Geometria 3 secondo modulo, seconda parte
scritto del 14/09/2024
SOLUZIONI

Esercizio 1. Per ognuno dei seguenti campi di vettori su $\mathbb{R}^2$ si trovino gli zeri e se ne calcolino gli indici.

- (1) [5 punti] $V(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$;
- (2) [5 punti] $V(x, y) = (x + x^2 - y^2, y + 2xy)$;
- (3) [5 punti] $V(x, y) = (-y + x(y^2 + x^2), x + y(x^2 + y^2))$

Soluzione:

(1) Usando coordinate complesse si ha che $V(z) = z^3$ infatti $(x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$. Dunque l'unico zero è l'origine e l'indice è 3.

(2) Usando coordinate complesse si ha che $V(z) = z^2 + z$ infatti $(x + iy)^2 + (x + iy) = x^2 + 2ixy + (iy)^2 + x + iy = x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy = x + x^2 - y^2 + i(2xy + y)$. Dunque ci sono due zeri semplici in 0 e -1 , entrambi di indice 1. Per giustificare pienamente quest'ultima osservazione, si può calcolare il differenziale di V che è $\begin{pmatrix} 1 + 2x & -2y \\ 2y & 1 + 2x \end{pmatrix}$ e nei punti $(0, 0)$ e $(-1, 0)$ ha determinante uguale a 1.

(3) Possiamo scegliere di lavorare in coordinate complesse o reali, come nel punto precedente. In coordinate complesse il campo diventa $V(z) = iz + z|z|^2$ che ha come unico zero l'origine. In coordinate reali il sistema $y = x(x^2 + y^2), x + y(x^2 + y^2)$ ha come unica soluzione il punto $(0, 0)$.

Per calcolare l'indice possiamo calcolare il differenziale di V nell'origine, che è

$\begin{pmatrix} y^2 + 3x^2 & -1 + 2xy \\ 1 + 2xy & x^2 + 3y^3 \end{pmatrix}$ e osservare che nell'origine è non degenere con determinante positivo, dunque l'indice è 1. Alternativamente si può procedere osservando che l'omotopia $V_t(z) = iz + tz|z|^2$ non introduce nuovi zeri per $t \in [0, 1]$ dunque l'indice è lo stesso del campo iz , che ha indice 1.

Esercizio 2. Si dica per quali dei seguenti polinomi lo zero è un valore regolare anche all'infinito e si calcoli il genere della superficie di Riemann determinata dal luogo di zeri di p .

- (1) [5 punti] $p(z, w) = z^2w^2 + 1$
- (2) [5 punti] $p(z, w) = z^2 + w^2$
- (3) [5 punti] $p(z, w) = z + w^2 + 1$

Sia ora $p(z, w)$ un polinomio complesso per cui lo zero è un valore regolare anche all'infinito e sia S la superficie di Riemann determinata dal suo luogo di zeri.

(4) [6 punti] Si dica se S può avere caratteristica pari a -26 .

Soluzione

(1) il polinomio omogeneo associato a p è

$$P(X, Z, W) = Z^2W^2 + X^4$$

le derivate parziali sono

$$P_X = 4X^3 \quad P_Z = 2ZW^2 \quad P_W = 2Z^2W$$

che si annullano simultaneamente nel punto $[X, Z, W] = [0, 0, 1]$, che soddisfa anche $P(X, Z, W) = 0$ e dunque lo zero non è un valore regolare.

(2) il polinomio è omogeneo e lo zero non è un valore regolare perchè l'origine annulla sia p che le sue derivate. Volendo fare tutti i calcoli aggiungendo la terza variabile, il polinomio omogeneo associato a p è

$$P(X, Z, W) = Z^2 + W^2.$$

Le sue derivate sono $P_X = 0, P_Z = 2Z, P_W = 2W$ che si annullano simultaneamente nel punto $[1, 0, 0]$ che soddisfa anche $P(X, Z, W) = 0$.

(3) il polinomio omogeneo associato a p è

$$P(X, Z, W) = XZ + W^2 + X^2$$

le derivate parziali sono

$$P_X = Z + 2X \quad P_Z = 3X \quad P_W = 2W$$

che si annullano simultaneamente solo nell'origine (che non fa parte di $\mathbb{CP}^2$) dunque lo zero è valore regolare. Il genere della curva data dal luogo di zeri di p è dato dalla formula grado genere e quindi

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{(2-1)(2-2)}{2} = 0$$

(4) Siccome $\chi = 2 - 2g$ la domanda è equivalente a chiedere se il genere di S può essere 14. La risposta è no perchè dalla formula grado genere segue che i generi per gradi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sono 0, 0, 1, 3, 6, 10, 15 e siccome il genere è monotono nel grado, per gradi maggiori il genere sarà sempre maggiore di 15. Alternativamente si poteva osservare che il grado soddisfa $(d-1)(d-2) = 2g$ dunque

$$d^2 - 3d + 2 - 2g = 0 \quad d^2 - 3d + \chi = 0$$

e dunque (siccome $d \geq 0$) $d = \frac{3 + \sqrt{9 - 4\chi}}{2}$. Siccome $9 + 4 \cdot 26 = 113$ non è un quadrato perfetto, non può esistere un grado intero d che soddisfi tale equazione.