Geometria 3 secondo modulo, seconda parte
scritto del 02/07/2024
SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia $\mathbb{C}$ dotato dell'usuale coordinata $z = x + iy$. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ un parametro complesso e sia V il campo definito da

$$V(z) = \frac{1}{2}\left(\left((\alpha^2-1)z^3 + (\alpha-1)z^2 + z + \alpha^4\right)\frac{\partial}{\partial x} + i\left((1-\alpha^2)z^3 + (1-\alpha)z^2 - z + \alpha^4 - 2\right)\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

(1) [4 punti] Si scriva V come combinazione dei campi $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.
(2) [4 punti] Si dica per quali valori del parametro α il campo V è un campo olomorfo.
(3) [4 punti] Si dica per quali valori del parametro α il campo V si estende a un campo olomorfo su $\mathbb{CP}^1$.
(4) [4 punti] Si dica per quali valori del parametro α il campo V si estende a un campo meromorfo su $\mathbb{CP}^1$ avente un polo all'infinito.
(5) [5 punti] Per i parametri α per cui V risulta olomorfo su $\mathbb{C}$, si calcoli l'indice dell'eventuale polo/zero di V all'infinito.

Soluzione:

(1) Siccome

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

e sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned}
V(z) &= \frac{1}{2}\left(\left((\alpha^2-1)z^3 + (\alpha-1)z^2 + z + \alpha^4\right)\frac{\partial}{\partial x} + i\left((1-\alpha^2)z^3 + (1-\alpha)z^2 - z + \alpha^4 - 2\right)\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left((\alpha^2-1)z^3 + (\alpha-1)z^2 + z + \alpha^4\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right) \\
&\quad + i\frac{1}{2}\left(\left((1-\alpha^2)z^3 + (1-\alpha)z^2 - z + \alpha^4 - 2\right)\left(i\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right) \\
&= \frac{(\alpha^2-1)z^3 + (\alpha-1)z^2 + z + \alpha^4) - ((1-\alpha^2)z^3 + (1-\alpha)z^2 - z + \alpha^4 - 2))}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\
&\quad + \frac{(\alpha^2-1)z^3 + (\alpha-1)z^2 + z + \alpha^4) + (1-\alpha^2)z^3 + (1-\alpha)z^2 - z + \alpha^4 - 2}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\
&= ((\alpha^2-1)z^3 + (\alpha-1)z^2 + z + 1))\frac{\partial}{\partial z} + (\alpha^4 - 1)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}
\end{aligned}$$

(2) I coefficienti di $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sono olomorfi, quindi l'unica condizione da verificare è che il campo sia di tipo $(1,0)$, condizione verificata per $\alpha^4 = 1$ dunque per $\alpha = \pm 1, \pm i$.

(3) Affinché sia olomorfo su $\mathbb{CP}^1$ occorre che il campo sia olomorfo su $\mathbb{C}$, dunque siamo nel caso $\alpha = \pm 1, \pm i$ e

$$V = ((\alpha^2 - 1)z^3 + (\alpha - 1)z^2 + z + 1))\frac{\partial}{\partial z}$$

In oltre, dobbiamo controllare che V sia olomorfo anche nel punto all'infinito. Il cambio di carta di $\mathbb{CP}^1$ per controllare cosa succede all'infinito è $\phi(z) = 1/z$. In tale carta il campo V si legge come $\phi_*(V)$:

$$\begin{aligned}
\phi_*(V) &= ((\alpha^2 - 1)\frac{1}{z^3} + (\alpha - 1)\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1))\phi'(1/z)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= ((\alpha^2 - 1)\frac{1}{z^3} + (\alpha - 1)\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1))(-z^2)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -((\alpha^2 - 1)\frac{1}{z} + (\alpha - 1) + z + z^2))\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Per cui $\phi_*(V)$ è olomorfo se e solo se $\alpha^2 = 1$, ergo $\alpha = \pm 1$.

(4) Per quanto visto nel punto precedente, per ogni $\alpha = \pm 1, \pm i$ il campo V è meromorfo su $\mathbb{CP}^1$. Il punto all'infinito di $\mathbb{C}$ è lo zero dell'altra carta. Quindi i poli di V nel punto all'infinito sono i poli di $\phi_*(V)$ in zero. Dunque V presenta un polo di ordine 1 nel punto all'infinito per $\alpha^2 \neq 1$. Quindi per $\alpha = \pm i$.

(5) Abbiamo visto che per $\alpha = \pm i$ il campo V presenta un polo di ordine 1 all'infinito, dunque di indice -1. Per $\alpha = 1$, $\phi_*(V) = -(z + z^2)\frac{\partial}{\partial z}$ e si ha uno zero di ordine 1 dunque di indice 1. Per $\alpha = -1$, $\phi_*(V) = (2 - z - z^2)\frac{\partial}{\partial z}$ e dunque all'infinito non sono presenti né zeri né poli.

(3)+(4)+(5) Alternativamente si poteva ragionare come segue: in classe abbiamo visto che i campi olomorfi su $\mathbb{CP}^1$ sono al più quadratici e dunque il coefficiente del termine di grado 3 deve essere nullo (punto (3)) dunque $\alpha^4 = 1$. In tali casi sappiamo che la somma degli indici dei poli/zeri deve dare $\chi(\mathbb{CP}^1) = 2$. Se il coefficiente di V è di terzo grado ($\alpha^2 \neq 1$, quindi rimane $\alpha = \pm i$) allora la ci sono tre zeri in $\mathbb{C}$, somma totale degli indici $= 3$, ergo ci deve essere un polo di ordine 1 (e indice -1) all'infinito (punto (4)). Se il coefficiente di V ha grado due ($\alpha = -1$) allora la somma degli indici fa già due e quindi non ci sono altri poli/zeri all'infinito, mentre se il coefficiente ha grado uno ($\alpha = 1$) allora in $\mathbb{C}$ c'è solo uno zero e ci deve essere necessariamente uno zero di indice 1 all'infinito (punto (5)).

Esercizio 2. Sia $p(z,w) = w^2 - z^3 - z^2 - z - 1$ e sia P il polinomio omogeneo di terzo grado in tre variabili che corrisponde a p. Sia X il luogo di zeri di p in $\mathbb{C}^2$ e sia Y la compattificazione di X in $\mathbb{CP}^2$ (ovvero il luogo di zeri di P in $\mathbb{CP}^2$).

(1) [2 punti] Scrivere esplicitamente il polinomio P.
(2) [4 punti] Verificare che lo zero è un valore regolare di P come funzione definita su $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.
(3) [3 punti] Calcolare il genere della sperficie di Riemann Y.
(4) Sia $f : X \to \mathbb{C}$ la restrizione a X della proiezione sulla coordinata z (cioè per ogni $(z,w) \in X$ si ha $f(z,w) = z$).
  (a) [3 punti] Trovare i punti di ramificazione di f.
  (b) [3 punti] Calcolare gli indici di ramificazione dei punti di ramificazione di f.

Soluzione:

(1) $P = W^2U - Z^3 - Z^2U - ZU^2 - U^3$.

(2) Dobbiamo verificare che P e le sue derivate parziali non si annullano mai contemporaneamente in un punto diverso da $(0,0,0)$. Le derivate parziali sono

$$P_U = W^2 - Z^2 - 2UZ - 3U^2 \quad P_W = 2WU \quad P_Z = -3Z^2 - 2ZU - U^2$$

affinché si annullino tutte e tre occorre $WU = 0$. Se $U = 0$ allora necessariamente anche $Z = 0$ perché si deve annullare P_Z e dunque anche W deve essere nullo per annullare P_U, dunque siamo nel punto $(0,0,0)$. Se si annulla W ma $U \neq 0$ allora possiamo lavorare nella carta $U \neq 0$ e dunque dobbiamo verificare che il sistema

$$\begin{cases} w^2 = z^3 + z^2 + z + 1 \\ w = 0 \\ -3z^2 - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

non abbia soluzione. Tale sistema ha soluzione se z annulla contemporaneamente il polinomio $z^3 + z^2 + z + 1$ e il polinomio $3z^2 + 2z + 1$. Le radici di $z^3 + z^2 + z + 1$ sono $\pm i, -1$, le quali non annullano $3z^2 + 2z + 1$. (Si noti che stiamo dicendo che $z^3 + z^2 + z + 1$ non ha radici multiple).

(3) Siccome p ha grado 3, la formula grado genere ci dice che il genere di Y è

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1$$

(4) La proiezione $f : X \to \mathbb{C}$ ha grado 2 infatti l'equazione che definisce i punti di X è

$$w = \pm\sqrt{z^3 + z^2 + z + 1}$$

e dunque ad ogni z corrispondono genericamente due valori di w. In altre parole

$$f^{-1}(z) = \{(z, \sqrt{z^3 + z^2 + z + 1}), (z, -\sqrt{z^3 + z^2 + z + 1})\}.$$

I punti di ramificazione sono quei punti in cui il grado è minore. In questo caso, siccome per ogni z l'equazione $w^2 = z^3 + z^2 + z + 1$ ha sempre almeno una soluzione, i punti di ramificazione sono i punti per cui tale equazione ha solo una soluzione. Questo ci dice già che l'indice di ramificazione di tali punti è $2 - 1 = 1$. Affinchè $(z, w) \in X$ sia di ramificazione, occorre quindi che $\sqrt{z^3 + z^2 + z + 1} = -\sqrt{z^3 + z^2 + z + 1}$ e quindi $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, cioè $z = \pm i, -1$. Quindi i punti di ramificazione sono

$$(i, 0), (-i, 0), (-1, 0).$$

Alterantivamente si poteva ragionare come segue. Nei punti in cui $z^3 + z^2 + z + 1 \neq 0$ allora si può scegliere una parametrizzazione locale di X col parametro z data appunto da $z \mapsto (z, \sqrt{z^3 + z^2 + z + 1})$. Per cui con tale parametrizzazione la f si legge come $f(z) = z$, ergo nessuna ramificazione e indice di ramificazione zero. Nei punti z_0 in cui $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, bisogna parametrizzare con w. Poniamo $h(z) = z^3 + z^2 + z + 1$, per cui possiamo scrivere che vicino a z_0 i punti di X soddisfano $w^2 = h(z)$. Siccome z_0 non è radice multipla di $z^3 + z^2 + z + 1$, il polinomio h è un biolomorfismo locale h tra un intorno di z_0 e un intorno di 0. Dunque la parametrizzazione è $w \mapsto (h^{-1}(w^2), w)$ ed f si legge come $w \mapsto h^{-1}(w^2)$. Siccome h è un biolomorfismo locale, il suo inverso h^{-1} è localmente olomorfo e avrà un suo sviluppo di Taylor. Ne segue che $f = h^{-1}(w^2)$ avrà uno sviluppo di Taylor con solo termini di pari. In oltre, siccome Siccome h è un biolomorfismo locale tra un intorno di z_0 e un intorno di 0, allora il coefficiente di primo grado dello sviluppo di h^{-1} è non nullo. Quindi f nella coordinata w avrà uno sviluppo con solo termini di grado pari e coefficiente di grado due non nullo. Ne segue che indice l'indice di ramificazione è 1.