Geometria 3 secondo modulo, seconda parte
scritto del 22/07/2024
SOLUZIONI

Esercizio 1. Per ognuno dei seguenti campi di vettori su $\mathbb{R}^2$ si trovino gli zeri e se ne calcolino gli indici.

(1) [5 punti] $V(x,y) = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y)$;
(2) [5 punti] $V(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$;
(3) [5 punti] $V(x,y) = (y^2 + x^2, yf(x))$ ove $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

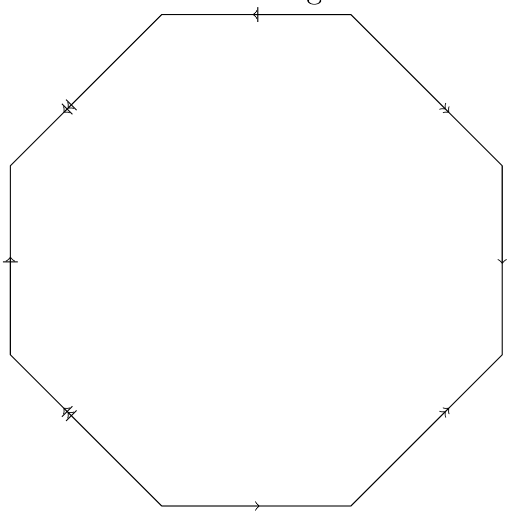
Soluzione:

(1) Usando coordinate complesse si ha che $V(z) = \bar{z}^3$ infatti $(x - iy)^3 = x^3 + 3x^2(-iy) + 3x(-iy)^2 + (-iy)^3 = x^3 - 3ix^2y - 3xy^2 + iy^3 = x^3 - 3xy^2 + i(y^3 - 3x^2y)$. Dunque l'unico zero è l'origine e l'indice è -3.

(2) Usando coordinate complesse si ha che $V(z) = z^2$ infatti $(x+iy)^2 = x^2+2ixy+(iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$. Dunque l'unico zero è l'origine e l'indice è 2.

(3) Affinché (x,y) sia uno zero di V occorre che entrambe le coordinate siano nulle, in particolare deve essere nulla la prima e visto che siamo su $\mathbb{R}^2$ l'unica soluzione di $x^2+y^2 = 0$ è l'origine. Andando a calcolare il grado della mappa $V/||V||$ si vede che tale mappa non è suriettiva in quanto la componente orizzontale di V è sempre ≥ 0. In particolare $(-1,0)$ non è nell'immagine di $V/||V||$. Dunque il grado di $V/||V||$ è zero. Per cui l'indice di V nel suo unico zero è nullo.

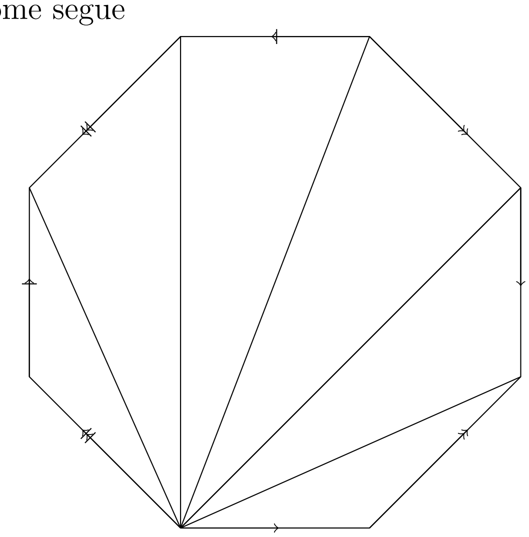
Esercizio 2. Sia S la superficie di Riemann ottenuta identificando i lati di un ottagono come in figura, con la struttura indotta dall'ottagono stesso.



(1) [6 punti] Si calcoli il genere di S.
(2) [5 punti] Si dica se esiste un campo olomorfo su S con un solo zero.
(3) [5 punti] Si dica se esiste una 1-forma olomorfa su S con un solo zero.
(4) [5 punti] Si dica se esiste una funzione olomorfa $f : S \to \mathbb{CP}^1$ con un solo punto di ramificazione.

Soluzione:

(1) Triangoliamo S come segue



Abbiamo 1 vertice, 9 lati e 6 triangoli dunque $2 - 2g = \chi(S) = 1 - 9 + 6 = -2$, quindi $g = 2$.

(2) Tale campo non esiste. Gli indici degli zeri dei campi olomorfi sono tutti positivi e la loro somma deve fare $\chi(S) = -2$, quindi un campo olomorfo su S non può avere zeri isolati, in particolare non può avere un solo zero.

(3) Sì. Per esempio la forma dz si estende a una forma olomorfa con un solo zero nell'unico vertice. Infatti l'unico vertice ha nella carta dell'ottagono un angolo di $8(\frac{3}{4}\pi) = 6\pi$ dunque il cambio di carta tra un intorno di zero e la carta data dall'ottagono è del tipo $z^3 + c$ dunque il pull back di $\omega = dz$ è $3z^2dz$ che presenta uno zero di molteplicità 2.

(4) No. Infatti, supponiamo per assurdo che ci sia $f : S \to \mathbb{CP}^1$ con un solo punto di ramificazione z_0. Detto d il grado di f, L'indice di ramificazione $ram(z_0)$ è un numero positivo minore di d e dovremmo avere

$$-2 = \chi(S) = d\chi(\mathbb{CP}^1) - ram(z_0) = 2d - ram(z_0) > 2d - d = d \geq 0$$

assurdo.