Geometria 2, 2 luglio 2018

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

Esercizio 1. Sia $X = [0,1]$ con la topologia usuale. Sia $I_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Sia $Y = X/I_0$ lo spazio ottenuto collassando I_0 a un punto e sia $Z = X/\bar{I}_0$ lo spazio ottenuto collassando la chiusura di I_0 a un punto.

(1) Si dica se Y è connesso;
(2) Si dica se Y è compatto;
(3) Si dica se Y è T_2;
(4) Si dimostri che Z è omeomorfo a X;
(5) Si dica se Y e Z sono omeomorfi.

Soluzione.

(1) Y è quoziente di un connesso quindi è connesso.
(2) Y è quoziente di un compatto quindi è compatto.
(3) Ogni aperto saturo contenente $1/3$ contiene $[1/3, 2/3)$, in particolare i punti $[1/3]$ e $[I_0]$ non si possono separare con aperti in Y. Quindi Y non è T_2.
(4) Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ definita come costante $1/2$ su $[1/3, 2/3]$ e lineare sul resto, in formule

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & x \in [0, 1/3] \\ \frac{1}{2} & x \in [1/3, 2/3] \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

è continua e costante su $\bar{I}_0$. Quindi induce una funzione continua $\bar{f} : Z \to X$. In oltre $\bar{f}$ è iniettiva quindi biunivoca. Siccome Z è compatto (perché quoziente di un compatto) e X è T_2, la funzione $\bar{f}$ risulta essere un omeomorfismo.
(5) Siccome Z è omeomorfo a X, esso è T_2, mentre Y non lo è. Ergo non sono omeomorfi.

Esercizio 2. Sia $X = [0,1]$ con la topologia usuale e sia $K \subseteq X$ l'insieme di Cantor. Detti I_n gli intervallini aperti che si rimuovono da X per ottenere K, cioè:

$$K = X \setminus (\cup_n I_n)$$

siano $\bar{I}_n$ le loro chiusure. Sia W lo spazio ottenuto collassando ogni $\bar{I}_n$ a un punto (punti diversi per n diversi); in formule: detta $\sim$ la relazione d'equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \exists n : x, y \in \bar{I}_n \end{cases}$$

si ha $W = X/\sim$.

Si dica se W è omeomorfo a X.

Soluzione. Si fa come nel punto (4) dell'esercizio uno. Nella costruzione del Cantor, sia $A_n = [a_n, b_n]$ l'intervallo chiuso dal quale si rimuove I_n. Quindi I_n è il terzo centrale di A_n. Per ogni n si definisce f_n per ricorrenza. f_0 è l'indentià, cioè $f_0(x) = x$, f_1 è esattamente la f del punto (4) dell'esercizio 1. Data f_n si costruisce f_{n+1} modificando

f_n su A_n ponendola costante su I_n e completando linearmente sul resto di A_n come nella costruzione di f. In formule

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \notin A_n \\ \frac{3(f_n(b_n)-f_n(a_n))}{2(b_n-a_n)}(x-a_n)+f_n(a_n) & x \in [a_n, a_n+(b_n-a_n)/3] \\ \frac{f_n(b_n)+f_n(a_n)}{2} & x \in I_n \\ \frac{3(f_n(b_n)-f_n(a_n))}{2(b_n-a_n)}(x-(b_n-(b_n-a_n)/3)))+\frac{f_n(b_n)+f_n(a_n)}{2} & x \in [b_n-(b_n-a_n)/3, b_n] \end{cases}$$

Si ha $|f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leq f_n(b_n)-f_n(a_n)$. Per $2^k-1 \leq n < 2^{k+1}-1$, la dimensione di A_n è $1/3^k$, la pendenza massima di f_{n+1} è $(3/2)^{k+1}$. Quindi $|f_{2^k-1}(x)-f_{2^{k+1}-1}(x)| \leq (1/3)^{k+1}(3/2)^{k+1} = 1/2^{k+1}$. La successione f_n è quindi uniformemente convergente a una funzione continua $f_\infty : [0,1] \to [0,1]$ che è (monotona crescente) e costante su ogni $\bar{I}_n$. (Tale funzione si chiama scala del diavolo: è crescente, derivabile quasi ovunque e con derivata nulla quasi ovunque.) Essendo f_∞ continua e costante sulle classi di equivalenza, essa induce una funzione continua $\bar{f} : W \to X$, che è biunivoca. Siccome W è compatto (quoziente di un compatto) e X è T_2 allora $\bar{f}$ è un omeomorfismo.

Esercizio 3. Sia $X \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche con autovalori di modulo strettamente minore di 1.

(1) Si dica se X è aperto in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(2) Si dica se X è chiuso in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(3) Si determini la chiusura $\bar{X}$ di X in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(4) Si determini la parte interna $\mathrm{int}(X)$ di X in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(5) Si dica se $\bar{X}$ è compatto.
(6) Si dica se $\bar{X}$ è connesso.
(7) Si dica se X è una varietà topologica.
(8) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

Soluzione.

(1) (e (4)). L'insieme delle matrici simmetriche ha parte interna vuota in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ perchè per ogni $\epsilon > 0$, se M è simmetrica allora $M + \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è più simmetrica. Ne segue che la parte interna di X è vuota in quanto sottoinsieme delle matrici simmetriche. In particolare X non è aperto.
(2) X non è chiuso perchè per $t \to 1$ da sinistra $X \ni \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin X$.
(3) (e (5)). Sia D l'insieme delle matrici diagonali $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, con $a, d \in [-1, 1]$. Chiaramente D è contenuto in $\bar{X}$. In oltre, per ogni matrice ortogonale M e $A \in D$ si ha $M^tAM \in \bar{X}$. Definendo $f : O(2) \times D \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ come $f(M, A) = M^tAM$, si ha quindi $Y := Imm(f) \subseteq \bar{X}$. La funzione f è continua. D è omeomorfo a $[-1, 1]^2$ che è compatto. L'insieme $O(2)$ delle matrici ortogonali è compatto. Quindi $O(2) \times D$ è compatto. Ne segue che Y è compatto. Siccome $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è

T_2 allora Y è chiuso. Essendo contenuto in $\bar{X}$ si ha $Y = \bar{X}$, che risulta quindi compatto.

Per il teorema spettrale Y è l'insieme delle matrici simmetriche con gli autovalori di modulo minore o uguale a uno.

(6) (e (8)). Se $M \in \bar{X}$ e $t \in [0,1]$ il cammino $M_t = tM$ collega M alla matrice nulla e fornisce un'equivalenza di omotopia. In particolare $\bar{X}$ è connesso e omotopicamente equivalente a un punto quindi il suo gruppo fondamentale è nullo.

(7) L'insieme S delle matrici simmetriche è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$ tramite l'omeomorfismo $(a,b,d) \to \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. In queste coordinate l'insieme X è un aperto di S perché se gli autovalori di $M \in X$ si esprimono tramite le due funzioni continue $\lambda_\pm = \frac{a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2}$ e X corrisponde all'insieme $\lambda_+^{-1}(-1,1) \cap \lambda_-^{-1}(-1,1)$. Quindi X è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^3$, ergo è una varietà topologica tridimensionale.

Esercizio 4.

(1) Si dica se esiste una funzione continua e biiettiva $f : S^1 \to (0,1)$.
(2) Si dica se esiste una funzione continua e biiettiva $g : S^1 \to [0,1)$.
(3) Si dica se esiste una funzione continua e biiettiva $h : S^1 \to [0,1]$.
(4) Si dica se esiste una funzione continua e biiettiva $\varphi : (0,1) \to S^1$.
(5) Si dica se esiste una funzione continua e biiettiva $\gamma : [0,1) \to S^1$.
(6) Si dica se esiste una funzione continua e biiettiva $\eta : [0,1] \to S^1$.

Soluzione.

(1) S^1 è compatto e $(0,1)$ è T_2. Per il teorema del Kompatto-Hausdorff se f esiste allora è un omeomorfismo. Ma togliendo $1/2$ a $(0,1)$ lo si sconnette, mentre togliendo un punto a S^1 no. Quindi S^1 non è omeomorfo a $(0,1)$.
(2) Come il punto (1).
(3) Come il punto (1).
(4) Siccome S^1 è localmente omeomorfa a $\mathbb{R}$, se f esistesse, per il teorema d'invarianza del dominio essa sarebbe aperta quindi l'inversa continua, cioè f sarebbe omeo. Assurdo come nel punto (1).
(5) $f(t) = e^{2\pi i t}$.
(6) $[0,1]$ è compatto e S^1 è T_2. Si conclude come il punto (1).