Geometria 2, 28 maggio 2018

Esercizio 1. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$X = \{(x,y) : y \leq \frac{\sin x}{x}, x, y \geq 0\}$$

(1) Si dica se X è aperto e/o chiuso.
(2) Si dica se X è compatto.
(3) Si dica se X è localmente compatto.
(4) Si dica se X è connesso.
(5) Si dica se X è localmente connesso.
(6) Si dica se la chiusura proiettiva di X è compatta.
(7) Si dica se il complementare in $\mathbb{RP}^2$ della chiusura proiettiva di X è connesso.
(8) Si dica se il complementare in $\mathbb{RP}^2$ della chiusura proiettiva di X è localmente connesso.

Soluzione.

(1) La funzione $f(x) = \sin(x)/x$ si intente estesa per continuità in zero. Le funzioni

$$F(x,y) = y - f(x) \quad G(x,y) = x \quad H(x,y) = y$$

sono continue. Gli insiemi $A = \{y \leq f(x)\} = F^{-1}((-\infty, 0])$, $B = \{x \geq 0\} = G^{-1}([0,\infty))$, $C = \{y \geq 0\} = H^{-1}([0,\infty))$ sono chiusi perché preimmagini di chiusi tramite funzioni continue. L'insieme $X = A \cap B \cap C$ è chiuso in quanto intersezione finita di chiusi.

L'insieme X non è aperto perchè $\mathbb{R}^2$ è connesso. Siccome $(-3,57) \notin X$ e $(0,0) \in X$ allora X è diverso da $\mathbb{R}^2$ e dal vuoto. Quindi non può essere aperto e chiuso.

(2) X non è compatto perchè $(k\pi, 0) \in X$ per $k \in \mathbb{N}$ e quindi X non è limitato.
(3) X è localmente compatto perchè è un chiuso di $\mathbb{R}^2$ che è localmente compatto.
(4) X non è connesso. Infatti $X \cap G^{-1}((-\infty, 3\pi/2)) = X \cap G^{-1}((-\infty, 3\pi/2])$ è aperto e chiuso (e non vuoto e diverso da tutto X).
(5) Concentriamoci prima sui punti con $x > 0$.

La funzione $\psi : (0,\infty) \times [0,\infty) \to (0,\infty) \times [0,\infty)$ definita da

$$\psi(x,y) = (x, xy)$$

è un omeomorfismo (con inversa $(x,y) \mapsto (x, y/x)$). L'immagine di $X \cap \{x > 0\}$ tramite ψ è l'insieme

$$Y = \{(x,y) : y \leq \sin x, x > 0, y \geq 0\}.$$

Siccome $\sin x$ è concava ove $\sin x > 0$, gli insiemi $Y \cap \{2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi\}$ sono convessi, quindi localmente connessi per segmenti, ergo localmente connessi. Quindi $X \cap \{x > 0\}$ è localmente connesso.

Per i punti con $x = 0$ si considera $\varphi(x,y) = (x, y/f(x))$. Siccome $f(0) = 1$, per δ sufficientemente piccolo la funzione φ è un omeomorfismo tra $X \cap \{0 \leq x \leq \delta\}$ e il rettangolo $[0,\delta] \times [0,1]$ che è convesso, ergo localmente connesso.

Nota: Questo punto si poteva fare "a mano" in mille altri modi.

(6) $\mathbb{RP}^2$ è compatto. La chiusura proiettiva di X è un chiuso in un compatto e quindi compatto.

(7) $\mathbb{RP}^2 \setminus \bar{X}$ è connesso perchè l'unico punto all'infinito di X è il punto $[1,0,0]$ cioè la retta corrispondente all'asse delle "x". $\mathbb{RP}^1$ è omeomorfo a S^1 e quindi togliendo un punto rimane connesso. Ogni punto di $\mathbb{R}^2 \setminus X$ si congiunge al punto all'infinito $[0,1,0]$, corrispondente all'asse delle "y" tramite una retta verticale. Quindi $\mathbb{RP}^2 \setminus \bar{X}$ è connesso per archi.

(8) $\mathbb{RP}^2 \setminus \bar{X}$ è un aperto di $\mathbb{RP}^2$, che è localmente connesso, e quindi è localmente connesso ($\mathbb{RP}^2$ è una varietà topologica e quindi ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni omeomorfi a palle di $\mathbb{R}^2$, che sono connesse).

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2+y^2 = 16\}$ un cerchio di raggio 4 sul piano orizzontale. Sia $X = \{p \in \mathbb{R}^3 : d(p,A) = 1\}$[1]. Sia $B \subseteq X$ il cerchio $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2+y^2 = 9\}$. Sia $Y = X/B$ lo spazio ottenuto collassando B a un punto.

(1) Dimostrare che X è omeomorfo al toro $T^2 = S^1 \times S^1$.
(2) Si dica se Y è compatto.
(3) Si dica se Y è connesso.
(4) Si dica se Y è di Hausdorff.
(5) Si dica se Y è una varietà topologica.
(6) Si dica se Y è semplicemente connesso.
(7) Si calcoli il gruppo fondamentale di Y.

Soluzione.

(1) L'insieme X è invariante per rotazioni attorno all'asse "z". Possiamo quindi studiare l'intersezione di X col semipiano $\{y = 0, x \geq 0\}$ e poi ruotare il risultato. Tale intersezione è il cerchio C di centro $(4,0,0)$ e raggio 1. Infatti un calcolo diretto mostra che se per ogni $p = (x,0,z)$ con $x > 0$ si ha $d(p,A) = d(p,(4,0,0))$. Il calcolo esplicito è: detto $a = (4\cos t, 4\sin t, 0)$,

$$d((x,0,z),(4\cos t, 4\sin t, 0)) = \sqrt{(x-4\cos t)^2 + 16\sin^2 t + z^2} = \sqrt{x^2 - 8x\cos t + 16 + z^2}$$

$$\geq \sqrt{x^2 - 8x + 16 + z^2} = d((x,0,z),(4,0,0)).$$

Quindi X è parametrizzato da

$$(4\cos t, 4\sin t, 0) + \cos s(\cos t, \sin t, 0) + \sin s(0,0,1) = (\cos t(4+\cos s), \sin t(4+\cos s), \sin s)$$

al variare di $t, s \in [0, 2\pi]$. Ciò induce una funzione continua e biunivoca da $S^1 \times S^1$ in X. Siccome T^2 è compatto e X è Hausdorff (in quanto sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$), per il teorema del Kompatto-Hausdorff tale funzione è un omeomorfismo.

(2) Dal punto 1 segue che X è compatto, quindi Y lo è in quanto quoziente di un compatto.

(3) Dal punto 1 segue che X è connesso, quindi Y lo è in quanto quoziente di un connesso.

(4) Siccome X è compatto e T_2 allora i compatti si separano con aperti, siccome le classi di equivalenza sono punti oppure il cerchio B, che è compatto, il quoziente X/B è T_2.

[1] La distanza tra un punto p e un insieme A è l'estremo inferiore delle distanze $d(p,a)$ al variare di $a \in A$

(5) In Y ci sono punti che hanno intorni omeomorfi a $\mathbb{R}^2$, quindi se Y fosse una varietà topologica sarebbe necessariamente di dimensione due. In Y il punto $b = [B]$ ha un sistema fondamentale di intorni aperti connessi U_n tali che $U_n \setminus b$ è sconnesso. Quindi b non può avere un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Quindi Y non è una varietà. Esplicitamente, gli intorni U_n si descrivono facilmente nelle coordinate (t, s) usate nel punto 1). La coordinata s è una funzione continua $s : X \to \mathbb{R}$ che discente a Y perchè è costante sulle classi di equivalenza. $B = s^{-1}(\pi)$. Basta porre $U_n = s^{-1}(\pi - 1/n, \pi + 1/n)$. In X, $s^{-1}(\pi - 1/n, \pi + 1/n) = S^1 \times (\pi - 1/n, \pi + 1/n)$ che è prodotto di connessi, ergo connesso, quindi U_n, che ne è la proiezione in Y, è connesso. $U_n \setminus B = s^{-1}(\pi - 1/n, \pi) \sqcup s^{-1}(\pi, \pi + 1/n)$ è unione di aperti disgiunti non vuoti quindi non è connesso.

(6),(7) Calcoliamo direttamente il gruppo fondamentale usando Van Kampen. Y è omeomorfo a un quadrato Q con i lati orizzontali identificati tra loro e i lati verticali collassati a un punto e identificati tra loro. Siano $D_1 \subset D$ due dischetti dentro Q, sia $E = Q \setminus D_1$ e $F = D \cap E$ la corona circolare compresa tra D e D_1. Quindi $X = D \cup E$ con intersezione F. E si retrae sul bordo esterno di Q, una volta quozientati i lati, è un S^1 il cui gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}$ con generatore $[l]$ ove l è omotopo a un lato orizzontale. D è semplicemente connesso e F si retrae su un S^1. Il gruppo fondamentale di F è $\mathbb{Z}$ con generatore γ omotopo a $lvl^{-1}v^{-1}$ ove v è il lato verticale. Siccome v è collassato a un punto, in E si ha $[\gamma] = [ll^{-1}] = 1$ quindi le relazioni derivanti dalle inclusioni $F \subseteq E$ e $F \subseteq D$ sono banali. Il gruppo fondamentale di Y è dunque $\pi_1(E) * \pi_1(D) = \pi_1(E) = \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Si dimostri che A è contemporaneamente sia aperto che chiuso se e solo se esiste una funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ tale che A è contemporaneamente sia la f-preimmagine di un aperto che la f-preimmagine di un chiuso.

Soluzione. Se esiste $f : X \to \mathbb{R}$ continua, un aperto B e un chiuso C di $\mathbb{R}$ tali che $A = f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$ allora per continuità, A è sia aperto che chiuso.

Viceversa, supponiamo A aperto e chiuso e sia f la funzione caratteristica di A:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Se $B \subseteq \mathbb{R}$ allora

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} X & 0, 1 \in B \\ \emptyset & 0 \notin B, 1 \notin B \\ A & 1 \in B, 0 \notin B \\ A^c & 1 \notin B, 0 \in B \end{cases}$$

In ogni caso $f^{-1}(B)$ è aperto (tra l'altro, indipendentemente dal fatto che B sia aperto) e quindi f è continua. In oltre si ha $A = f^{-1}([1, 2]) = f^{-1}((0, 2))$.