Geometria 2, 14 settembre 2018

Esercizio 1. Sia $R(\alpha)$ la rotazione di $\mathbb{R}^3$ di angolo α intorno all'asse Z e sia ρ_α l'azione di $\mathbb{Z}$ su S^2 data da $\rho_\alpha(1) = R(\alpha)$ (quindi $n \in \mathbb{Z}$ agisce come una rotazione di angolo $n\alpha$).

(1) Si dica per quali α il quoziente $S^2/\mathbb{Z}$ è compatto.
(2) Si dica per quali α il quoziente $S^2/\mathbb{Z}$ è connesso.
(3) Si dica per quali α la proiezione $\pi : S^2 \to S^2/\mathbb{Z}$ è aperta.
(4) Per $\alpha = 1$ si dica se il quoziente $S^2/\mathbb{Z}$ è T_2.
(5) Per $\alpha = 2\pi/3$ si dica se il quoziente $S^2/\mathbb{Z}$ è T_2.
(6) Per $\alpha = 2\pi/3$ si dica se il quoziente $S^2/\mathbb{Z}$ è una varietà.
(7) Per $\alpha = 2\pi/3$ si calcoli il gruppo fondamentale di $S^2/\mathbb{Z}$.

Soluzione.

(1) S^2 è compatto e i quozienti di compatti son compatti. Indipendentemente da α.
(2) S^2 è connesso e i quozienti di connessi son connessi. Indipendentemente da α.
(3) Siccome le rotazioni sono omeomorfismi di S^2, indipendentemente da α, la proiezione al quoziente è aperta.
(4) Siccome π è irrazionale, 1 e 2π non sono multiplo razionale uno dell'altro. Le orbite di un punto $(x, y, z) \in \S^2$ con $z \neq \pm 1$ è dunque un insieme numerabile la cui chiusura è il "parallelo" di S^2 ad altezza z. Quindi non tutte le orbite son chiuse e quindi il quoziente non è T_2.
(5) In questo caso $R(\alpha)^3 = Id$ e quindi l'azione è equivalente ad un'azione di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, che è un gruppo finito. I quozienti di localmente compatti T_2 per azioni per omeomorfismi di gruppi finiti son T_2. Alternativamente si possono esibire a mano aperti che separano punti P, Q, si devono considerare: il caso generico con P, Q diversi dai poli, il caso in cui uno sia un polo e l'altro no e il caso in cui siano uno il polo Nord e l'altro il polo Sud.
(6) Sia $K \subseteq S^2$ uno spicchio chiuso di angolo $2\pi/3$. In coordinate sferiche $(\theta, \varphi) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ (θ è la latitudine e φ è la longitudine) $K = \{\theta \in [-\pi/2, \pi/2], \varphi \in [0, 2\pi/3]\}$. K è compatto e interseca tutte le classi di equivalenza quindi l'inclusione $K \to S^2$ induce una funzione continua e biunivoca $f : K/\mathbb{Z} \to S^2/\mathbb{Z}$. Siccome S^2 è T_2 f risulta essere un omeomorfismo. Quindi $S^2/\mathbb{Z}$ è omeomorfo a $K/\mathbb{Z}$. La funzione $g : K \to S^2$ data $g(\theta, \varphi) = (\theta, 3\varphi)$ è continua, suriettiva e costante sulle classi di equivalenza. Essa induce quindi una funzione continua $G : K/\mathbb{Z} \to S^2$ che è immediato verificare essere iniettiva. Per il teorema del compatto-T_2 G è un omeomorfismo. Quindi $S^2/\mathbb{Z} \simeq K/\mathbb{Z} \simeq S^2$ che è una varietà.
(7) Siccome $S^2/\mathbb{Z} \simeq S^2$ che è semplicemente connesso, esso è semplicemente connesso.

Esercizio 2. Per $n \in \mathbb{Z}$, sia C_n il cerchio di $\mathbb{R}^2$ di centro zero e raggio 2^n. Sia $A = \cup_{n \geq 0} C_n$ e $B = \cup_{n \leq 0} C_n$.

(1) Si dica se A è chiuso in $\mathbb{R}^2$.
(2) Si dica se B è chiuso in $\mathbb{R}^2$.
(3) Si dica se A è omeomorfo a B.
(4) Si dica se A^c è omeomorfo a B^c.
(5) Si dica se la chiusura di A^c è omeomorfa alla chiusura di B^c.
(6) Si dica se la compattificazione di Alexandrov di A è omeomorfa alla chiusura di B in $\mathbb{R}^2$.
(7) Si dica se la compattificazione di Alexandrov di A è omeomorfa alla sua chiusura proiettiva.

Soluzione.

(1) A è chiuso, un modo per vederlo è porre $f(x,y) = \cos(\pi/2 + \pi(\log(\sqrt{x^2+y^2})))$, in questo modo $A = f^{-1}(0)$. Oppure si può mostrare che A^c è unione di aperti ergo aperto. ($A^c = B(0,1) \cup (\cup_{n>0} B(0,2^n) \setminus \overline{B(0,2^{n-1})})$.)

(2) B non è chiuso perchè l'origine è di aderenza ma non sta in B.

(3) Usando $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ la mappa $z \to 1/z$ fornisce un omeomorfismo di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in sé (essa non è continua in zero) la cui restrizione ad A fornisce un omeomorfismo esplicito tra A e B.

(4) A^c è un aperto di $\mathbb{R}^2$ che è localmente connesso, ergo è localmente connesso mentre B^c non è localmente connesso perché l'origine non ha intorni connessi (ogni aperto U dell'origine contiene un $C_n \subset B$ per 2^n abbastanza piccolo, esso sconnette $U \cap B^c$). Quindi non sono omeomorfi.

(5) Le chiusure di A^c e B^2 sono entrambe $\mathbb{R}^2$ (i cerchi C_n hanno parte interna vuota) quindi omeomorfe.

(6) Usando $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ la compattificazione di alexandroff di A è la sua chiusura in $\mathbb{CP}^1$ e usando la mappa $z \to 1/z$, che è un omeomorfismo di $\mathbb{CP}^1$, A diventa B. Quindi $\hat{A} = \overline{B}$.

(7) Togliendo l'infinito alla compattificazione di Alexandroff di A si ottiene A che è localmente connesso. La chiusura proiettiva di A, che si ottiene aggiungendo tutta la retta all'infinito, non è localmente connessa. Togliendo un punto alla chiusura proiettiva di A si preserva la non locale connessione, quindi i due spazi non possono essere omeomorfi.

Esercizio 3. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme con le seguenti proprietà:

(1) X è denso in $\mathbb{R}$;

(2) ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ si estende a tutto $\mathbb{R}$ in modo continuo (cioè esiste $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$).

Dimostrare che $X = \mathbb{R}$.

Soluzione. Se esiste $a \in \mathbb{R}$ ma $a \notin X$, allora definendo $f : X \to \mathbb{R}$ ponendo $f(x) = 1$ per $x > a$ e $f(x) = 0$ per $x < a$, per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha che $f^{-1}(A)$ è uguale al vuoto, X, $X \cap \{x < a\}$ oppure $X \cap \{x > a\}$ che sono tutti aperti. Quindi f è continua. Per densità, per ogni $n > 0$ l'insieme $(a - 1/n, a + 1/n)$, contenente a, contiene un punto $x_n \in X \cap \{x < a\}$ e un punto $y_n \in X \cap \{x > a\}$ ergo $f(x_n) = 0$ e $f(y_n) = 1$. Chiaramente $x_n \to a$ e $y_n \to a$ ma $f(x_n) = 0$ e $f(y_n) = 1$. Non si può quindi estendere f in modo continuo in a.