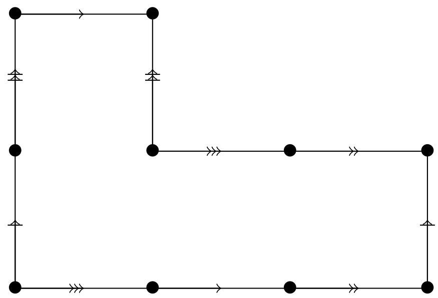
Geometria 3 secondo modulo, seconda parte
scritto del 20/06/2024
Soluzioni:

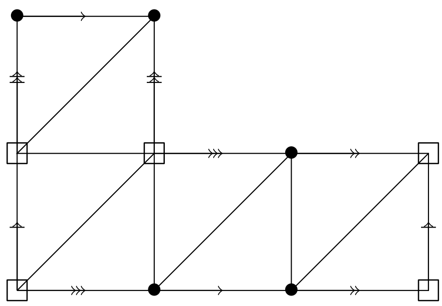
Esercizio 1. Sia $P \subset \mathbb{C}$ il poligono delimitato dalla spezzata con vertici in $0, 2i, 4i, 2+4i, 2+2i, 4+2i, 6+2i, 6, 4, 2$ e sia S la superficie ottenuta identificando i lati di P con la stessa freccia come in figura:



(1) [7 punti] Si calcoli la caratteristica di S.
(2) Considerando la struttura complessa indotta da $\mathbb{C}$ su S, sia ω la forma su S che nella carta data da P si legge come $\omega = dz$.
  (a) [4 punti] Dimostrare che ω ha necessariamente degli zeri/poli su S.
  (b) [4 punti] Calcolare gli indici degli zeri/poli di ω.
  (c) [Facoltativo, 6 punti extra] Scrivere esplicitamente un atlante per la struttura di superficie di Riemann di S indotta da $\mathbb{C}$.

Soluzione

(1) Triangloliamo S aggiungendo i lati e le diagonali dei quadratini e andiamo a identificare quanti vertici ci sono dopo le identificazioni.

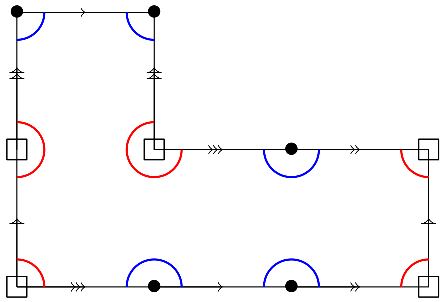


Abbiamo 8 triangoli, 12 lati (5 derivanti dai lati identificati a coppie e 7 interni a P) e 2 vertici; la caratteristica di S è dunque

$$\chi(S) = V - L + T = 2 - 12 + 8 = -2$$

($2a$) Se ω non avesse né poli né zeri allora per la formula della somma degli indici, S avrebbe caratteristica nulla, ma sappiamo che $\chi(S) = -2$.

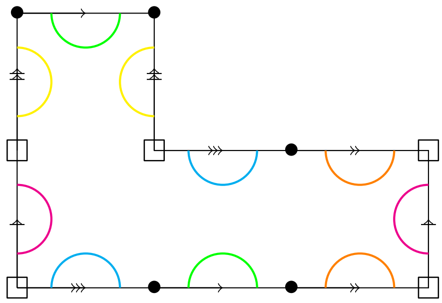
(2b) Andiamo a calcolare l'angolo totale che vediamo attorno ai due vertici nella carta data da P.



Attorno a entrambi i vertici abbiamo un angolo di 4π quindi i cambi di carta locale da una carta intorno al vertice, a quella data da P saranno del tipo $z \mapsto z^2$. Il pull-back di dz tramite z^2 è $2zdz$, dunque ω nella carta attorno ai vertici presenta zeri di molteplicità 1 e dunque indice -1 (coerentemente col fatto che la somma degli indici fornisce la caratteristica).

(2c) Definiamo innanzitutto gli aperti del ricoprimento. Un aperto sarà la parte interna di P. Per ogni punto medio dei lati del bordo di P scegliamo un aperto fatto da due semidischi in P. Esplicitamente definiamo

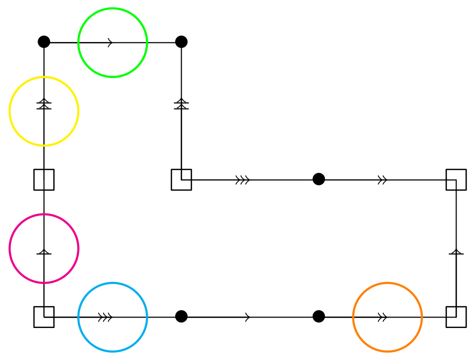
- $U_1 = \{z \in P : |z-(1+4i)| < 1/2\} \cup \{z \in P : |z-3| < 1/2\}$ (in verde nella figura)
- $U_2 = \{z \in P : |z-3i| < 1/2\} \cup \{z \in P : |z-(2+3i)| < 1/2\}$ (in giallo nella figura)
- $U_3 = \{z \in P : |z-i| < 1/2\} \cup \{z \in P : |z-(6+i)| < 1/2\}$ (in magenta nella figura)
- $U_4 = \{z \in P : |z-1| < 1/2\} \cup \{z \in P : |z-(3+2i)| < 1/2\}$ (in ciano nella figura)
- $U_5 = \{z \in P : |z-5| < 1/2\} \cup \{z \in P : |z-(5+2i)| < 1/2\}$ (in arancione nella figura)



La carta locale su P è l'identità $\phi_0 : P \to \mathbb{C}$, $\phi_0(z) = z$. Le carte locali sugli U_i sono definite da

- $\phi_1(U_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-(1+4i)| < 1/2\}$
- $\phi_2(U_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z-3i| < 1/2\}$
- $\phi_3(U_3) = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1/2\}$
- $\phi_4(U_4) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1/2\}$

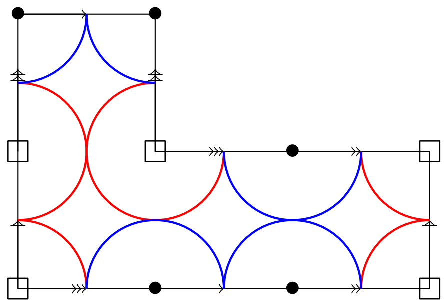
- $\phi_5(U_5) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| < 1/2\}$



Ogni $U_i \cap P$ ha due componenti connesse e i cambi di carta $\phi_0\phi_i^{-1}$ sono l'identità su una componente e una traslazione nell'altra, dunque funzioni olomorfe.

Intorno ai vertici prendiamo palle di raggio 1. Esplicitamente abbiamo

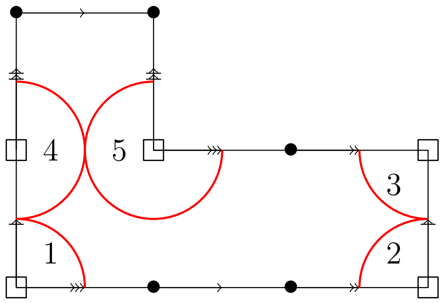
- $V_1 = \{z \in P : |z| < 1\} \cup \{z \in P : |z - 6| < 1\} \cup \{z \in P : |z - (6 + 2i)| < 1\} \cup \{z \in P : |z - 2i| < 1\} \cup \{z \in P : |z - (2 + 2i)| < 1\}$ (in rosso in figura)
- $V_2 = \{z \in P : |z - 2i| < 1\} \cup \{z \in P : |z - (1 + 2i)| < 1\} \cup \{z \in P : |z - 4| < 1\} \cup \{z \in P : |z - (4 + 2i)| < 1\} \cup \{z \in P : |z - 2| < 1\}$ (in blu in figura)

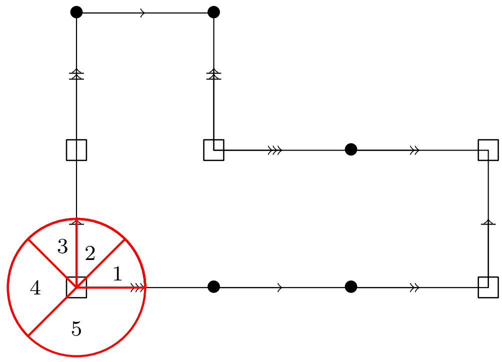


La carta locale $\psi_1 : V_1 \to \mathbb{C}$ è definita mandando V_1 in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in modo che ogni settore circolare rosso di angolo θ sia mandato in un settore di angolo $\theta/2$. Più precisamente, l'intersezione di V_1 con P ha cinque componenti connesse; definiamo

$$\psi_1(z) = \begin{cases} \sqrt{z} & z \in P : |z| < 1 \\ \sqrt{z-6} & z \in P : |z - 6| < 1 \\ \sqrt{z-6-2i} & z \in P : |z - (6+2i)| < 1 \\ \sqrt{z-2i} & z \in P : |z - 2i| < 1 \\ \sqrt{z-2-2i} & z \in P : |z - (2+2i)| < 1 \end{cases}$$

ove le determinazioni delle radici quadrate sono prese in modo da rendere ψ_1 continua.





e i cambi di carta $\phi_0\psi_1^{-1}$ sono del tipo $z^2 + c$, che sono olomorfi. Esplicitamente

$$\phi_0(\psi_1^{-1}(z)) = \begin{cases} z^2 & 0 < \arg(z) < \pi/4 \text{ (settore 1)} \\ z^2 + 6 & \pi/4 < \arg(z) < \pi/2 \text{ (settore 2)} \\ z^2 + 6 + 2i & \pi/2 < \arg(z) < 3\pi/4 \text{ (settore 3)} \\ z^2 + 2i & 3\pi/4 < \arg(z) < 4\pi/4 \text{ (settore 4)} \\ z^2 + 2 + 2i & 5\pi/4 < \arg(z) < 2\pi \text{ (settore 5)} \end{cases}$$

Similmente si controlla che i cambi $\phi_i\psi_1^{-1}$ sono olomorfi.
Analoga costruzione per V_2.

Esercizio 2. Si dica per quali dei seguenti polinomi lo zero è un valore regolare anche all'infinito e si calcoli il genere della superficie di Riemann determinata dal luogo di zeri di p.

(1) [5 punti] $p(z, w) = z^2 w + 1$
(2) [5 punti] $p(z, w) = z^3 + w^2$
(3) [5 punti] $p(z, w) = z^3 + w^2 + 1$

Soluzione

(1) il polinomio omogeneo associato a p è

$$P(X, Z, W) = Z^2 W + X^3$$

le derivate parziali sono

$$P_X = 3X^2 \qquad P_Z = 2ZW \qquad P_W = Z^2$$

che si annullano simultaneamente nel punto $[X, Z, W] = [0, 0, 1]$, che soddisfa anche $P(X, Z, W) = 0$ e dunque lo zero non è un valore regolare.

(2) il polinomio omogeneo associato a p è

$$P(X, Z, W) = Z^3 + W^2 X$$

che a meno di rinominare le variabili è quello di prima, quindi lo zero non è valore regolare.

(3) il polinomio omogeneo associato a p è

$$P(X, Z, W) = Z^3 + W^2 X + X^3$$

le derivate parziali sono

$$P_X = W^2 + 3X^2 \qquad P_Z = 3Z^2 \qquad P_W = 2WX$$

che si annullano simultaneamente solo nell'origine (che non fa parte di $\mathbb{CP}^2$) dunque lo zero è valore regolare. Il genere della curva data dal luogo di zeri di p è dato dalla formula grado genere e quindi

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1$$