(B) \supseteq B$  per ogni  $B$  e il passaggio al complementare ribalta le inclusioni, si ha

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(f(U^c)^c) = (f^{-1}(f(U^c)))^c \subseteq (U^c)^c = U$$

e quindi il teorema precedente si applica.  $\square$

Un altro corollario è il seguente teorema:

**Teorema 11.36** (Prodotto di compatti è compatto). *Siano  $A, B$  spazi topologici. Allora  $A \times B$  è compatto se e solo se entrambi  $A, B$  lo sono.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $A \times B$  è compatto, siccome le proiezioni sono continue e immagine continua di un compatto è compatto, allora sia  $A$  che  $B$  sono compatti. Per il viceversa usiamo il Teorema 11.34 con  $X = A \times B$ ,  $Y = A$  e  $f$  la proiezione  $A \times B \rightarrow A$ .  $A$  è compatto per ipotesi. Per ogni  $a \in A$  le fibre  $\{a\} \times B$  sono compatte perché  $B$  è compatto per ipotesi. Dobbiamo solo verificare l'ultima condizione su  $f$ .

Siccome una base della topologia prodotto è fatta da aperti prodotto, ogni aperto  $U$  contenente  $\{a\} \times B$  è unione di prodotti di aperti  $U_i = V_i \times W_i$ . Di questi consideriamo solo quelli che intersecano  $\{a\} \times B$ . Per compattezza esistono  $i_1, \dots, i_k$  tali che

$$\{a\} \times B \subseteq V_{i_1} \times W_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n} \times W_{i_n} \subseteq U.$$

Chiaramente  $V = \bigcap_{j=1}^k V_{i_j}$  è aperto, contiene  $a$  e  $f^{-1}(V) \subseteq V_{i_1} \times W_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n} \times W_{i_n}$ .  $\square$

Questo teorema vale più in generale.

**Teorema 11.37** (Tychonoff). *Sia  $\{A_i\}_{i \in I}$  una famiglia qualsiasi di spazi compatti. Allora il prodotto*

$$\prod_{i \in I} A_i$$

*è compatto.*

La dimostrazione usa l'assioma della scelta ed esula dagli scopi di queste note.

**Corollario 11.38.** *Sia  $X$  uno spazio compatto allora l'insieme*

$$X^A = \{f : A \rightarrow X\}$$

*è compatto per la topologia della convergenza puntuale. In particolare  $[0, 1]^{\mathbb{R}} : \{f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]\}$  è compatto per la topologia della convergenza puntuale.*

**DIMOSTRAZIONE.** La topologia della convergenza puntuale è la topologia prodotto.  $\square$

**Definizione 11.39** (Compattezza per successioni). *Uno spazio topologico  $X$  si dice compatto per successioni (generalizzate) se ogni successione (generalizzata) in  $X$  ha una sottosuccessione (generalizzata) convergente.*

**ESEMPIO 11.40** (Spazio compatto ma non compatto per successioni). *L'insieme  $[0, 1]^{[0, 1]}$  non è compatto per successioni.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni  $x \in [0, 1]$  sia  $(e_n(x))_n \in \mathbb{N}$  la sua rappresentazione binaria (cioè  $x = \sum_n e_n(x) 2^{-n}$ ). Per ogni  $n$  fissato,  $e_n(x)$  definisce una funzione  $e_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Sia  $n_k$  una sottosuccessione qualsiasi. Consideriamo adesso l'insieme  $Y = \{n_{2k} : k \in \mathbb{N}\}$ . Esso corrisponde al numero irrazionale  $y = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-n_{2k}}$  e la successione  $e_{n_k}(y)$  vale 1 per  $k$  pari e 0 per  $k$  dispari. Quindi la sottosuccessione  $e_{n_k}$  non converge nel punto  $y$ . Ne segue che  $(e_n) \subset [0, 1]^{[0, 1]}$  non ha nessuna sottosuccessione convergente.  $\square$

**Teorema 11.41** (Compatto per successioni generalizzate implica compatto). *Sia  $X$  uno spazio non compatto. Allora esiste una successione generalizzata che non ammette sottosuccessioni convergenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  un ricoprimento aperto di  $X$  che non ammette un sottoricoprimento finito. Sia  $I$  l'insieme delle unioni finite di elementi di  $\mathcal{U}$ , ordinato per inclusione. Chiaramente  $I$  è un insieme diretto perché se  $A, B \in I$  allora  $A \cup B \in I$  e  $A \cup B \geq A, B$ . Siccome  $\mathcal{U}$  non ha sottoricoprimenti finiti, per ogni  $i \in I$  esiste  $x_i \notin i$ . Anche se la notazione è strana non sta succedendo nulla di strano: stiamo usando come insieme di indici per una successione una famiglia  $I$  di sottoinsiemi. Quindi ha senso dire  $x_i \notin i$ . Sia  $J \subset I$  un qualsiasi sottoinsieme diretto e cofinale in  $I$  e consideriamo la sottosuccessione  $(x_j)_{j \in J}$ .

Sia  $x \in X$  e sia  $U_\alpha \in \mathcal{U}$  tale che  $x \in U_\alpha$ . Per ogni  $j \in J$  l'insieme  $j \cup U_\alpha$  è un elemento di  $I$  in quanto unione finita di elementi di  $\mathcal{U}$ . Per cofinalità esiste  $k \in J$  tale che  $k \geq j \cup U_\alpha$  e per ogni  $n > k$  in  $J$  si ha

$$x_n \notin n \supseteq k \supseteq j \cup U_\alpha$$

in particolare

$$\forall j \in J \exists k \in J : \forall n > k : x_n \notin U_\alpha$$

e dunque la sottosuccessione  $(x_j)_{j \in J}$  non converge a  $x$ . Siccome ciò vale per ogni  $x$ , la sottosuccessione  $(x_j)_{j \in J}$  non converge. Siccome ciò vale per ogni  $J$ , la successione iniziale  $(x_i)_{i \in I}$  non ha sottosuccessioni convergenti.  $\square$

**Corollario 11.42** (Base numerabile, compatto per successioni implica compatto). *Sia  $X$  uno spazio topologico a base numerabile, se ogni successione in  $X$  ammette una sottosuccessione convergente allora  $X$  è compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Con le notazioni precedenti, se  $X$  è a base numerabile, allora  $\mathcal{U}$  ha un raffinamento numerabile e dunque l'insieme  $I$  è numerabile. Quindi il teorema precedente dice che se  $X$  non è compatto allora esiste una successione genuina che non ha sottosuccessioni convergenti.  $\square$

**ESERCIZIO 11.43.** *Riscrivere una dimostrazione del corollario precedente senza usare le successioni generalizzate.*

**ESEMPIO 11.44** (Compatto per successioni ma non compatto).  $\omega_1$  è compatto per successioni ma non è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.** La non compattezza di  $\omega_1$  dipende dalla sua illimitatezza: per ogni  $x \in \omega_1$  sia  $U_x = [0, x)$ . Chiaramente  $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in \omega_1}$  è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti. D'altronde, se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione in  $\omega_1$ , essa è limitata perché  $\omega_1$  non ha cofinalità numerabile. Quindi il  $\limsup$  di  $x_n$  è un suo punto di accumulazione e dunque esiste  $x_{n_k}$  che tende al  $\limsup x_n$ .  $\square$

**Teorema 11.45** (Compatto vs aderenza di successioni). *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico compatto. Allora ogni successione in  $X$  ha un punto di aderenza, cioè*

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X, \exists x \in X : \forall U \in \tau, \forall n > 0 \exists m > n : x_m \in U$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia

$$K_n = \overline{\{x_i : i \geq n\}} \subseteq X.$$

Dire che  $x$  è di aderenza per la successione  $(x_n)$  equivale a dire che

$$x \in K_n \quad \forall n \quad \text{cioè} \quad x \in \bigcap_n K_n.$$

Quindi dobbiamo dimostrare che  $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$ . Ciò seguirà immediatamente dal prossimo lemma.

**Lemma 11.46.** *Sia  $X$  compatto e  $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots$  una successione di sottoinsiemi chiusi non vuoti di  $X$ , uno dentro l'altro. Allora*

$$\bigcap_n K_n \neq \emptyset.$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome  $K_n$  è chiuso, il suo complementare  $K_n^c$  è aperto. Siccome

$$(\bigcap_n K_n)^c = \bigcup_n K_n^c$$

dire che  $\bigcap_n K_n$  è vuoto equivale a dire che  $\{K_n^c\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . In tal caso, siccome  $X$  è compatto, un numero finito di  $K_n^c$  copre  $X$ , ma siccome i  $K_n$  sono uno dentro l'altro, da ciò segue che esiste  $n$  tale che  $K_n^c = X$  e quindi  $K_n = \emptyset$ . Quindi, se i  $K_n$  son tutti non vuoti, la loro intersezione non può essere vuota.  $\square$

Torniamo alla dimostrazione del teorema. Gli insiemi  $K_n$  sono chiusi per definizione e  $x_n \in K_n$ , quindi sono non vuoti.  $X$  è compatto e dunque il lemma si applica.  $\square$

Un punto di aderenza di una successione non è necessariamente il limite di una successione, ma ciò è vero se siamo in uno spazio a base numerabile.

**Teorema 11.47** (Aderenza vs accumulazione). *Sia  $(x_n)$  una successione in uno spazio topologico  $X$  e sia  $x$  un punto di aderenza di  $(x_n)$ . Se  $x$  ha un sistema fondamentale di intorni numerabile allora esiste una sottosuccessione  $x_{n_k}$  che converge a  $x$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un sistema fondamentale di intorni di  $x$ . Definiamo  $V_n = U_1 \cap \dots \cap U_n$ . Per definizione se  $m > n$  allora  $V_m \subset V_n$ . In oltre  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un sistema fondamentale di intorni di  $x$ . Siccome per ogni intorno  $U$  di  $x$  e per ogni  $n > 0$  esiste  $m > n$  tale che  $x_m \in U$ , esiste  $n_1$  tale che  $x_{n_1} \in V_1$ . Per induzione, esistono  $n_k$  tale che  $n_k > n_m$  se  $k > m$  e tali che  $x_{n_k} \in V_k$ . Ne segue che  $x_{n_k} \rightarrow x$ .  $\square$

**Corollario 11.48.** *Sia  $X$  uno spazio topologico a base numerabile. Allora  $X$  è compatto se e solo se è compatto per successioni.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue immediatamente dai teoremi precedenti.  $\square$

Vale la pena notare che in generale, intersezione di chiusi non vuoti e inscatolati uno dentro l'altro non è necessariamente non vuota.

ESEMPIO 11.49. *Sia  $X = \mathbb{R}$  e sia  $K_n = [n, \infty)$ . Si ha  $K_{n+1} \subset K_n$ , in oltre ogni  $K_n$  è chiuso e non vuoto. Nonostante ciò,  $\bigcap_n K_n = \emptyset$ .*

ESERCIZIO 11.50. *Ripercorrere la dimostrazione del lemma precedente con l'esempio qui sopra per vedere cosa va storto.*



**12. Teorema del compatto-Hausdorff: applicazioni a quozienti e taglia e cuci**

Siano  $X, Y$  spazi topologici e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua. Per ora sappiamo che:

- $f^{-1}$ (Aperto) è un aperto;
- $f^{-1}$ (Chiuso) è un chiuso;
- $f$ (Kompatto) è compatto.

Siccome i chiusi nei compatti sono compatti e i compatti nei  $T_2$  sono chiusi, allora:

- Se  $X$  è compatto e  $Y$  è  $T_2$ , allora  $f$  è automaticamente chiusa;
- in particolare se  $f$  è biunivoca la sua inversa è continua e quindi è un omeomorfismo.

Riassumendo, abbiamo appena dimostrato il seguente teorema.

**Teorema 12.1** (Compact-Hausdorff Theorem). *Se  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione continua e biunivoca tra uno spazio topologico compatto e uno spazio di Hausdorff allora  $f$  è un omeomorfismo.*

Supponiamo che  $X$  sia uno spazio topologico e  $\sim$  una relazione d'equivalenza su  $X$ . Sia  $A$  un sottoinsieme di  $X$ .

- L'inclusione  $i : A \rightarrow X$  è continua tautologicamente per la topologia indotta da  $X$  su  $A$ ;
- L'inclusione indotta sui quozienti  $\iota : A/\sim \rightarrow X/\sim$  è dunque continua.
- Tale inclusione è ovviamente iniettiva.
- Se  $A$  interseca ogni classe di equivalenza allora  $\iota$  è anche suriettiva, dunque biunivoca.
- Se  $A$  è compatto allora  $A/\sim = \pi(A)$  è compatto perché la proiezione  $\pi$  è continua.
- Se infine  $X/\sim$  è  $T_2$  allora  $\iota : A/\sim \rightarrow X/\sim$  è un omeomorfismo.

Riassumendo, abbiamo

**Teorema 12.2.** *Sia  $X$  uno spazio topologico e  $\sim$  una relazione d'equivalenza su  $X$  tale che  $X/\sim$  sia  $T_2$ . Se  $A \subseteq X$  è compatto e interseca tutte le classi di equivalenza, cioè  $\text{sat}(A) = X$ , allora  $X/\sim$  è omeomorfo a  $A/\sim$ .*

**ESEMPIO 12.3.**  $\mathbb{RP}^2$  è omeomorfo a  $S^2$  modulo la relazione antipodale ( $x \sim -x$ ).

**DIMOSTRAZIONE.** Il proiettivo è  $T_2$  perchè date due rette diverse in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  esse sono contenute in due coni (aperti saturi) disgiunti.  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$  è compatto in quanto chiuso e (totalmente) limitato in  $\mathbb{R}^3$ . In oltre, ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  interseca  $S^2$ . Ne segue che  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\mathbb{R}^*$  è omeomorfo a  $S^2/\mathbb{R}^*$  (che in particolare è compatto). L'azione di  $\mathbb{R}^*$  su  $S^2$  dice che  $v, w \in S^2$  sono equivalenti se e solo se esiste  $\lambda \neq 0$  tale che  $v = \lambda w$  e dunque

$$1 = \|v\| = \|\lambda w\| = |\lambda| \|w\| = |\lambda|$$

quindi  $\lambda = \pm 1$  e dunque

$$v \sim w \quad \iff \quad v = \pm w.$$

□

ESEMPIO 12.4.  $\mathbb{R}P^2$  è omeomorfo al disco  $D^2$  modulo l'antipodale al bordo.

DIMOSTRAZIONE. In  $S^2$  consideriamo la calotta antartica:  $A = \{(x, y, z) \in S^2 : z \leq 0\}$ . La proiezione di  $A$  su  $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (x, y)$$

è un omeomorfismo tra  $A$  e  $D^2$ . In oltre  $A$  è compatto (chiuso e limitato in  $\mathbb{R}^3$ ) e interseca ogni retta di  $\mathbb{R}^3$ . Quindi  $\mathbb{R}P^2$  è omeomorfo a  $A/\sim$ , ove  $\sim$  è l'antipodale di  $S^2$ . La relazione di equivalenza antipodale di  $S^2$  ristretta a  $A$  è data da

$$\begin{cases} \text{se } x \in \text{Int}(A) \text{ allora } x \sim y \Leftrightarrow x = y \\ \text{se } x \in \partial(A) \text{ allora } x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y \end{cases} .$$

□

ESERCIZIO 12.5. Dimostrare che  $\mathbb{R}P^n$  è omeomorfo a  $S^n$  modulo l'antipodale.

ESERCIZIO 12.6. Dimostrare che  $\mathbb{R}P^n$  è omeomorfo a  $D^n$  modulo l'antipodale al bordo. Il bordo modulo l'antipodale è un  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Dimostrare che esso corrisponde all' $\mathbb{R}P^{n-1}$  all'infinito di una carta affine  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}P_\infty^{n-1}$ .

ESERCIZIO 12.7. Dimostrare che  $\mathbb{R}P^2$  è l'unione di un disco e un nastro di Moebius, identificati lungo il bordo (dimostrare che il bordo di entrambi è un  $S^1$ ).

ESEMPIO 12.8.  $[0, 1]$  con la relazione generata da  $0 \sim 1$  è omeomorfo a  $S^1$ .

DIMOSTRAZIONE. Identificando  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  si ha  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$  e quindi  $S^1$  è  $T_2$  perchè sottospazio di uno spazio  $T_2$ .  $[0, 1]$  è compatto e quindi  $[0, 1]/\sim$  lo è. L'applicazione  $f : [0, 1]/\sim \rightarrow S^1$  data da

$$f(x) = e^{2\pi ix}$$

è continua e biunivoca, quindi per il teorema del compatto-Hausdorff  $f$  è un omeomorfismo. □

ESEMPIO 12.9. Sia  $X = [0, 1]^2$  e  $\sim$  la relazione generata da  $(x, 0) \sim (x, 1)$  e  $(0, y) \sim (1, y)$ . Il quoziente  $X/\sim$  è omeomorfo al toro  $T^2 = S^1 \times S^1$ .

DIMOSTRAZIONE.  $[0, 1]^2$  è compatto perchè prodotto di compatti. Quindi  $X/\sim$  è compatto.  $S^1 \times S^1$  è di Hausdorff in quanto prodotto di spazi di Hausdorff. La funzione  $f(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$  è continua e biunivoca e quindi è omeomorfismo. □

ESEMPIO 12.10.  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  è omeomorfo a  $T^2$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $A = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ .  $A$  interseca tutte le  $\mathbb{Z}^2$ -orbite di punti in  $\mathbb{R}^2$ . In oltre  $A$  è compatto e  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  è  $T_2$ . Quindi  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  è omeomorfo a  $A/\mathbb{Z}^2$  che, per l'esempio precedente, è omeomorfo a  $T^2$ . □

ESEMPIO 12.11.  $SO(2)$  è omeomorfo a  $S^1$ .

DIMOSTRAZIONE.  $SO(2)$  è un sottospazio delle matrici  $2 \times 2$  che è naturalmente identificato con  $\mathbb{R}^4$  da cui eredita una topologia. Rispetto a tale topologia  $SO(2)$  è  $T_2$  perché  $\mathbb{R}^4$  lo è.  $S^1 = [0, 2\pi]/0 \sim 2\pi$  è compatto e la funzione

$$f(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

è continua e biunivoca. □

ESEMPIO 12.12. Consideriamo l'azione di  $SO(2)$  in  $\mathbb{R}^3$  per rotazioni orizzontali

$$A(x, y, z) = (A(x, y), z)$$

Il quoziente  $S^2/SO(2)$  è omeomorfo a un segmento.

DIMOSTRAZIONE. Le orbite di  $SO(2)$  sono i paralleli, cioè i cerchi orizzontali. Date due orbite, esse sono separate da aperti saturi e quindi  $S^2/SO(2)$  è  $T_2$ . Consideriamo un meridiano  $A \subset S^2$  dato da

$$A = \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\}.$$

$A$  interseca tutti i paralleli una e una sola volta quindi  $A/\sim = A$ .  $A$  è compatto quindi  $A/\sim = S^2/SO(2)$ .

Per dimostrare che  $A$  è omeomorfo ad un segmento basta considerare la proiezione di  $A$  sull'asse  $Z$ : essa è una funzione continua e biunivoca da un compatto a un  $T_2$  quindi è un omeomorfismo con l'immagine, che è il segmento  $[-1, 1]$ . □

ESEMPIO 12.13.  $SO(3)$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}P^3$ .

DIMOSTRAZIONE. La topologia di  $SO(3)$  è quella indotta da  $\mathbb{R}^9$  identificato con lo spazio delle matrici  $3 \times 3$ . Quindi  $SO(3)$  è  $T_2$ . Sappiamo già che  $\mathbb{R}P^3$  è un compatto ed è omeomorfo a  $D^3$  modulo l'antipodale al bordo. Definiamo ora una funzione  $F : \mathbb{R}P^3 \rightarrow SO(3)$  che sia continua e biunivoca. Ad ogni punto  $0 \neq x \in D^3$  associamo la rotazione di  $\mathbb{R}^3$  che ha per asse la retta passante per  $x$  e per angolo  $\pi\|x\|$ , in senso orario rispetto alla regola della mano destra con il pollice che punta verso  $x$ . Si noti che se  $y = -x$  allora  $F(y)$  ha lo stesso asse di rotazione di  $F(x)$ , stesso angolo ma in senso antiorario rispetto a  $F(x)$ . Tale funzione si estende per continuità nell'origine ponendo  $F(0) = Id$ . In oltre se  $\|x\| = 1$  allora, siccome la rotazione oraria di  $\pi$  coincide con la antioraria di  $-\pi$ , si ha  $F(x) = F(-x)$ . In altre parole

$$x \sim y \quad \Rightarrow \quad F(x) = F(y)$$

quindi  $F$  induce una funzione da  $D^3$  modulo antipodale a  $SO(3)$  che è continua e iniettiva. In oltre, ogni elemento di  $SO(3)$  è una rotazione e quindi  $F$  è anche suriettiva. Quindi  $F$  è un omeomorfismo. □

ESERCIZIO 12.14. In  $\mathbb{R}^3$  consideriamo il prodotto di Minkowski associato alla forma quadratica  $\|(x, y, z)\|_M^2 = x^2 + y^2 - z^2$ . Sia  $X = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\|_M^2 = 1\}$ . Dimostrare che  $X$  è omeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Si dimostri che  $X$  non è omeomorfo a  $S^2$ , la sfera unitaria standard.

### 13. Locale compattezza e compattificazioni

**Definizione 13.1** (Locale compattezza). *Uno spazio topologico  $X$  si dice localmente compatto se ogni suo punto ha un intorno compatto.*

**ESEMPIO 13.2.** *Ogni spazio compatto  $X$  è localmente compatto: esso è un intorno compatto di ogni suo punto.*

**ESEMPIO 13.3.**  $\mathbb{R}^n$  *standard è localmente compatto: per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  l'insieme  $\overline{B(x, \varepsilon)}$  è un intorno compatto (perchè chiuso e limitato) di  $x$ .*

**ESEMPIO 13.4.** *La rosa con infiniti petali  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (inteso come collasso di  $\mathbb{Z}$  un punto) non è localmente compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni intorno  $U$  di  $z = [\mathbb{Z}]$ , esistono  $\varepsilon_n > 0$  tali che, detto  $A = \cup_n(n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n)$ , si ha  $\pi^{-1}(U) \supseteq A$ . Per ogni  $x \in (n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n)$  sia  $B_n(x) = B(x, \varepsilon_n/10)$ . Ma allora il ricoprimento di  $U$

$$\mathcal{U} = \{U \setminus \bar{A}\} \cup \{B_n(x) : n \in \mathbb{Z}, x \in U\}$$

non ha sottoricoprimenti finiti. □

Vediamo adesso un po' di modelli di orecchini hawaiani. In  $\mathbb{R}^2$  sia

$$C_n = \partial B((0, 2^n), 2^n) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - (0, 2^n)\| = 2^n\}$$

Ogni  $C_n$  è un cerchio nel semipiano superiore, centrato sull'asse delle  $Y$  e che è tangente all'asse  $X$  nell'origine. Se  $n > 0$  il cerchio è grande, se  $n < 0$  il cerchio è piccolo.

**ESEMPIO 13.5** (Modello numero 1).

$$M_1 = \cup_{n < 0} C_n$$

$M_1$  è limitato perché contenuto nella palla di centro  $(0, 1/2)$  e raggio  $5/7$ .  $M_1$  è chiuso perchè il complementare

$$M_1^c = (\overline{B((0, 1/2), 1/2)})^c \cup_n B((0, 1/2^n), 1/2^n) \setminus B((0, 1/2^{n+1}), 1/2^{n+1})$$

è unione di aperti e quindi è aperto. Quindi  $M_1$  è compatto. Quindi è anche localmente compatto. In particolare non è omeomorfo alla rosa con infiniti petali. (Cosa che si poteva dedurre anche dal fatto che la rosa infinita non ha base numerabile mentre  $M_1$ , in quanto sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  è a base numerabile.)

**ESEMPIO 13.6** (Modello numero 2).

$$M_2 = \cup_{n \in \mathbb{Z}} C_n$$

$M_2$  non è limitato in quanto il diametro di  $C_n$  tende all'infinito per  $n \rightarrow \infty$ . In oltre  $M_2$  non è chiuso: si trova facilmente una successione  $x_n \in C_n$  tale che  $x_n \rightarrow (0, 5) \notin M_2$ . Andando a vedere meglio, per ogni intorno  $U$  dell'origine si trova una successione  $x_n \in C_n$  tale che  $x_n$  converge a un punto  $x$  dell'asse  $X$  che non sia l'origine. Ma l'asse  $X$  interseca  $M_2$  solo nell'origine. Quindi  $U$  non è compatto. Quindi l'origine non ha nessun intorno compatto e  $M_2$  non è localmente compatto. In particolare  $M_2$  non è omeomorfo a  $M_1$ . (Neanche alla rosa con infiniti petali per questione di numerabilità della base.)

**Teorema 13.7.** *Un chiuso  $Y$  di un localmente compatto  $X$  è localmente compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $y \in Y \subset X$ . Esso ha un intorno  $V$  compatto in  $X$ . Quindi  $Y \cap V$  è chiuso in  $V$ , ergo compatto, ed è un intorno di  $y$  in  $Y$ .  $\square$

**ESEMPIO 13.8** (Modello numero 3).

$$M_3 = M_1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$$

Cioè  $M_1$  più l'asse  $X$ . Questo è un chiuso di  $\mathbb{R}^2$  e quindi è localmente compatto. Non è compatto. In particolare non è omeomorfo né a  $M_1$  né a  $M_2$ .

**ESEMPIO 13.9** (Giuditta).

$$M_4 = M_2 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$$

Cioè  $M_2$  più l'asse  $X$ . Questo è un chiuso di  $\mathbb{R}^2$  e quindi è localmente compatto. Non è compatto perché non è limitato. In particolare non è omeomorfo né a  $M_1$  né a  $M_2$ .

**ESERCIZIO 13.10.** (Difficile con le tecniche sviluppate sin ora) Dimostrare che  $M_3$  e  $M_4$  non sono omeomorfi.

**ESERCIZIO 13.11.** Sia  $A = \{1/2^n : n \in \mathbb{Z}\}$  e sia  $X = A \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ . ( $X$  è una successione di rette verticali che si accumulano sull'asse  $Y$ .) Si dica se  $X$  è localmente compatto.

**ESEMPIO 13.12** (Modello numero 2 con un punto in più). Sia  $X = M_2 \cup \{\infty\}$  con la seguente topologia:  $A$  è aperto se e solo se  $A \subset M_2$  e  $A$  è aperto in  $X$  oppure se  $A = X$ .  $X$  è compatto. Infatti se  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$  esiste un aperto  $U_i$  che contiene il nuovo punto  $\infty$ , quindi  $U_i = X$  in quanto  $X$  è l'unico aperto che contiene  $\infty$ . Quindi  $U_i$  è un sottoricoprimento finito di  $\mathcal{U}$ .

Ne segue che  $X$  è anche localmente compatto. Notiamo però, che la patologia vicino a zero è ancora presente: Se  $U \neq X$  è un intorno dell'origine, non esistono intorni compatti contenuti in  $U$ .

Questo strano comportamento non succede se lo spazio è  $T_2$ :

**Teorema 13.13** (Localmente compatti per davvero). *Sia  $X$  uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Allora ogni  $x \in X$  ha un sistema fondamentale di intorni compatti.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo che  $x$  ha un intorno compatto, che chiamiamo  $V$ .  $V$  è un compatto  $T_2$  perché  $X$  è  $T_2$ .

Dobbiamo dimostrare che per ogni intorno  $A$  che contiene  $x$ , esiste un intorno compatto di  $x$  che sia contenuto in  $A$ .

Siccome  $A \cap V$  è un intorno di  $x$ , esiste un aperto

$$B \subseteq A \cap V$$

che contiene  $x$ . L'insieme  $K = V \setminus B = V \cap B^c$  è chiuso in  $V$ , ergo compatto. Siccome  $x \notin K$ , dal Teorema 11.16 segue che esistono aperti  $U_x \subseteq V$  e  $U_K$  disgiunti tali che  $x \in U_x$  e  $K \subseteq U_K$ . In particolare  $U_x$  è un intorno di  $x$  in  $X$ .

Sia  $U$  la chiusura di  $U_x$  in  $X$ . Esso è un intorno di  $x$ . Siccome  $V$  è un compatto in un  $T_2$  esso è chiuso. Siccome  $U_x \subseteq V$  si ha  $U = \overline{U_x} \subseteq \overline{V} = V$ . Quindi

$$U \subseteq V$$

e, in quanto chiuso in un compatto, è compatto.

Resta da dimostrare che  $U$  è contenuto in  $A$ . Siccome  $K \subseteq U_K$  si ha  $K^c \supseteq U_K^c$ . Siccome  $U_K^c$  è chiuso e  $U_x \subseteq U_K^c$  si ha

$$U = \overline{U_x} \subseteq U_K^c = (V \cap B^c)^c = V^c \cup B$$

ma siccome  $U \subseteq V$  allora  $U \subseteq B$ . La tesi segue dal fatto che  $B \subseteq A \cap V \subseteq A$ .  $\square$

**ESERCIZIO 13.14.** *Provate a seguire passo passo la dimostrazione di questo teorema con  $X = M_2 \cup \{\infty\}$  e la topologia dell'Esempio 13.12 (che non è  $T_2$  e quindi il teorema non si applica) per vedere dove sballa.*

**Definizione 13.15.** *Sia  $X$  uno spazio topologico. Uno spazio topologico compatto  $Y$  si dice una compattificazione di  $X$  se esiste una immersione  $X \rightarrow Y$  la cui immagine sia densa in  $Y$ .*

**ESEMPIO 13.16.**  $S^1$  è una compattificazione di  $\mathbb{R}$ .

**ESEMPIO 13.17.**  $[0, 1]$  è una compattificazione di  $\mathbb{R}$ .

**ESEMPIO 13.18.**  $S^2$  è una compattificazione di  $\mathbb{R}^2$ .

**ESEMPIO 13.19.**  $D^2$  è una compattificazione di  $\mathbb{R}^2$ .

**ESEMPIO 13.20.**  $\mathbb{R}P^2$  è una compattificazione di  $\mathbb{R}^2$ .

**ESEMPIO 13.21** (Compattificazione ad peram). *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $*$  un nuovo elemento che non era già in  $X$ . Su  $P = X \cup \{*\}$  mettiamo la topologia generata da  $\tau$ , cioè gli aperti sono quelli di  $\tau$  più il tutto  $P$ . In altre parole l'unico intorno di  $*$  è  $P$ . Questa topologia non è ovviamente  $T^2$  e  $X$  è denso in  $P$ . In oltre  $P$  è compatto perché se  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  è un ricoprimento aperto di  $P$ , allora esiste  $U_i$  che contiene  $*$  ma allora  $U_i = P$  ed esso costituisce quindi un sottoricoprimento finito di  $\mathcal{U}$ .*

**Definizione 13.22** (Compattificazione di Alexandroff). *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Se  $X$  è compatto lo lasciamo stare e ci facciamo una birra. Se  $X$  non è compatto gli aggiungiamo un nuovo punto, che chiamiamo  $\infty$ . Poniamo  $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ . Su  $\widehat{X}$  definiamo una topologia  $\widehat{\tau}$  per cui  $A \subseteq \widehat{X}$  è aperto se e solo se*

$$A \in \tau \quad \text{oppure} \quad A^c \subset X \text{ è un compatto chiuso in } X$$

*In altre parole: gli intorni di infinito sono i complementari dei compatti chiusi di  $X$ . Si noti che se  $X$  è  $T_2$  allora la condizione di essere chiuso è automatica.*

La notazione  $\widehat{X}$  non è standard. (Per esempio oggi su wikipedia in inglese si usa la notazione  $X^*$ .)

**ESERCIZIO 13.23.** *Si verifichi che quella appena definita è in effetti una topologia.*

**Teorema 13.24** (La compattificazione di Alexandrov è una compattificazione). *Sia  $X$  uno spazio topologico. Allora  $\widehat{X}$  è compatto (ergo localmente compatto). In oltre  $X$ , se non era compatto già di suo, è denso in  $\widehat{X}$ . Infine  $\widehat{X}$  è  $T_2$  se e solo se e  $X$  è  $T_2$  e localmente compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Vediamo prima la compattezza. Sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  un ricoprimento aperto di  $\widehat{X}$ . Uno degli  $U_i$  contiene  $\infty$  quindi  $U_i^c$  è compatto. Chiaramente  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento aperto di  $U_i^c$  e quindi ammette un sottoricoprimento finito  $\mathcal{V}$  (come ricoprimenti di  $U_i^c$ ), ergo  $\mathcal{V} \cup \{U_i\}$  è un sottoricoprimento finito di  $\mathcal{U}$ .

Siccome un chiuso in un compatto è compatto, la chiusura di  $X$  è compatta. Se  $X$  non è compatto allora  $\overline{X} \neq X$  e quindi l'unica possibilità è che  $\overline{X}$  contenga anche  $\infty$  e quindi coincida con  $\widehat{X}$ .

Se  $\widehat{X}$  è  $T_2$  per ogni  $x, y \in X$  esistono  $U_x, U_y$  aperti disgiunti in  $\widehat{X}$  con  $x \in U_x, y \in U_y$ .  $U_x, U_y \cap X$  sono quindi aperti disgiunti in  $X$  che separano  $x, y$ . Quindi  $X$  è  $T_2$ . In oltre, ogni  $x$  è separato da  $\infty$  in  $\widehat{X}$ , in particolare esiste un aperto  $U_\infty$  che contiene  $\infty$  e un intorno aperto  $U_x$  di  $x$  tale che  $U_x \subseteq U_\infty^c$ . Ne segue che  $U_\infty^c$  — che per definizione è compatto. — è un intorno di  $x$ .

Viceversa se  $X$  è  $T_2$  e localmente compatto, mostriamo che  $\widehat{X}$  è  $T_2$ . Dati  $x, y \in X$  essi sono separati da aperti in  $X$  e quindi anche in  $\widehat{X}$ . Supponiamo quindi  $x \in X$  e  $y = \infty$ . Siccome  $X$  è localmente compatto,  $x$  ha un intorno compatto  $K \subset X$ . Siccome  $X$  è  $T_2$  i compatti sono automaticamente chiusi. Ne segue che  $\text{Int}(K)$  e  $K^c$  sono aperti di  $\widehat{X}$  che separano  $x$  da  $\infty$ .  $\square$

La compattificazione di Alexandroff, detta anche compattificazione con un punto, è sostanzialmente unica.

**Teorema 13.25.** *Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico non compatto e sia  $\widehat{X}$  la sua compattificazione di Alexandroff. Sia ora  $\sigma$  un'altra topologia compatta su  $\widehat{X}$  che coincida con  $\tau$  su  $X$ . Se  $\widehat{X}$  è  $T_2$  allora l'identità da  $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$  a  $(\widehat{X}, \sigma)$  è continua. Se in oltre anche  $(\widehat{X}, \sigma)$  è  $T_2$  allora l'identità è un omeomorfismo.*

*In altre parole, se  $X$  è  $T_2$  e localmente compatto, allora la compattificazione di Alexandroff è l'unica compattificazione  $T_2$  di  $X$  in cui il complementare di  $X$  è un sol punto (a meno di omeomorfismi).*

*In altre parole ancora, se  $X$  è  $T_2$  e localmente compatto, allora  $\widehat{\tau}$  è la topologia più fine su  $\widehat{X}$  tra quelle compatte che contengono  $\tau$ , e tra esse è l'unica  $T_2$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $i : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$  l'identità. Per dimostrare che  $i$  è continua si deve far vedere che per ogni  $A \in \sigma$  si ha  $A \in \widehat{\tau}$ , cioè che  $\sigma$  è meno fine di  $\widehat{\tau}$ . Se  $A \subseteq X$  allora  $A \in \tau \subseteq \widehat{\tau}$  e siamo a posto. Altrimenti  $A$  contiene  $\infty$ . Il complementare di  $A$ , che è contenuto in  $X$ , è quindi un chiuso di  $\sigma$ . Siccome  $(\widehat{X}, \sigma)$  è compatto,  $A^c$  è compatto. Siccome  $X$  è  $T_2$  allora  $A^c$  è chiuso in  $X$  e quindi  $A$  è il complementare di un chiuso compatto e quindi sta in  $\widehat{\tau}$ . Dunque l'identità è continua.

Se anche  $(\widehat{X}, \sigma)$  è  $T_2$  allora per il teorema Compatto-Hausdorff l'identità è automaticamente un omeomorfismo.  $\square$

**ESEMPIO 13.26.** *La compattificazione di Alexandroff di  $\mathbb{R}^2$  è  $S^2$ . Infatti è una compattificazione  $T_2$  fatta aggiungendo un sol punto a  $\mathbb{R}^2$ .*

**ESEMPIO 13.27.** *La compattificazione di Alexandroff di  $\mathbb{C}$  è  $\mathbb{C}P^1$ . Infatti è una compattificazione  $T_2$  fatta aggiungendo un sol punto a  $\mathbb{C}$ .*

Si noti che da ciò si può dedurre che, siccome  $\mathbb{C}$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , allora  $\mathbb{C}P^1$  è omeomorfo a  $S^2$ .

**ESEMPIO 13.28.** *La compattificazione di Alexandroff di  $\mathbb{R}^n$  è  $S^n$ .*

**ESERCIZIO 13.29.** *Si descriva la compattificazione degli orecchini Havaiani modello 3 e Giuditta. Si dimostri che la compattificazione del modello 3 è omeomorfa al modello 1. Si provi a dimostrare che quella di Giuditta è diversa (tra qualche capitolo sarà più semplice).*

**ESERCIZIO 13.30.** *Si consideri un sottoinsieme chiuso e illimitato di  $\mathbb{R}^2$ . (Esso è localmente compatto e  $T_2$ .) Se ne studi la compattificazione di Alexandroff. Si trovi un metodo generale che vada bene per tutti i chiusi illimitati di  $\mathbb{R}^2$ .*

**Teorema 13.31.** *Sia  $\widehat{X}$  la compattificazione di Alexandroff di uno spazio topologico  $T_2$  localmente compatto ma non compatto. Sia  $Y \subseteq X$  chiuso. Allora  $\widehat{Y}$  è la chiusura di  $Y$  in  $\widehat{X}$  e se  $Y$  non è compatto,  $\widehat{Y} = Y \cup \{\infty\}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.**  $\overline{Y}$  è compatto e quindi è una compattificazione di  $Y$ . Siccome  $\widehat{X}$  è  $T_2$  anche  $\overline{Y}$  lo è. Siccome  $Y$  è chiuso in  $X$ , se  $Y$  non è compatto allora è diverso da  $\overline{Y}$  e quindi  $\overline{Y} = Y \cup \{\infty\}$ . Quindi  $\overline{Y}$  è una compattificazione  $T_2$  di  $Y$  in cui il complementare di  $Y$  è un punto. Ergo  $\overline{Y} = \widehat{Y}$ .  $\square$

**ESEMPIO 13.32.** *Le compattificazioni di aggeggi chiusi  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  si fanno in  $S^2 = \mathbb{C}P^1$ . Se  $A \neq \mathbb{R}^2$  si può sempre prendere  $x \notin A$  e sbatterlo all'infinito con una applicazione di moebius. Questi diventano aggeggi limitati (ma non più chiusi) e quindi il problema si riduce alla chiusura di aggeggi limitati in  $\mathbb{R}^2$ . Provate con gli orecchini Havaiani.*

## 14. Connessione

**Definizione 14.1.** *Uno spazio topologico  $X$  si dice connesso se gli unici suoi sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono il vuoto e tutto  $X$ .*

La connessione si può esprimere in molti modi equivalenti:

- $X$  è connesso se  $\emptyset \neq A \subseteq X$  è aperto e chiuso allora  $A = X$ .
- $X$  non è connesso se esiste  $\emptyset \neq A \subseteq X$  aperto e chiuso con  $A^c \neq \emptyset$ .
- $X$  non è connesso se esiste  $A \subseteq X$  con  $A, A^c$  non vuoti ed entrambi aperti.
- $X$  non è connesso se esiste  $A \subseteq X$  con  $A, A^c$  non vuoti ed entrambi chiusi.
- $X$  non è connesso se  $X = A \sqcup B$  con  $A, B$  entrambi non vuoti e aperti.
- $X$  non è connesso se  $X = A \sqcup B$  con  $A, B$  entrambi non vuoti e chiusi.
- $X$  è connesso se  $X = A \sqcup B$  con  $A$  non vuoto e aperto implica  $B$  non aperto o vuoto.
- $X$  è connesso se  $X = A \sqcup B$  con  $A, B$  entrambi aperti implica  $A$  oppure  $B$  vuoto.



- $X$  è connesso se  $X = A \sqcup B$  con  $A, B$  entrambi aperti implica  $A$  vuoto oppure  $A = X$ .
- $X$  è connesso se gli unici sottoinsiemi di  $A$  con frontiera vuota sono il vuoto e  $X$ .
- $X$  non è connesso se esiste  $\emptyset \neq A \subseteq X$  con  $A^c \neq \emptyset$  e  $\partial A = \emptyset$ .

Si noti che la connessione, come la compattezza, è una proprietà topologica intrinseca di uno spazio: se  $X$  e  $Y$  sono omeomorfi e  $X$  è connesso allora anche  $Y$  lo è. In particolare se  $A \subset X$  ma anche  $A \subset Y$  il fatto che  $A$  sia connesso o meno dipende solo dalla topologia di  $A$  e non da quale sia lo spazio di cui è sottospazio.

**ESEMPIO 14.2.** *Un punto è sempre connesso. In quanto gli unici suoi sottoinsiemi sono il vuoto e il tutto.*

**ESEMPIO 14.3.** *Se  $X$  ha almeno due punti ed è dotato della topologia discreta allora non è connesso. Infatti in questo caso i punti sono aperti e chiusi.*

**ESEMPIO 14.4.** *Sia  $X = \{a, b\}$  con la topologia  $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ . (Si verifichi che questa è una topologia.) Allora  $X$  è connesso. Infatti gli unici sottoinsiemi di  $X$  diversi dal vuoto e  $X$  sono i punti  $\{a\}, \{b\}$ .  $\{a\}$  è aperto ma il suo complementare no. Ne segue che nessuno dei due è aperto e chiuso.*

**ESEMPIO 14.5.** *Se  $X$  è dotato della topologia banale allora è connesso. Infatti gli unici suoi sottoinsiemi aperti sono il vuoto e il tutto.*

**ESEMPIO 14.6.**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  non è connesso. Infatti  $\mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}) \sqcup (\sqrt{2}, +\infty)$  è unione di due aperti non vuoti e disgiunti.

**ESEMPIO 14.7.**  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  non è connesso. Infatti  $\mathbb{Z} = (-\infty, 1/2) \sqcup (1/2, +\infty)$  è unione di due aperti non vuoti e disgiunti. Oppure perché la topologia indotta da  $\mathbb{R}$  su  $\mathbb{Z}$  è quella discreta, e  $\mathbb{Z}$  ha almeno due punti.

**Teorema 14.8.**  $\mathbb{R}$  con la topologia standard è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  aperto e chiuso. Vogliamo dimostrare che in tal caso  $A = \mathbb{R}$ . Sia  $a \in A$  e

$$X = \{t \geq 0 : [a - t, a + t] \subset A\}$$

e sia  $t_0$  l'estremo inferiore del complementare di  $X$  in  $\mathbb{R}_+$ , ponendo  $t_0 = \infty$  se  $X = \mathbb{R}_+$ . Si noti che  $0 \in X$ . In oltre, siccome  $A$  è aperto, per ogni  $x \in A$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ . Ne segue che se  $t \in X$  allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $t + \varepsilon \in X$ . Ciò implica che

$$0 < t_0 \notin X.$$

Per ogni  $s < t_0$  si ha  $[a - s, a + s] \subset A$ , in particolare  $(a - t_0, a + t_0) \subseteq A$ . Siccome  $A$  è chiuso, se  $t_0 < \infty$  allora avremmo  $[a - t_0, a + t_0] \subseteq A$  e quindi  $t_0 \in X$  in contraddizione con quanto appena dimostrato. Quindi  $t_0 = \infty$  e dunque  $A = \mathbb{R}$ .  $\square$

**Corollario 14.9.** *Ogni intervallo aperto  $(a, b)$  è connesso.*

**DIMOSTRAZIONE.**  $(a, b)$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}$ .  $\square$

ESERCIZIO 14.10. *Dimostrare che  $\mathbb{R}^n$  è connesso.*

**Teorema 14.11** (Immagine di un connesso è connesso). *Sia  $f : X \rightarrow Y$  una applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici. Se  $X$  è connesso allora anche  $Y$  lo è.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\emptyset \neq A \subseteq Y$  aperto e chiuso. Si deve dimostrare che  $Y = A$ . L'insieme  $f^{-1}(A)$  è aperto e chiuso perché  $f$  è continua. In oltre, esso è non vuoto perché  $f$  è suriettiva. Siccome  $X$  è connesso  $f^{-1}(A) = X$  e siccome  $f$  è suriettiva  $A = f(f^{-1}(A)) = f(X) = Y$ .  $\square$

**Corollario 14.12.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua tra spazi topologici. Se  $A \subseteq X$  è connesso allora  $f(A)$  è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il teorema precedente con  $f|_A : A \rightarrow f(A)$ .  $\square$

**Corollario 14.13.** *Sia  $X$  è uno spazio topologico e  $\sim$  una relazione d'equivalenza su  $X$ . Se  $X$  è connesso allora anche  $X/\sim$  lo è.*

DIMOSTRAZIONE. La proiezione naturale  $X \rightarrow X/\sim$  è continua.  $\square$

ESERCIZIO 14.14. *Dimostrare che gli spazi proiettivi (su  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ ) sono connessi.*

ESEMPIO 14.15. *Sia  $\sim$  la relazione di equivalenza su  $\mathbb{R}$  data da*

$$x \sim \pm x \quad \text{tranne } 57 \text{ che non è equivalente a } -57$$

*In pratica si è ripiegato in due  $\mathbb{R}$  identificando  $x$  a  $-x$  tranne il punto 57 che rimane doppio: c'è 57 e  $-57$ . Questo spazio sembra non connesso perché sembra fatto da almeno due pezzi. Invece è connesso perché quoziente di un connesso. Non è  $T_2$ . (Perché?)*

**Corollario 14.16.** *Sia  $D$  uno spazio discreto e sia  $f : X \rightarrow D$  continua. Se  $X$  è connesso allora  $f$  è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $X$  è connesso  $f(X)$  è connesso ma se  $D$  è discreto allora ogni suo sottoinsieme con almeno due punti non è connesso.  $\square$

In realtà vale facilmente il viceversa:

**Teorema 14.17.** *Uno spazio topologico  $X$  è connesso se e solo se ogni applicazione continua da  $X$  in  $\{0, 1\}$  con la topologia discreta è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $X$  non è connesso allora  $X = A \sqcup B$  con  $A, B$  entrambi aperti, chiusi e non vuoti. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} a & x \in A \\ b & x \in B \end{cases}$$

è continua e non costante.  $\square$

**Teorema 14.18** (Chiusura di un connesso è connesso). *Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $A \subseteq X$ . Se  $A$  è connesso allora la chiusura di  $A$  in  $X$  è connessa.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\emptyset \neq B \subset \bar{A}$  aperto e chiuso in  $\bar{A}$ . Si deve dimostrare che  $B = \bar{A}$ .  $B \cap A$  è aperto e chiuso in  $A$ . Siccome  $A$  è denso in  $\bar{A}$  e siccome  $B$  è aperto in  $\bar{A}$ , si ha  $B \cap A \neq \emptyset$ . Siccome  $A$  è connesso, in tal caso  $B \cap A = A$ . Quindi  $A \subset B$ . Siccome  $B$  è chiuso in  $\bar{A}$  che è chiuso in  $X$ , esso è chiuso in  $X$  e quindi, contenendo  $A$ , contiene la sua chiusura. Riassumendo

$$B \subseteq \bar{A} \subseteq B$$

ergo  $B = \bar{A}$ . □

**Corollario 14.19.** *Sia  $X$  uno spazio topologico che contiene un sottoinsieme denso e connesso, allora  $X$  è connesso.*

**DIMOSTRAZIONE.** Segue immediatamente dal teorema precedente. □

**Corollario 14.20.** *Ogni intervallo chiuso  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  è connesso.*

**DIMOSTRAZIONE.**  $(a, b)$  è connesso. □

**ESERCIZIO 14.21.** *Dimostrare che ogni intervallo di  $\mathbb{R}$  è connesso.*

**Teorema 14.22.** *I connessi di  $\mathbb{R}$  sono tutti e soli gli intervalli.*

**DIMOSTRAZIONE.** Gli intervalli son connessi per l'esercizio precedente che avrete sicuramente fatto. Se  $A \subseteq \mathbb{R}$  non è un intervallo allora ha almeno due punti  $a, b$  tali che esista  $c \in (a, b)$  che non sta in  $A$ . Ma allora  $A = (A \cap (-\infty, c)) \sqcup (A \cap (c, +\infty))$  è unione di due aperti non vuoti e disgiunti.

**ESEMPIO 14.23.** *Sia  $I = [0, 1]^2$  con la topologia dell'ordine lessicografico.  $I$  è connesso.*

La dimostrazione di questo fatto è identica a quella della dimostrazione che  $\mathbb{R}$  è connesso. C'è però una piccola sottigliezza a cui si deve stare attenti. Adesso vi propongo la dimostrazione senza dirvi dove sta il busillis, vediamo se ve ne accorgete. Prima un paio di precisazioni notazionali. L'insieme  $I$  ha un massimo  $(1, 1)$  e un minimo  $(0, 0)$  che chiamiamo per semplicità 1 e 0 rispettivamente. Dati  $a, b \in I$  usiamo la classica notazione di intervalli:  $(a, b) = \{x \in I : a < x < b\}$  incluse tutte le varianti  $[a, b], [a, b), (a, b]$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\emptyset \neq A \subseteq I$  aperto e chiuso. Vogliamo dimostrare che in tal caso  $A = I$ . Se  $A \neq I$  allora  $A^c$  è aperto, chiuso e non vuoto. Quindi, a meno di scambiare  $A$  con  $A^c$ , possiamo supporre che  $0 \in A$ . Sia

$$X = \{t \in I : [0, t] \subseteq A\}$$

e sia  $t_0$  l'estremo inferiore del complementare di  $X$ , ponendo  $t_0 = \infty$  se  $X = I$ . Si noti che  $0 \in X$ . In oltre, siccome  $A$  è aperto, per ogni  $1 \neq x \in A$  esiste  $y > x$  tale che  $[x, y) \subset A$ . Ne segue che se  $1 \neq t \in X$  allora esiste  $y > t$  tale che  $y \in X$ . Ciò implica che

$$0 < t_0 \notin X.$$

Per ogni  $s < t_0$  si ha  $[0, s] \subset A$ , in particolare  $[0, t_0) \subseteq A$ . Siccome  $A$  è chiuso, se  $t_0 < \infty$  allora avremmo  $[0, t_0] \subset A$  e quindi  $t_0 \in X$ , in contraddizione con quanto appena dimostrato. Quindi  $t_0 = \infty$  e dunque  $A = I$ . □

Dov'è il busillis? Si noti che questa dimostrazione — apparentemente — fa uso solo della relazione d'ordine e “sembrerebbe funzionare” per ogni insieme totalmente ordinato. Sappiamo però che per esempio  $\mathbb{Q}$  non è connesso e  $\mathbb{Z}$  nemmeno.

ESERCIZIO 14.24. *Provate a seguire passo passo la dimostrazione rimpiazzando  $I$  con  $\mathbb{Q}$  e/o con  $\mathbb{Z}$  per vedere se qualche nodo viene al pettine.*

Adesso vi metto in neretto i nodi.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\emptyset \neq A \subseteq I$  aperto e chiuso. Vogliamo dimostrare che in tal caso  $A = I$ . Se  $A \neq I$  allora  $A^c$  è aperto, chiuso e non vuoto. Quindi, a meno di scambiare  $A$  con  $A^c$ , possiamo supporre che  $0 \in A$ . Sia

$$X = \{t \in I : [0, t] \subseteq A\}$$

e sia  $t_0$  l'estremo inferiore del complementare di  $X$ , ponendo  $t_0 = \infty$  se  $X = I$ . Si noti che  $0 \in X$ . In oltre, siccome  $A$  è aperto, per ogni  $1 \neq x \in A$  esiste  $y > x$  tale che  $[x, y) \subset A$ . Ne segue che se  $1 \neq t \in X$  allora esiste  $y > t$  tale che  $y \in X$ . Ciò implica che

$$0 < t_0 \notin X.$$

Per ogni  $s < t_0$  si ha  $[0, s] \subset A$ , in particolare  $[0, t_0) \subseteq A$ . **Siccome  $A$  è chiuso, se  $t_0 < \infty$  allora avremmo  $[0, t_0] \subset A$  e quindi  $t_0 \in X$ , in contraddizione con quanto appena dimostrato. Quindi  $t_0 = \infty$  e dunque  $A = I$ .  $\square$**

Il primo nodo è l'esistenza di inf e sup, cosa che non è vera per esempio in  $\mathbb{Q}$ . Il secondo nodo è che  $\overline{[a, b)} = [a, b]$  cosa che non è vera in  $\mathbb{Z}$ . Affinché la dimostrazione proposta sia completa, queste due cose vanno dimostrate in  $I$ .

ESEMPIO 14.25. *Sia  $J = (0, 1)^2$  con la topologia dell'ordine lessicografico.  $J$  non è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $A = (-\infty, (1/2, 1)) = \{(x, y) \in J : (x, y) < (1/2, 1)\}$  e  $B = A^c = ((1/2, 1), +\infty) = \{(x, y) \in J : (x, y) > (1/2, 1)\}$  (si noti che si è usato che  $(1/2, 1)$  non appartiene a  $J$ ). Sia  $A$  che  $B$  sono aperti (perché?) e  $J = A \sqcup B$ .  $\square$

**Teorema 14.26** (Unione di connessi non disgiunti è connessa). *Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\{A_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ . Supponiamo che*

- (1) Ogni  $A_i$  è connesso;
- (2)  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  per ogni  $i, j \in I$ .

Allora  $\cup_i A_i$  è connesso.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\emptyset \neq A \subseteq \cup_i A_i$  aperto e chiuso. Si deve dimostrare che  $A$  coincide con  $\cup_i A_i$ . Per ogni  $i \in I$  si ha che  $A \cap A_i$  è aperto e chiuso in  $A_i$ . Siccome  $A_i$  è connesso allora  $A \cap A_i$  è vuoto oppure è tutto  $A_i$ . Siccome  $A \neq \emptyset$  esiste  $i \in I$  tale che  $A \cap A_i \neq \emptyset$  e dunque  $A \cap A_i = A_i$ . Per ogni altro  $j \in I$  si ha  $A \cap A_j = A_i \cap A_j$ . Ma  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  per ipotesi. Ne segue che per ogni  $j \in I$  si ha  $A \cap A_j = A_j$  e quindi  $A = \cup_i A_i$ .  $\square$

**Corollario 14.27.** *Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\{A_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottoinsiemi connessi di  $X$ . Se esiste  $i_0 \in I$  tale che per ogni  $i \in I$  si ha  $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ , allora  $\cup_i A_i$  è connesso.*

**DIMOSTRAZIONE.** Si noti che le ipotesi implicano che  $A_{i_0} \neq \emptyset$ . Per ogni  $i \in I$  sia  $B_i = A_{i_0} \cap A_i$ . Per il teorema precedente  $B_i$  è connesso. In oltre per ogni  $i, j \in I$  si ha  $B_i \cap B_j \supseteq A_{i_0} \neq \emptyset$ . Per il teorema precedente  $\cup B_i$  è connesso e chiaramente  $\cup B_i = \cup A_i$ .  $\square$

**Definizione 14.28** (Componenti connesse). *Sia  $X$  uno spazio topologico. Una componente connessa di  $X$  è un sottoinsieme connesso e massimale di  $X$ , ossia un  $A \subseteq X$  tale che*

- (1)  $A$  è connesso;
- (2) per ogni  $B \subseteq X$ ,  $B$  connesso e  $B \supseteq A$  implica  $B = A$ .

**ESEMPIO 14.29.** *Se  $X$  è connesso l'unica componente connessa di  $X$  è  $X$  stesso.*

Siccome i punti son connessi, ogni spazio topologico non vuoto ha almeno una componente connessa.

**Teorema 14.30.** *Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $x \in X$ . Esiste una unica componente connessa di  $X$  contenente  $x$ . Essa coincide con l'unione di tutti i connessi contenenti  $x$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $A$  e  $B$  sono due connessi contenenti  $x$ , la loro unione è connessa per il teorema precedente, quindi se entrambe sono componenti connesse di  $X$ , per massimalità si ha  $A = B = A \cup B$ . D'altronde, sempre per il teorema precedente, l'unione di tutti i sottoinsiemi connessi di  $X$  che contengono  $x$  è connesso ed è tautologicamente massimale.  $\square$

Possiamo quindi dare la seguente definizione:

**Definizione 14.31.** *Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $x \in X$  la componente connessa di  $x$  è l'unica componente connessa di  $X$  che contiene  $x$ .*

**ESEMPIO 14.32.** *Le componenti connesse di  $\mathbb{Q}$  sono i punti: infatti se  $A \subset \mathbb{Q}$  contiene almeno due punti  $a \neq b$  allora esiste un irrazionale  $r \in (a, b)$  e quindi  $A_- = A \cap (-\infty, r) = A \cap [-\infty, r]$  è aperto e chiuso in  $A$ ,  $A_- \neq \emptyset$  perché  $a \in A_-$  e  $A_- \neq A$  perché  $b \notin A_-$ .*

**Teorema 14.33** (Le componenti connesse son chiuse). *Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $A \subseteq X$  una componente connessa. Allora  $A$  è un chiuso di  $X$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Ovviamente  $A \subseteq \bar{A}$ . Per il Teorema 14.18 la chiusura di un connesso è connesso quindi  $\bar{A}$  è connesso. Per massimalità  $A = \bar{A}$ .  $\square$

Occhio che le componenti connesse in generale non sono aperte, per esempio in  $\mathbb{Q}$  i punti non sono aperti.

**Teorema 14.34.** *Siano  $X, Y$  spazi topologici con  $X$  connesso e sia  $f : X \rightarrow Y$  continua. Allora l'immagine di  $f$  è contenuta in una componente connessa di  $Y$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Segue immediatamente dal corollario 14.12 e dalla massimalità delle componenti connesse.  $\square$

**Teorema 14.35.** *Siano  $A, B$  spazi topologici. Allora  $A \times B$  è connesso se e solo se entrambi  $A, B$  lo sono.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $A \times B$  è connesso, allora per il Teorema 14.11 sia  $A$  che  $B$  lo sono poiché le proiezioni naturali sui fattori sono continue. Viceversa, supponiamo che sia  $A$  che  $B$  siano connessi. Per ogni  $(a, b) \in A \times B$  si definisca  $X_{(a,b)} = \{a\} \times B \cup A \times \{b\}$ . Siccome  $\{a\} \times B$  è omeomorfo a  $B$ , esso è connesso e lo stesso dicasi per  $A \times \{b\}$ ; la loro intersezione è il punto  $(a, b)$  ergo non vuota. Per il Teorema 14.26  $X_{(a,b)}$  è connesso. Si noti che  $(a, b) \in X_{(a,b)}$ . (Intuitivamente, l'insieme  $X_{(a,b)}$  si può immaginare come un sistema di assi centrato in  $(a, b)$ .) Per ogni  $(a, b), (c, d) \in A \times B$  si ha  $(c, b) \in X_{(a,b)} \cap X_{(c,d)} \neq \emptyset$ . Ovviamente  $A \times B = \cup_{(a,b) \in A \times B} X_{(a,b)}$  e quindi per il Teorema 14.26 esso risulta connesso.  $\square$

Anche se sembra una facile generalizzazione, il seguente teorema richiede un po' di lavoro extra.

**Teorema 14.36.** *Sia  $\{X_i\}_{i \in I}$  una famiglia di spazi topologici connessi. Allora il prodotto  $\Pi_i X_i$  è connesso.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per induzione sul numero dei fattori — usando il Teorema 14.35 come passo induttivo — sappiamo che ogni prodotto finito di  $X_i$  è connesso.

Se  $\Pi_i X_i = \emptyset$  allora non v'è nulla da dimostrare (e può succedere senza assioma di scelta!) Altrimenti sia  $O = (O_i)_{i \in I} \in \Pi_i X_i$  (quindi ogni  $O_i$  sta in  $X_i$ ). In analogia con la dimostrazione precedente consideriamo la famiglia dei sistemi di piani coordinati centrati in  $O$ . In termini rigorosi, consideriamo

$$\mathcal{F} = \{J \subseteq I : \text{ha cardinalità finita}\}$$

$$\forall J \in \mathcal{F} \text{ sia } A_J = \Pi_i Y_i \quad \text{ove } Y_i = \begin{cases} \{O_i\} & i \notin J \\ X_i & i \in J \end{cases}$$

In altre parole  $A_J$  è l'insieme dei punti le cui coordinate differiscono da  $O$  solo per gli indici  $J$ . Per esempio, se consideriamo  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$  e  $O = (0, 0, 0)$ , abbiamo che se  $J = \{x\}$ , allora  $A_J$  è l'asse  $X$ ; se  $J = \{x, y\}$  allora  $A_J$  è il piano  $XY$ , se  $J = \{x, y, z\}$  allora  $A_J = \mathbb{R}^3$ .

Per definizione  $A_J$  contiene il punto  $O$  per ogni  $J \in \mathcal{F}$ . In oltre  $A_J$  è omeomorfo a  $\Pi_{i \in J} X_i$  e siccome  $J$  è finito,  $A_J$  è connesso in quanto prodotto finito di connessi. Per il Teorema 14.26 si ha che

$$\bigcup_{J \in \mathcal{F}} A_J \quad \text{è connesso}$$

e per il Teorema 14.18

$$\overline{\bigcup_{J \in \mathcal{F}} A_J} \quad \text{è connesso}$$

Per finire ci basta dimostrare che  $\Pi_i X_i = \overline{\bigcup_{J \in \mathcal{F}} A_J}$ , ossia che  $\bigcup_{J \in \mathcal{F}} A_J$  è denso in  $\Pi_i X_i$ .

**ESERCIZIO 14.37.** *Si dimostri che se  $I$  non è finito e ogni  $X_i$  contiene almeno due punti, allora  $\Pi_i X_i \neq \bigcup_{J \in \mathcal{F}} A_J$ .*

Dimostriamo ora che  $\bigcup_{J \in \mathcal{F}} A_J$  è denso in  $\Pi_i X_i$ . Per fare ciò dimostriamo che esso interseca ogni elemento di una base della topologia prodotto. Una base della topologia

prodotto è data dai prodotti  $V = \prod B_i$  ove ogni  $B_i$  è aperto in  $X_i$  e solo un numero finito di essi è diverso da  $X_i$ . Fissato un tale  $V$  diverso dal vuoto, sia

$$J = \{i \in I : B_i \neq X_i\}$$

e per ogni  $i \in J$  sia  $b_i \in B_i$ . Consideriamo adesso il punto

$$y = (y_i) \quad \text{con} \quad y_i = \begin{cases} O_i & i \neq Y \\ b_i & i \in J \end{cases}$$

è immediato verificare che  $y \in V$  e  $y \in A_J$ . Quindi  $y \in V \cap (\cup_J A_J)$  che quindi non è vuoto.  $\square$

**Definizione 14.38** (Connessione per archi). *Uno spazio topologico  $X$  si dice connesso per archi se per ogni  $x, y \in X$  esiste una funzione continua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $f(0) = x, f(1) = y$  (tale funzione si dice arco da  $x$  a  $y$ ).*

**Teorema 14.39.** *Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi. Allora esso è connesso.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x \in X$ . Per ogni  $y \in X$  sia  $\alpha_y$  un arco che connette  $x$  a  $y$  e sia  $A_y$  la sua immagine. Per il Corollario 14.12  $A_y$  è connesso ed inoltre esso contiene sempre  $x$ . Per il Teorema 14.26 l'unione  $\cup_{y \in X} A_y$  è connessa. Chiaramente  $X = \cup_y A_y$ .  $\square$

Il viceversa però non vale.

**ESEMPIO 14.40.** *Sia  $I = [0, 1]^2$  con l'ordine lessicografico. Esso non è connesso per archi. (E sappiamo già che  $I$  è connesso.)*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo per assurdo che esista una funzione continua  $f : [0, 1] \rightarrow I$  tale che  $f(0) = (0, 0)$  e  $f(1) = (1, 1)$ . L'immagine di  $f$  è connessa per il Corollario 14.12.

Osserviamo che se  $p_0 = (x, y)$  è diverso sia da  $(0, 0)$  che da  $(1, 1)$  e non sta nell'immagine di  $f$ , allora essa risulta sconnessa. Infatti in tal caso avremmo

$$\text{Imm}(f) = (\text{Imm}(f) \cap \{p < p_0\}) \sqcup (\text{Imm}(f) \cap \{p > p_0\})$$

ed entrambi gli insiemi  $\{p < p_0\}$  e  $\{p > p_0\}$  sono aperti per la topologia dell'ordine lessicografico.

Quindi  $f$  è suriettiva. Per ogni  $x \in [0, 1]$  sia consideriamo  $A_x = \{x\} \times (0, 1)$ . Esso è aperto per la topologia dell'ordine lessicografico. Siccome  $f$  è continua allora  $B_x = f^{-1}(A_x)$  è un aperto di  $[0, 1]$ . In oltre  $B_x$  è non vuoto perché  $f$  è suriettiva e  $B_x \cap B_y = \emptyset$  se  $x \neq y$ . La famiglia

$$\{B_x\}_{x \in [0, 1]}$$

costituisce quindi una famiglia più che numerabile di aperti disgiunti in  $[0, 1]$ . Ma ciò è incompatibile col fatto che  $[0, 1]$  sia a base numerabile (perché?).  $\square$

Per i connessi per archi valgono dei teoremi analoghi ai connessi, e loro corollari tipo:

**Teorema 14.41** (Unione di connessi per archi non disgiunti è connessa per archi). *Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\{A_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  connessi per archi. Se  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  per ogni  $i, j \in I$ , allora  $\cup_i A_i$  è connesso per archi.*

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 14.26 ma più semplice. Siano  $x, y \in \cup_i A_i$ . Per definizione esiste  $i$  tale che  $x \in A_i$  e  $j$  tale che  $y \in A_j$ . Sia  $z \in A_i \cap A_j$  allora la concatenazione di un arco che unisce  $x$  a  $z$  in  $A_i$  con un arco che unisce  $z$  a  $y$  in  $A_j$  è un arco in  $\cup_i A_i$  che unisce  $x$  a  $y$ .  $\square$

**Corollario 14.42.** *Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\{A_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  connessi connessi per archi. Se esiste  $i_0 \in I$  tale che per ogni  $i \in I$  si ha  $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ , allora  $\cup_i A_i$  è connesso per archi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Si fa come per il Corollario 14.27 considerando insiemi  $B_i = A_{i_0} \cup A_i$ . Essi soddisfano le ipotesi del Teorema 14.41.  $\square$

**Definizione 14.43** (Componenti connesse per archi). *Sia  $X$  uno spazio topologico. Una componente connessa per archi di  $X$  è un sottoinsieme connesso per archi e massimale rispetto all'inclusione.*

Molti fatti che valgono per la connessione valgono per la connessione per archi. Per esempio i seguenti, le cui dimostrazioni vengono lasciate al lettore per esercizio.

**Teorema 14.44.** *L'immagine continua di un connesso per archi è connessa per archi.*

**Teorema 14.45.** *Siano  $A, B$  spazi topologici. Allora  $A \times B$  è connesso per archi se e solo se entrambi  $A, B$  lo sono.*

**Teorema 14.46.** *Sia  $X$  uno spazio topologico. Allora ogni  $x \in X$  è contenuto in un'unica componente connessa per archi, caratterizzata dall'essere l'unione di tutti i connessi per archi che contengono  $x$ .*

Quello che però NON vale per la connessione per archi è il passaggio alla chiusura:

**ESEMPIO 14.47.** *Sia  $G \subset \mathbb{R}^2$  il grafico della funzione  $\sin(1/x)$  con  $x \in (0, \infty)$ .  $G$  è chiaramente connesso per archi e quindi è connesso. La chiusura  $\overline{G}$  è quindi connessa. Ma lo spazio  $\overline{G}$  non è connesso per archi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \overline{G}$  una funzione continua tale che  $f(0) = (0, 0)$ . La chiusura di  $G$  è ottenuta aggiungendo a  $G$  il segmento  $I = \{0\} \times [-1, 1]$ . Sia  $K = f^{-1}(I)$ . Siccome  $I$  è chiuso, per continuità  $K$  è un chiuso di  $[0, 1]$ . In oltre siccome  $f(0) \in I$ ,  $K$  non è vuoto. Sia  $x \in K$ . Il punto  $f(x)$  sta in  $I$  e quindi esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $U = B(f(x), \varepsilon)$  in  $\mathbb{R}^2$ , le componenti connesse di  $\overline{G} \cap U$  sono  $I \cap U$  e infinite linee sempre più verticali date da  $G \cap U$ . (Basta prendere  $0 < \varepsilon < 1 - |f(x)|$ .) Per continuità, esiste  $\delta > 0$  tale che  $f(x - \delta, x + \delta) \subset U$ . Siccome  $(x - \delta, x + \delta)$  è connesso, la sua immagine è contenuta in una componente connessa di  $\overline{G} \cap U$ . Siccome  $f(x) \in I$  allora  $f(x - \delta, x + \delta) \subset I \cap U$ . In particolare  $f(x - \delta, x + \delta) \subset I$ . Ne segue che  $K$  è aperto. Siccome  $[0, 1]$  è connesso allora  $K = [0, 1]$ . Si è dunque dimostrato che se  $f : [0, 1] \rightarrow \overline{G}$  è continua e  $f(0) = (0, 0)$  allora l'immagine di  $f$  è contenuta in  $I$ . In particolare non si può connettere  $(0, 0)$  a un punto fuori da  $I$  con un arco continuo. Quindi  $\overline{G}$  non è connesso per archi.  $\square$

**ESERCIZIO 14.48.** *Determinare le componenti connesse per archi di  $\overline{G}$  ove  $G$  è come nell'esempio precedente.*



Nonostante il passaggio alla chiusura fosse fondamentale per la dimostrazione del Teorema 14.36, la versione di tale teorema per la connessione per archi resta vera, con una dimostrazione semplicissima.

**Teorema 14.49.** *Sia  $\{X_i\}_{i \in I}$  una famiglia di spazi topologici connessi per archi. Allora il prodotto  $\prod_i X_i$  è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $(x_i), (y_i) \in \prod_i X_i$ . Per ogni  $i$  esiste una funzione continua  $f_i : [0, 1] \rightarrow X_i$  tale che  $f_i(0) = x_i$  e  $f_i(1) = y_i$ . La funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \prod_i X_i$  definita da

$$f(t) = (f_i(t))_{i \in I} \in \prod_i (X_i)$$

connette  $(x_i)$  a  $(y_i)$  ed è continua per il Teorema 7.16.  $\square$

Il concetto di connessione (per archi) può essere localizzato.

**Definizione 14.50** (Locale connessione e locale connessione per archi). *Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si dice localmente connesso (per archi) se ogni suo punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi (per archi). In altre parole se  $\forall x \in X \forall U \in \tau \exists V \supseteq V \in \tau : x \in V$  e  $V$  è connesso (per archi).*

**Teorema 14.51** (Aperti di loc. connessi sono loc. connessi). *Sia  $U$  un aperto di uno spazio topologico  $X$ . Se  $X$  è localmente connesso (per archi) anche  $U$  lo è.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $u \in U$  e  $V$  è un intorno di  $u$  in  $U$  allora esiste un aperto  $W$  di  $U$  tale che  $u \in W \subset V$ . Siccome  $U$  è aperto, allora  $W$  è aperto in  $X$ . Siccome  $X$  è localmente connesso (per archi) allora esiste un intorno  $W' \subset W$  di  $u$  che è connesso (per archi). Chiaramente  $W'$  è un intorno di  $u$  anche per la topologia indotta da  $X$  su  $U$ .  $\square$

**Teorema 14.52.** *Sia  $X$  uno spazio topologico localmente connesso (per archi). Allora le componenti connesse (per archi) sono aperte.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome  $X$  è localmente connesso, ogni  $x \in X$  possiede almeno un intorno connesso  $A_x$ . Ne segue che la componente connessa di  $x$  contiene  $A_x$ . Quindi  $x$  è interno alla sua componente connessa (perché è interno ad  $A_x$ ). Siccome ciò vale per ogni punto, se  $C$  è una componente connessa di  $X$ , allora ogni suo punto è interno, ergo  $C$  è aperto. Lo stesso ragionamento vale per le componenti connesse per archi.  $\square$

Come detto sopra, in generale le componenti connesse per archi non sono chiuse, ciò è però vero se lo spazio è localmente connesso per archi.

**Corollario 14.53.** *Sia  $X$  uno spazio topologico. Se  $X$  è localmente connesso per archi allora le componenti connesse sono chiuse.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 14.41 le componenti connesse per archi sono disgiunte, in particolare

$$X = \sqcup C_i$$

ove  $C_i$  sono le componenti connesse per archi di  $X$ . Il complementare di una componente connessa per archi  $C$  è l'unione delle altre, che sono aperte per il teorema precedente. Quindi  $C^c$  è un aperto e  $C$  è chiuso.  $\square$

**Corollario 14.54.** *Sia  $X$  uno spazio localmente connesso (per archi). Allora esso è unione disgiunta delle sue componenti connesse (per archi), ognuna delle quali è aperta e chiusa. In oltre, ogni sottoinsieme di  $X$  che sia aperto e chiuso è unione di componenti connesse di  $X$ .*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è lasciata per esercizio. □  
I prodotti si comportano abbastanza bene per locale connessione.

**Teorema 14.55.** *Sia  $(X_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi localmente connessi (per archi). Nel caso in cui  $I$  abbia cardinalità infinita, supponiamo in oltre che tutti gli  $X_i$  siano connessi (per archi). Allora  $\prod_i X_i$  è localmente connesso (per archi).*

DIMOSTRAZIONE. Ciò segue dal fatto che una base della topologia prodotto è fatta dagli insiemi del tipo  $B = \prod_i B_i$  ove  $B_i \subseteq X_i$  è aperto e solo un numero finito di essi è non banale. Siccome ogni  $X_i$  è localmente connesso, dentro ogni  $B_i$  non banale si trova un aperto connesso (per archi)  $A_i$ . Ponendo  $A_i = X_i$  per gli indici ove  $B_i = X_i$ , siccome  $X_i$  è connesso, per i Teoremi 14.36 e 14.49 si ha che  $\prod_i A_i \subseteq B$  è un aperto connesso. □

Le immagini continue di localmente connessi (per archi) invece, non sono necessariamente localmente connesse.

ESEMPIO 14.56. *Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(0) = 0$  e  $f(n) = 1/n$  per  $n \neq 0$ .  $\mathbb{N}$  è discreto e quindi localmente connesso per archi ma  $f(\mathbb{N})$  non è localmente connesso perchè  $f(0)$  non ha intorno connessi in  $f(\mathbb{N})$ .*

La buona notizia è che i quozienti di localmente connessi sono localmente connessi, la cattiva notizia è che non si può usare la continuità della proiezione naturale per dimostrarlo.

**Teorema 14.57** (Quoziente di loc. connesso è loc. connesso). *Sia  $X$  uno spazio topologico e  $\sim$  una relazione d'equivalenza. Se  $X$  è localmente connesso (per archi) allora il quoziente  $X/\sim$  è localmente connesso (per archi).*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  la proiezione naturale. Sia  $p \in X/\sim$  e sia  $V$  un intorno di  $p$ . Si deve dimostrare che esiste un intorno  $U$  di  $p$  contenuto in  $V$  e connesso. Siccome  $p$  è interno a  $V$  non è restrittivo supporre che  $V$  sia aperto. Consideriamo  $\pi^{-1}(V)$ . Esso è un aperto saturo per definizione e  $\pi^{-1}(p) \subseteq \pi^{-1}(V)$ . A priori è tutta roba sconnessa. (Si pensi a  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .) Sia

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq X \text{ saturo t.c. } \pi^{-1}(p) \subseteq S \subseteq \pi^{-1}(V) \text{ e } \pi(S) \text{ connesso}\}$$

La famiglia  $\mathcal{F}$  è non vuota perché  $\pi^{-1}(p) \in \mathcal{F}$ . Sia

$$A = \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$$

$A$  è saturo perché unione di saturi. In oltre  $\pi^{-1}(p) \subseteq A \subseteq \pi^{-1}(V)$ . In oltre, se  $S, R \in \mathcal{F}$  allora  $p \in \pi(S) \cap \pi(R)$ . Per il Teorema 14.26 abbiamo che  $\pi(A)$  è connesso. Quindi  $A \in \mathcal{F}$  è l'elemento massimale di  $\mathcal{F}$ . In particolare  $\pi(A) \subset V$  è connesso. Se dimostriamo che è aperto abbiamo finito ponendo  $U = \pi(A)$ .

Per ogni  $a \in A$  sia  $C_a$  la componente connessa di  $a$  in  $\pi^{-1}(V)$ . Siccome  $\pi^{-1}(V)$  è un aperto di un localmente connesso, esso è localmente connesso per il Teorema 14.51. Quindi per il Teorema 14.52  $C_a$  è aperto. Sia

$$Y = \bigcup_{a \in A} C_a$$

chiaramente  $Y$  è un aperto in  $\pi^{-1}(V)$  perché ogni  $C_a$  lo è. Inoltre contiene  $A$ . In particolare

$$\pi^{-1}(p) \subseteq Y \subseteq \pi^{-1}(V).$$

Siccome  $a \in \pi(C_a) \cap \pi(A)$ , per il Teorema 14.26  $\pi(Y) = \pi(A) \cup_a \pi(C_a)$  è connesso. Siccome  $\pi(Y) = \pi(\text{sat}(Y))$  il saturato di  $Y$  è un elemento di  $\mathcal{F}$ . Quindi  $A \supseteq \text{sat}(Y)$  perché  $A$  è il massimale di  $\mathcal{F}$ . In conclusione da

$$A \subseteq Y \subseteq \text{sat}(Y) \subseteq A$$

risulta che  $A = Y = \text{sat}(Y)$ . In particolare  $A$  è aperto in quanto  $Y$  lo è.  $\square$

La locale connessione però si comporta bene per mappe aperte.

**Teorema 14.58.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua tra spazi topologici. Se  $X$  è localmente connesso (per archi) e  $f$  è aperta, allora  $f(X)$  è localmente connesso (per archi).*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $y = f(x) \in f(X)$  e sia  $V$  un intorno aperto di  $y$ .  $f^{-1}(V)$  è un intorno aperto di  $x$ . Per ipotesi, esso contiene un aperto  $U \ni x$  connesso. Siccome  $f$  è aperta,  $f(U)$  è un aperto connesso e  $y \in f(U) \subset V$ .  $\square$

In particolare, se uno voleva dimostrare che il quoziente di un localmente connesso era localmente connesso e aveva tra le mani un'azione di un gruppo di omeomorfismi, in questo caso la proiezione è aperta e non si doveva faticare tanto.

**Corollario 14.59.** *Sia  $(X_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi topologici. Se  $\prod_i X_i$  è localmente connesso (per archi) allora ogni  $X_i$  lo è.*

DIMOSTRAZIONE. Le proiezioni naturali sono aperte per il Teorema 7.12.  $\square$

Sappiamo già che connesso per archi implica connesso e quindi che localmente connesso per archi implica localmente connesso. L'altra implicazione è la seguente.

**Teorema 14.60.** *Sia  $X$  uno spazio topologico localmente connesso per archi e connesso. Allora esso è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $x \in X$  e sia  $C_x$  la componente connessa per archi di  $x$ .  $C_x$  è connesso per archi. In oltre  $C_x$  è aperto e chiuso per i teoremi precedenti. Siccome  $C_x$  è non vuoto perché contiene  $x$ , per connessione esso deve essere tutto  $X$  che quindi risulta connesso per archi.  $\square$

Tutte le altre combinazioni sono possibili:

ESEMPIO 14.61. *Per ognuna delle possibilità 1–8 della Figura 2 esistono degli esempi.*

DIMOSTRAZIONE.

Connessi		3	Loc. Conn.
		1	
2		4	7
Connessi per archi		5	
8		Loc. Conn. per archi	

FIGURA 2. Le possibili proprietà di connessione

- (1) Connesso, non connesso per archi, non localmente connesso. Sia  $G$  il grafico di  $\sin(1/x)$  con  $x \in (0, \infty)$  e sia  $X = \overline{G}$ . Esso è connesso ma non connesso per archi. In oltre i punti del tipo  $(0, y)$  con  $y \in [-1, 1]$  non possiedono un sistema fondamentale di intorni connessi. Quindi  $X$  non è localmente connesso.
- (2) Connesso per archi non localmente connesso. Il cosiddetto pettine delle pulci. Sia  $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  e sia  $X \subset \mathbb{R}^2$  definito da  $X = (A \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ . Esso è chiaramente connesso per archi (l'asse orizzontale interseca tutte le rette verticali) ma i punti del tipo  $(0, y)$  non hanno sistemi fondamentali di intorni connessi.
- (3) Connesso, non connesso per archi, localmente connesso ma non localmente connesso per archi.  $X = [0, 1]^2$  con l'ordine lessicografico. La locale connessione si dimostra come la globale connessione. La non locale connessione per archi si dimostra come la non connessione per archi.
- (4) Connesso per archi, localmente connesso ma non localmente connesso per archi. Un cono su un insieme di tipo 3). Sia  $Y$  un insieme di tipo 3) e  $X = Y \times [0, 1] / \sim$  ove  $\sim$  è la relazione che identifica  $Y \times \{0\}$  a un sol punto.  $X$  è connesso per archi perché ogni punto è connettibile al vertice del cono.  $Y \times [0, 1]$  è localmente connesso perché prodotto di localmente connessi (Teorema 14.55). Quindi  $X$  è localmente connesso perché quoziente di un localmente connesso (Teorema 14.57). D'altronde  $Y$  non è localmente connesso per archi e quindi nemmeno  $Y \times (0, 1)$  lo è (Corollario 14.59). Quindi  $X$  non è localmente connesso per archi perché contiene  $Y \times (0, 1)$  come aperto.
- (5) Connesso in tutte le salse:  $X =$  un punto, oppure  $X = \mathbb{R}$ , oppure  $X = [0, 1]$ .
- (6) Localmente connesso, ma non per archi, globalmente non connesso. Due copie disgiunte di uno spazio di tipo 3).
- (7) Localmente connesso per archi ma non connesso. Una qualsiasi topologia discreta su un insieme con almeno due punti. Oppure  $X = [0, 1] \cup [57, 128]$ .

- (8) Nessuna proprietà di connessione:  $X = \mathbb{Q}$ . Infatti  $\mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}) \sqcup (\sqrt{2}, \infty)$  è sconnesso. Le componenti connesse sono i punti, che non sono aperti, ergo  $\mathbb{Q}$  non è localmente connesso.