Geometria 2, 1 febbraio 2019

Esercizio 1. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ Sia C_n il semicerchio chiuso del semipiano superiore di $\mathbb{R}^2$ passante per $(1,0)$, $(2^n,0)$ e ortogonale all'asse orizzontale.

(1) Si dica se $X = \cup_{n>0} C_n$ è connesso.
(2) Si dica se $Y = \cup_{n<0} C_n$ è localmente connesso.
(3) Si dica se $\bar{X}$ è connesso per archi.
(4) Si dica se $\bar{Y}$ è connesso per archi.
(5) Si dica se $\bar{Y}$ è localmente connesso.
(6) Si dica se $(\bar{X})^c$ è connesso.
(7) Si dica se $(\bar{Y})^c$ è localmente connesso.

Soluzione.

(1) Si. Ogni C_n è un arco, quindi connesso per archi. Ogni C_n contiene $(0,1)$ quindi $\cup_n C_n$ è unione di connessi non disgiunti, ergo connesso.
(2) Si. Se $(1,0) \neq p \in C_n$ esiste $r > 0$ tale che $B(p,r) \cap Y = B(p,r) \cap C_n$, che è localmente connesso quindi p possiede un sistema fondamentale di intorni connessi. Se $p = (1,0)$ allora per $0 < r$ la palla $b(p,r) \cap Y$, è l'unione di $C_n \cap b(p,r)$ che sono archi che partono da p e lo contengono, quindi $b(p,r) \cap Y$ è connesso. In conclusione, ogni $p \in Y$ ha un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.
(3) Si. $\bar{X} = X \cup \{x = 1\}$ e i punti di $\bar{X}$ si connettono tra loro tramite archi che passano per $(1,0)$. Per vedere che $\bar{X}$ è proprio quello, basta scrivere le equazioni del cerchio C_n, che ha centro in $((1+2^n)/2, 0)$ e raggio $|1-2^n|/2$. In formule $(X \cup \{x = 1\})^c = \cup_n \{\sqrt{(\frac{2^{n-1}-1}{2})^2 - (x - \frac{1+2^{n-1}}{2})^2} < y < \sqrt{(\frac{2^n-1}{2})^2 - (x - \frac{1+2^n}{2})^2}\} \cup \{y < 0\} \cup \{x < 1\}$ è unione di aperti, quindi $X \cup \{x = 1\}$ è chiuso e dunque contiene $\bar{X}$. Per ogni $c > 0$ la retta $y = c$ interseca C_n per n sufficientemente grande, quindi ogni punto di $x = 1$ è limite di una successione $x_n \in C_n$, ergo $X \cup \{x = 1\} \subseteq \bar{X}$.
(4) Si. Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ l'inversione $z \mapsto 1/z$ manda X in Y. Se ne deduce che la chiusura di Y è $Y \cup \{(x-1/2)^2 + y^2 = 1/4, y \geq 0\}$, che è unione di connessi contenenti $(1,0)$ e quindi è connesso.
(5) No. I punti del tipo $p = (1,t)$ con $t > 0$ non hanno intorni connessi in $\bar{X} \cap B(p, t/3)$. Quindi $\bar{X}$ non è localmente connesso. Ragionando con l'inversione si deduce che neanche $\bar{Y}$ è localmente connesso. (Oppure, si mostra a mano che gli intorni piccoli dei punti $(x-1/2)^2 + y^2 = 1/4$ non sono connessi.)
(6) Si. Ogni punto di $\bar{X}^c$ con $x > 1$ si connette a un punto dell'asse orizzontale con un cerchio che sta tra un C_n e un C_{n+1}. Tale punto si connette a $(0,-1)$ con un arco nel semipiano inferiore. I punti con $x < 1$ si connettono all'asse orizzontale con un segmento verticale. Quinci $\bar{X}^c$ è connesso per archi e dunque connesso.
(7) Si, in quanto aperto di un localmente connesso ($\mathbb{R}^2$).

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si consideri l'azione di $\mathbb{Z}$ su X data da $n(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$.

(1) Si dica se $X/\mathbb{Z}$ è compatto.
(2) Si dica se $X/\mathbb{Z}$ è T_2.
(3) Si dica se $X/\mathbb{Z}$ è a base numerabile.
(4) Si dica se $X/\mathbb{Z}$ è a localmente numerabile.

(5) Si dica se $X/\mathbb{Z}$ è localmente compatto.
(6) Si dica se $X/\mathbb{Z}$ è connesso.
(7) Si dica se $X/\mathbb{Z}$ è localmente connesso.
(8) Si dica se i punti di $X/\mathbb{Z}$ son chiusi.

Soluzione.

(1) No. La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = xy$ è costante sulle orbite, dunque passa al quoziente $[f] : X/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. L'immagine di f è $\mathbb{R}$ (perché $r = f(1, r)$) che non è compatto. Quindi $X/\mathbb{Z}$ non può essere compatto.
(2) No. I punti $[(0, 1)]$ e $[(1, 0)]$ non hanno intorni disgiunti. Ogni intorno saturo di $(1, 0)$ deve contenere un rettangolino $(1 - r, 1 + r) \times (-r, r)$ e la sua orbita, che contiene $(\frac{1-r}{2^n}, \frac{1+r}{2^n}) \times (-2^n r, 2^n r)$. Esso interseca ogni intorno di $(0, 1)$ per n sufficientemente grande.
(3) Si. X è a base numerabile in quanto $\mathbb{R}^2$ lo è e i quozienti per azioni di gruppi preservano questa caratteristica.
(4) Si. Perché base numerabile implica localmente numerabile.
(5) Si. Perché X è localmente compatto e i quozienti per azioni di gruppi preservano questa caratteristica.
(6) Si. Perché X è connesso e i quozienti di connessi son connessi.
(7) Si. Perché X è localmente connesso e i quozienti di localmente connessi son localmente connessi.
(8) Si. Perché le orbite son chiuse in X. Infatti se $xy = c \neq 0$, l'orbita di (x, y) è una successione di punti sull'arco di iperbole $xy = c$ ed è quindi un chiuso di $\mathbb{R}^2$, quindi un chiuso di X. Se $x = 0$ l'orbita di $(0, y)$ è la successione $(0, 2^n y)$ che si accumula in zero, ma siccome l'origine è stata tolta, l'orbita di $(0, y)$, che non è chiusa in $\mathbb{R}^2$, risulta essere l'intersezione di $\overline{\{(0, 2^n y)\}}$ con X e quindi è un chiuso di X. Stesso ragionamento se $y = 0$.

Esercizio 3. Sia X uno spazio T_2 e localmente connesso per archi. Sia $x \in X$ e siano $V \subseteq U$ intorni aperti e connessi di x. Dimostrare che il numero di componenti connesse per archi di $U \setminus \{x\}$ è minore o uguale al numero di quelle di $V \setminus \{x\}$.

Soluzione. Si noti che $V \setminus \{x\}$ e $U \setminus \{x\}$ sono aperti perché X è T_2. Quindi sono localmente connessi per archi perché X lo è. Le loro componenti connesse sono dunque aperte e chiuse (in $V \setminus \{x\}$ e $U \setminus \{x\}$ rispettivamente). Sia f la funzione che associa ad ogni componente connessa C di $V \setminus \{x\}$ la componente connessa di C in $U \setminus \{x\}$. Basta mostrare che f è suriettiva. Se B è una componente connessa di $U \setminus \{x\}$ che non interseca V allora allora essa è aperta e chiusa in U perché $U \setminus V$ è chiuso in $U \setminus \{x\}$. Ma ciò contraddice il fatto che U sia connesso.