Geometria 2, 11 gennaio 2019

Esercizio 1.

In $\mathbb{R}^3$ sia $X = \{(x, y, z) : xyz \geq 0\}$.

(1) Si dica se X è aperto.
(2) Si dica se X è chiuso.
(3) Si calcoli ∂X.
(4) Si dica se X è connesso.
(5) Si dica se la parte interna di X è connessa.
(6) Si dica se $X \setminus (0, 0, 0)$ è connesso.
(7) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

Soluzione.

(2) X è chiuso perché $f(x, y, z) = xyz$ è continua e $X = f^{-1}([0, \infty))$ è preimmagine di un chiuso di $\mathbb{R}$.

(1) X non è aperto perché $(1, 1, 1) \in X$, ergo $X \neq \emptyset$; $(1, 1, -1) \notin X$, ergo $X^c \neq \emptyset$ e $\mathbb{R}^3$ è connesso.

(3) La parte interna di X è $f^{-1}(0, \infty)$. Infatti esso è aperto in quanto preimmagine di un aperto e se $f(x, y, z) = 0$ allora almeno uno tra x, y, z è zero e per ogni ϵ sufficientemente piccolo almeno uno tra $(x \pm \epsilon, y \pm \epsilon, z \pm \epsilon)$ sta nel complementare di X. La frontiera è dunque $f^{-1}(0)$.

$(4) + (7)$ X è stellato sull'origine infatti se $(x, y, z) \in X$ e $t \geq 0$ si ha $f(tx, ty, tz) = t^3 f(x, y, z) \geq 0$. Quindi X è connesso per archi, ergo connesso. In oltre X è contraibile e dunque il suo gruppo fondamentale è banale.

(5) L'insieme $A = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ è un sottoinsieme non vuoto ($(1, 1, 1)$ vi appartiene) e non banale dell'interno di X ($(-1, -1, 1)$ non vi appartiene ma sta nell'interno di X). A è aperto in $\mathbb{R}^3$ ergo è aperto nell'interno di X. D'altronde A è l'intersezione di $f^{-1}(0, \infty)$ con $\{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ che è un chiuso di $\mathbb{R}^3$. Quindi A è anche chiuso nell'interno di X che dunque risulta sconnesso.

(6) L'insieme $B = X \setminus (0, 0, 0)$ è connesso. Infatti B è unione di quattro pezzi connessi:

$B_1 = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \} \setminus (0, 0, 0)$ (che è stellato su $(1, 1, 1)$),

$B_2 = \{(x, y, z) : x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0, \} \setminus (0, 0, 0)$ (stellato su $(-1, -1, 1)$),

$B_3 = \{(x, y, z) : x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0, \} \setminus (0, 0, 0)$ (stellato su $(-1, 1, -1)$),

$B_4 = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0, \} \setminus (0, 0, 0)$ (stellato su $(1, -1, -1)$).

In oltre $(1, 0, 0) \in B_1 \cap B_4$, $(0, 1, 0) \in B_1 \cap B_3$, $(0, 0, 1) \in B_1 \cap B_2$. Ne segue che $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ è connesso.

Esercizio 2. Consideriamo $Y = \mathbb{R}$ dotato della topologia generata dagli intervalli di tipo $[a, b)$ e sia $X = Y \times Y$ dotato della topologia prodotto.

(1) Si dica se Y è T_2.
(2) Si dica se Y è localmente numerabile.
(3) Si dica se Y è a base numerabile.
(4) Si dica se X è T_2.
(5) Si dica se X è localmente numerabile.
(6) Si dica se X è separabile.
(7) Sia $Z = \{(x, y) \in Y \times Y : y = -x\}$. Si dica se Z è separabile.

Soluzione.

(1) Si. Dati $x < y \in Y$ si ha $[x, y) \cap [y, y+1) = \emptyset$.
(2) Si. Per ogni x la famiglia $\{[x, x+1/n), n \in \mathbb{N}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x.
(3) No. Sia $B = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di aperti. Gli insiemi U_n hanno un inf, e possono (o no) avere un minimo. Sia M l'insieme degli elementi che sono il minimo di qualche U_n. Siccome B è numerabile, M lo è. Siccome Y non è numerabile esiste $x \in Y$ che non è il minimo di nessuno degli U_n. Ma allora l'insieme $[x, \infty)$, che è aperto, non può essere unione degli U_n. La famiglia B non può quindi essere una base per la topologia di Y.
(4) Si in quanto prodotto di T_2.
(5) Si in quanto prodotto finito di localmente numerabili.
(6) Si, perché $\mathbb{Q}^2$ è denso in X. Infatti per ogni $(x, y) \notin \mathbb{Q}^2$ e per ogni intorno U di (x, y), esso contiene un aperto del tipo $[x, x+\epsilon) \times [y, y+\epsilon)$ e dunque un elemento di $\mathbb{Q}^2$.
(7) No. Z ha la topologia discreta in quanto per ogni punto di Z il singoletto $\{(x, -x)\} = [x, \infty) \times [-x, \infty) \cap Z$ è aperto. Gli insiemi discreti non numerabili non sono separabili.

Esercizio 3. Siano X, Y spazi topologici non vuoti. Dimostrare che se la topologia prodotto su $X \times Y$ è la topologia cofinita, allora almeno uno tra X e Y ha cardinalità finita.

Soluzione. Se entrambi X e Y hanno la topologia banale allora la topologia prodotto è quella banale, quindi affiché essa coincida con la topologia cofinita $X \times Y$ deve avere un sol punto, ergo anche X e Y devono avere un sol punto. Possiamo quindi supporre che la topologia di X sia non banale. Esiste quindi un aperto U di X tale che sia U che U^c sono non vuoti. L'insieme $U \times Y$ è aperto in $X \times Y$ ma se Y avesse cardinalità infinita allora $(U \times Y)^c = U^c \times Y$ non sarebbe finito e quindi la topologia prodotto non sarebbe la topologia cofinita.