Geometria 2, 19 giugno 2019

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{(x,y) : y = e^x\} \cup \{(x,y) : y = e^{-x}\}$.

(1) Si dica se X è chiuso.
(2) Si dica se X è aperto.
(3) Si dica se X è connesso.
(4) Si dica se X^c è connesso.
(5) Sia Y la chiusura proiettiva di X e sia Z la compattificazione di Alexandroff di X. Si dica se Y è omeomorfo a Z.
(6) Si calcoli il gruppo fondamentale di Y.
(7) Si calcoli il gruppo fondamentale di Z.

Soluzione. $f(x,y) = y - e^x$ e $g(x,y) = y - e^{-x}$ sono funzioni continue. $X = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ è intersezione di due chiusi (preimmagini di un chiuso tramite funzioni continue) ergo è chiuso. Siccome $X \neq \emptyset, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ è connesso allora X non è aperto. $f^{-1}(0)$ è connesso perché immagine di un $\mathbb{R}$, che è connesso, tramite la funzione continua $F(t) = (t, e^t)$. Similmente $g^{-1}(0)$ è connesso. Essi si intersecano in $(0,1)$, ne segue che X è connesso. I punti all'infinito di X sono i limiti di $(x, e^x, 1)$ — che sono $[0,1,0]$ se $x \to \infty$ e $[1,0,0]$ se $x \to -\infty$ — e quelli di $(x, e^{-x}, 1)$ — che sono sempre $[1,0,0]$ e $[0,1,0]$. Quindi Y è omeomorfo a una figura a otto, il cui gruppo fondamentale è $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (usando van kampen sui due lobi dell'otto). Z è omeomorfo a una Ics in cui i quattro vertici sono identificati con ∞. Il suo gruppo fondamentale è $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ perché Z si retrae su un bouquet di tre S^1 (e qui si usa van kampen con un lobo da una parte e una figura a 8 dall'altra un S^1, curandosi di prendere aperti che soddisfino le ipotesi di van kampen). I due spazi non sono quindi omeomorfi (questo si poteva vedere anche senza calcolare i gruppi fondamentali guardando alle valenze di taglio locali).

Esercizio 2. Sia $A = \{M \in GL(2,\mathbb{R}) : M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $||M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}|| \leq 1\}$.

(1) Si dica se A è chiuso in $GL(2,\mathbb{R})$.
(2) Si dica se A è aperto in $GL(2,\mathbb{R})$.
(3) Si dica se A è compatto.
(4) Si dica se A ha dei punti di taglio.
(5) Si dica se A è connesso.
(6) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(M) = ||M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}||$. Si dica se $f(A)$ è connesso.
(7) Si dica se $f(A)$ è compatto.

Soluzione Le funzioni $h(M) = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $g(M) = ||M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}||$ sono continue da $GL(2,\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ rispettivamente. A è definito come l'intersezione di $h^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $g^{-1}([0,1])$ che sono chiusi in quanto preimmagini di chiusi. Quindi A è chiuso in $GL(2,\mathbb{R})$.

L'insieme A corrisponde all'insieme $\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} x \neq y, x^2 + y^2 \leq 1\}$ La funzione $F(M) = (x,y)$ è continua da A in $\mathbb{R}^2$ e $G(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$ definita da $D^2 \setminus \{x = y\}$ è la sua inversa. Quindi A è omeomorfo a un disco chiuso di $\mathbb{R}^2$ a cui è stata tolta la diagonale

$x = y$. Quindi A non è compatto (non è chiuso in $\mathbb{R}^2$) e sconnesso $A = (A \cap \{x < y\}) \sqcup (A \cap \{x > y\})$ (entrambi gli insiemi sono aperti in quanto intersezioni di aperti di $\mathbb{R}^2$ con $D^2 \setminus \{x = y\}$ e non vuoti perchè i punti $(0,1)$ e $(1,0)$ stanno uno in un insieme e l'altro nell'altro). Ne segue anche che A non ha punti di taglio (non è connesso, o anche perchè è localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \cap \{y \geq 0\}$). La funzione f, letta su $D^2 \setminus \{x = y\}$, diventa $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. La sua immagine $f(A)$ è dunque contenuta in $(0,1]$. D'altronde per ogni $t \in (0,1]$ si ha $t = f(0,t)$. Quindi $f(A) = (0,1]$ che è connesso ma non compatto.

Esercizio 3. Sia X uno spazio metrico. Per ogni $Y \subseteq X$ non vuoto sia $f_Y : X \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f_Y(x) = d(x,Y) = \inf_{y \in Y} d(x,y).$$

(1) Dimostrare che f_Y è continua.
(2) Dimostrare che $f_Y(x) = 0$ se e solo se $x \in \overline{Y}$.
(3) Dimostrare che Y è chiuso se e solo se $Y = f_Y^{-1}(0)$.
(4) Dimostrare che per ogni coppia Y, Z di chiusi non vuoti e disgiunti di X la funzione $f_Y/(f_Y + f_Z)$ è continua.
(5) Dimostrare che i chiusi di X si separano con aperti (ovvero che se Y, Z sono due chiusi disgiunti di X allora esistono U, V aperti disgiunti di X, l'uno contenente Y e l'altro contenente Z).

Soluzione

(1) Per la disuguaglianza triangolare, per ogni x, x' con $d(x,x') < d$ e per ogni $y \in X$ si ha $d(x',y) < d(x,y) + d$. Ne segue che $\inf_{y \in Y} d(x',y) \leq \inf_{y \in Y} d(x,y) + d$. Quindi $f_Y(x') \leq f_Y(x) + d$. Scambiando i ruoli di x e x' si ottiene anche $f_Y(x) \leq f_Y(x') + d$ per cui $f_Y(x) - d \leq f_Y(x') \leq f_Y(x) + d$.

Gli intervalli aperti (a,b) sono una base della topologia Euclidea di $\mathbb{R}$ quindi è sufficiente mostrare che la preimmagine di un intervallo (a,b) è un aperto. Sia $x \in X$ tale che $f_Y(x) \in (a,b)$ e sia $d = \min\{|a - f_Y(x)|, |b - f_Y(x)|\}/10$. Quindi, usando le disuguaglianze appena provate, abbiamo $a < f_Y(x) - d \leq f_Y(x') \leq f_Y(x) + d < b$. Ossia $B(x,d) \subseteq f_Y^{-1}(a,b)$. Quindi ogni punto di $f_Y^{-1}(a,b)$ è interno e tale insieme risulta quindi aperto.

(2) $f_Y(x) = 0$ se e solo se $\inf_{y \in Y} d(x,y) = 0$ se e solo se esiste $y_n \in Y$ tale che $d(x,y_n) < 1/n$ se e solo se x è limite di una successione in Y se e solo se $x \in \overline{Y}$ (i metrici sono localmente numerabili).
(3) Y è chiuso se e solo se $Y = \overline{Y}$ e per il punto (2) $\overline{Y} = f_Y^{-1}(0)$.
(4) Siccome Y, Z son chiusi disgiunti la funzione $f_Y(x) + f_Z(x)$ non è mai nulla. Quindi $1/(f_Y + f_Z)$ è ben definita e continua. Quindi anche la funzione $f = f_Y/(f_Y + f_Z)$ è continua.
(5) $f(Y) = 0$ e $f(Z) = 1$ quindi basta prendere $U = f^{-1}(-\infty, 1/2)$ e $V = f^{-1}(3/4, \infty)$.