Note aggiornate il 17 giugno 2024

Queste note presuppongono il programma svolto finora: La classificazione delle superfici orientabili compatte, la teoria del grado e degli indici dei campi di vettori (Milnorino) e la teoria basilare delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ (modulo precedente).

1. Forme e campi olomorfi su superfici di Riemann

1.1. **Forme lineari su $\mathbb{R}^2$.** Siamo abituati ad identificare $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ scrivendo $z = x+iy$. Dicendo ciò stiamo di fatto definendo una funzione $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$$z(x, y) = x + iy.$$

Si noti che la funzione z è biunivoca, avendo come inversa

$$z \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z+\bar{z} \\ i(\bar{z}-z) \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.1.1. Una struttura complessa su $\mathbb{R}^2$ è un elemento $J \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ tale che $J^2 = -I$.

Per esempio $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è la struttura complessa standard di quando si identifica $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$. Nelle coordinate reali di $\mathbb{C}$, J rappresenta la moltiplicazione per i. Infatti quando scriviamo $z = x + iy$ diciamo che il numero complesso $z \in \mathbb{C}$ corrisponde al vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Il numero $iz = ix - y$ corrisponde quindi al vettore $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Più formalmente, la funzione $z(x, y) = x + iy$ soddisfa:

$$z(J(x, y)) = iz(x, y).$$

Una superficie di Riemann S ha una struttura complessa su ogni piano tangente T_xS data appunto dalla moltiplicazione per i.

Definizione 1.1.2. Una forma lineare su $\mathbb{R}^2$ è un elemento di $\hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Una forma lineare su $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{C}$ è un elemento di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) = \{\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : \omega \text{ è } \mathbb{R}\text{-lineare}\}$.

Lo spazio $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ma ha pure una struttura naturale di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ data da

$$(\lambda\omega)(v) = \lambda\omega(v)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Si tratta di spazi bidimensionali.

In coordinate canoniche ogni forma corrisponde a una matrice 1×2 a coefficienti complessi, cioè a una matrice riga con due elementi. In coordinate quindi ogni forma è del tipo

$$\omega\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dunque $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ è isomorfo, come spazio vettoriale complesso, a $\mathbb{C}^2$.

Una base di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ è data dalle forme che corrispondono ai vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Tali forme prendono il nome di dx e dy rispettivamente:

Definizione 1.1.3.

La forma dx è definta da $dx \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$.

La forma dy è definta da $dy \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y$.

Per esempio, avremo quindi $dx(2, 3) = 2$ e $dy(2, 3) = 3$.

Con questo formalismo la forma ω data da $\omega(x, y) = ax + by$ non sarà altro che

$$\omega = adx + bdy.$$

Si noti che a, b possono essere numeri complessi. Per esempio è ammessa la forma $2idx + (1 - i)dy$.

Una base alternativa di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ è data dalle forme dz e $d\bar{z}$ definite come segue:

$$dz = dx + idy \qquad d\bar{z} = dx - idy$$

esse corrispondono ai vettori $(1, i)$ e $(1, -i)$ rispettivamente (si noti che tali vettori sono una base di $\mathbb{C}^2$).

Notiamo in oltre che dz è proprio al differenziale della funzione $z : \mathbb{R}^2 \to C$. Infatti la funzione z è $\mathbb{R}$-lineare e dunque coincide col suo differenziale. Per cui si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Diff}(z) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x + iy = dx \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + idy \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (dx + idy) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = dz \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Similmente $d\bar{z}$ è il differenziale della funzione $\bar{z} : \mathbb{R}^2 \to C$ data da $\bar{z}(x, y) = x - iy$.

Un'ultima osservazione prima di procedere. Un elemento di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ si può estendere imponendo la $\mathbb{C}$-linearità a un elemento di $\hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$. Viceversa, dato un elemento di $\hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ considerando la restrizione a $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}^2$ otteniamo un elemento di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. In altre parole un vettore riga (a, b) a coefficienti complessi può esser moltiplicato sia per un vettore colonna reale che per un vettore colonna complesso, ergo pensato come elemento sia di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ che di $\hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$, spazi che risultano quindi isomorfi come spazi vettoriali complessi.

1.2. 1-forme differenziabili su $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1.2.1. Una 1-forma differenziabile a valori in $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}^2$ è una funzione liscia $\omega : \mathbb{R}^2 \to \hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$.

Se non c'è ambiguità useremo semplicemente *forma* o *forma complessa* per indicare una 1-forma differenziabile a valori in $\mathbb{C}$.

In parole povere una forma complessa è la scelta, per ogni (x, y) di una forma lineare $\omega(x, y)$.

In altre parole ancora, una 1-forma è una cosa del tipo $\omega = adx+bdy$ ove a, b sono funzioni del punto (x, y).

Per esempio, $\omega(x, y) = \cos(x)dx + ie^{x+y}dy$ è una forma complessa su $\mathbb{R}^2$; nel punto $(0, 0)$ vale $dx+idy$, nel punto $(3, -2)$ vale $\cos(3)dx+iedy$.

Definizione 1.2.2. L'insieme delle 1-forme differenziabili su $\mathbb{R}^2$, a valori in $\mathbb{C}$, si denota con $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

Esso è un modulo sull'anello delle funzioni $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Cioè data una forma ω e una funzione f si può moltiplicare ω per f e valgono le usuali proprietà associative e distributive.

Per esempio se $\omega = ydx + (x^2 + y^2)dy$ e $f(x, y) = \cos(x - y)$ si ha

$$f\omega = y\cos(x - y)dx + \cos(x - y)(x^2 + y^2)dy.$$

In oltre, se $V = (V_x, V_y)$ è un campo di vettori (V_x e V_y sono dunque funzioni del punto (x, y)) allora si può calcolare punto per punto ω su V. Se $\omega = adx + bdy$ si avrà

$$\omega(V) = aV_x + bV_y$$

che risulta quindi una funzione del punto (x, y).

Le forme dx e dy possono essere interpretate come forme i cui coefficienti sono costanti e formano una base del modulo $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Cioè ogni forma si esprime in modo unico come $\omega = adx + bdy$ con a, b funzioni lisce.

Come prima, anche la coppia

$$dz, d\bar{z}$$

è una base di $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, cioè ogni forma si esprime in modo unico come combinazione di $dz, d\bar{z}$

$$\omega = fdz + gd\bar{z}$$

I cambi di base sono

$$dz = dx + idy \qquad d\bar{z} = dx - idy$$
$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \qquad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

Ovviamente i coefficienti dipendono da quale base si è scelta. Per esempio, consideriamo la forma ω che nel punto (x, y) corrisponde alla riga $(\cos x, 2iy)$, essa si esprimerà come

$$\begin{aligned}\omega = \cos x dx + i2ydy &= \cos x\frac{dz + d\bar{z}}{2} + i2y\frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= (\frac{\cos x}{2} + y)dz + (\frac{\cos x}{2} - y)d\bar{z}.\end{aligned}$$

La forma dz genera un sotto modulo di $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, così come $d\bar{z}$.

Definizione 1.2.3. Una 1-forma è detta di tipo $(1,0)$ se è un multiplo di dz, è detta di tipo $(0,1)$ se è un multiplo di $d\bar{z}$. Il modulo delle forme di tipo $(1,0)$ si denota con $\Omega^{(1,0)}(\mathbb{R}^2)$ e quello delle forme di tipo $(0,1)$ con $\Omega^{(0,1)}(\mathbb{R}^2)$.

Per esempio la forma zdz è di tipo $(1,0)$ e la forma $zd\bar{z}$ è di tipo $(0,1)$.

Ovviamente ci sono forme che non sono ne' di tipo $(1,0)$ ne' di tipo $(0,1)$, per esempio $2dx$, che coincide con $dz + id\bar{z}$ e dunque non è un multiplo ne' di dz ne' di $d\bar{z}$. Il fatto che $dz, d\bar{z}$ sia una base di Ω^1 ci dice che $\Omega^1 = \Omega^{(1,0)} \oplus \Omega^{(0,1)}$.

1.3. **Funzioni e forme olomorfe e meromorfe su $\mathbb{R}^2$.** Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ differenziabile in senso reale. Il suo differenziale è un elemento di $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, in particolare se $v = (v_x, v_y)$ è un vettore,

$$df[v] = \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y$$

dunque possiamo scrivere

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Siamo abituati a identificare $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ e trattare le funzioni $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, esprimendo la condizione di olomorficità attraverso condizioni sulle derivate parziale delle componenti. Vediamo adesso come tutto ciò si traduce nel linguaggio che abbiamo introdotto.

Su $\mathbb{R}^2$ consideriamo la struttura complessa standard J e la corrispondenza $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definita come al solito da $z(x,y) = x + iy$.

Definizione 1.3.1. Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ si dice J-olomorfa (o semplicemente olomorfa), se il differenziale df soddisfa la condizione

$$df(JV) = idf(V)$$

Per esempio, la funzione z è olomorfa secondo questa definizione. Vediamo che ciò che abbiamo detto corrisponde esattamente alle famose condizioni di Cauchy-Riemann.

In coordinate

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad JV = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad df(JV) = df\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$idf(V) = ix\frac{\partial f}{\partial x} + iy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Siccome ciò deve valere per ogni x, y se ne deduce che la condizione di olomorficità è equivalente l'uguaglianza

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$$

le cui componenti reali e immaginarie sono le condizioni di Cauchy-Riemann, infatti: poniamo $Re(f) = \alpha$ e $Im(f) = \beta$ dunque $f = \alpha + i\beta$ con α, β funzioni reali.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i\frac{\partial \beta}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i\frac{\partial \beta}{\partial y}$$

e quindi l'uguaglianza di cui sopra diventa

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} + i\frac{\partial \beta}{\partial y} = i(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i\frac{\partial \beta}{\partial x}) = i\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{cases}$$

Nel formalismo che stiamo sviluppando abbiamo dunque che se f è olomorfa, e quindi $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$, allora

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + i\frac{\partial f}{\partial x}dy = \frac{\partial f}{\partial x}(dx + idy) = \frac{\partial f}{\partial x}dz.$$

In generale

$$\begin{aligned} df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y}(-idz + id\bar{z})\right) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})d\bar{z} \end{aligned}$$

e la condizione $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ esprime esattamente l'annullarsi del coefficiente $d\bar{z}$. Cioè f è olomorfa se e solo se df è ti tipo $(1, 0)$.

A questo punto qualche precisazione è d'obbligo. Abbiamo visto che se f è olomorfa allora $df = \frac{\partial f}{\partial x}dz$. Se lavoriamo con la variabile complessa z siamo abituati a scrivere $f(z)$ e $df = f'dz$ con $f' = df/dz$ che indica la derivata in senso complesso. Ma allora $df/dz = \partial f/\partial x$? Cosa ci sta sotto?

Intanto proviamo in un paio di esempi.

Sia $f(z) = z^2$, beh in questo caso $f'(z) = 2z$. Calcoliamo $\partial f/\partial x$. In coordinate locali $f(x, y) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ e $\partial f/\partial x = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z$.

Magari è un caso. Proviamo con $f(z) = 1/z$ in questo caso $f' = -1/z^2$. In coordinate reali $f(x, y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - (x - iy)2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} &= -\frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{\bar{z}^2}{|z^2|^2} = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

Lavorando in coordinate complesse, $df = f'(z)$ non è altro che un elemento di $\hom(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ cioè una matrice 1×1 a coefficienti complessi.

La moltiplicazione per il numero complesso $a + ib$, in coordinate reali è data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Infatti $(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$ e $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$.

Il differenziale di una funzione olomorfa $f = \alpha + i\beta$, che in coordinate complesse è il numero complesso $f'(z)$, in coordinate reali è

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & -\frac{\partial\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial x} \end{pmatrix}$$

che corrisponde alla moltiplicazione per il numero complesso $\frac{\partial\alpha}{\partial x} + i\frac{\partial\beta}{\partial x}$ che guarda caso è proprio $\partial f/\partial x$.

Definizione 1.3.2. Una forma olomorfa su $\mathbb{R}^2$ è il differenziale di una funzione olomorfa.

In particolare, le forme olomorfe sono tutte di tipo $(1, 0)$ e si scrivono come $\omega = f(z)dz$. Dalla teoria delle funzioni olomorfe segue che se ω è il differenziale di una funzione olomorfa allora anche f è olomorfa. Dunque le forme olomorfe sono tutte quelle del tipo fdz con f olomorfa. Più in generale, una forma del tipo

$$f(z)dz$$

con f meromorfa, si dice forma meromorfa. Per esempio $\frac{1}{z}dz$ è una forma meromorfa su con un polo in zero.

1.4. **Campi di vettori complessi su $\mathbb{R}^2$, campi olomorfi e meromorfi.** Formalente anche questa volta dobbiamo solo complessificare, ma la cosa appare un po' più sottile. Quando si identifica $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ si pensa sempre a x come la coordinata reale e y quella immaginaria. Sulle forme, quello che abbiam fatto è estendere il campo dei coefficienti da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, per esempio quando si considera $\hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ e $\hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$. Le 1-forme reali vivono in $\hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, quelle complesse ammettono valori in $\mathbb{C}$. Si è sostanzialmente tensorizzato su $\mathbb{C}$. Se vogliamo fare la stessa cosa coi campi di vettori ci troveremo per le mani un $\mathbb{C}^2$, che rappresenta il complessificato di $\mathbb{R}^2$. Quindi partiamo da $\mathbb{C}$, lo identifichiamo con $\mathbb{R}^2$ e complessifichiamo a $\mathbb{C}^2$. Questo può creare un po' di confusione. Andiamo per gradi. I campi di vettori reali su $\mathbb{R}^2$ si possono vedere come funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Complessificando:

Definizione 1.4.1. Un campo di vettori complesso su $\mathbb{R}^2$ è una funzione liscia $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$.

In pratica per ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha un vettore $V(x,y) \in \mathbb{C}^2$.

Per esempio il campo $V(x,y) = \begin{pmatrix} x+3iy \\ i+e^x \end{pmatrix}$ è un campo di vettori complesso su $\mathbb{R}^2$. Per descrivere i campi si possono usare anche le coordinate complesse, per esempio $V(z) = \begin{pmatrix} z \\ z^2+\bar{z} \end{pmatrix}$ è un campo di vettori complessi.

Si noti che $V(z) = z$ non è un campo di vettori complesso su $\mathbb{R}^2$ secondo la nostra definizione perché un campo deve avere valori in $\mathbb{C}^2$.

Mentre i campi di vettori reali si potevano disegnare con le freccioline, quelli complessi no; semplicemente perchè $\mathbb{C}^2$ ha dimensione reale 4. $\mathbb{C}^2$ ha una base canonica data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. I campi costanti corrispondenti a tali vettori di base prendono il nome di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.

Definizione 1.4.2.

Il campo $\frac{\partial}{\partial x}$ è il campo costante $V(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il campo $\frac{\partial}{\partial y}$ è il campo costante $V(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Perché si usa questa notazione? Data una funzione f definita su $\mathbb{R}^2$ e dato un campo di vettori V si può calcolare, in ogni punto, la derivata di f nella direzione data da V. Il risultato è una nuova funzione. Quindi un campo di vettori può essere visto come un funzionale dallo spazio delle funzioni in sé. Possiamo dunque scrivere $V(f)$ indicando con ciò la funzione $df[V]$. Si noti che $\frac{\partial}{\partial x}(f)$ è proprio la derivata di f lungo la direzione $(1,0)$ e dunque è $\frac{\partial f}{\partial x}$ per cui $\frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}$ e la notazione è coerente.

Per i più curiosi, i funzionali che soddisfano le usuali regole delle derivate direzionali (tipo $V(fg) = V(f)g + fV(g)$) si chiamano *derivazioni*. I campi di vettori complessi si possono dunque vedere come derivazioni complesse sull'anello delle funzioni complesse, da cui la terminologia di cui sopra.

Come per le forme, i campi complessi su $\mathbb{R}^2$ sono un modulo sull'anello $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$: dato un campo V e una funzione f su può fare fV. Una base di tale modulo è data dai campi coordinati $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$. Un'altra base è data dai campi $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ definiti come segue

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

il cambio di base inverso è

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}).$$

Dunque ogni campo si può esprimere sia come $V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ che come $V = \alpha\frac{\partial}{\partial z} + \beta\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Per esempio il campo $V(x, y) = (3iy^2, 2i + xy)$ è

$$\begin{aligned} V = 3iy^2\frac{\partial}{\partial x} + (2i + xy)\frac{\partial}{\partial y} &= 3iy^2(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) + (2i + xy)i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \\ &= (3iy^2 - 2 + ixy)\frac{\partial}{\partial z} + (3iy^2 + 2 - ixy)\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

I campi $2\frac{\partial}{\partial z}$ e $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ corrispondono ai campi costanti $(1, -i)$ e $(1, i)$ rispettivamente. Si noti che tali campi non si può "disengare" perché hanno una componente immaginaria.

Per vedere come un campo agisce su una funzione come derivazione, se $V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, si ha la formula

$$(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y})(f) = V(f) = df(V) = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b.$$

Per esempio se $V(x, y) = \cos x\frac{\partial}{\partial x} + iy\frac{\partial}{\partial y}$ e $f(x, y) = xy^3$ si ha $V(f) = y^3\cos x + 3ixy^3$.

Così come per i campi reali, se V è un campo di vettori complesso e ω è una 1-forma, si può calcolare $\omega(V)$ punto per punto.

Fatto 1.4.3. *Le forme dx, dy sono le duali di $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ e $dz, d\bar{z}$ sono le duali di $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Cioè*

$$dx(\frac{\partial}{\partial x}) = 1 \quad dx(\frac{\partial}{\partial y}) = 0 \qquad dy(\frac{\partial}{\partial x}) = 0 \quad dy(\frac{\partial}{\partial y}) = 1$$

$$dz(\frac{\partial}{\partial z}) = 1 \quad dz(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 0 \qquad d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial z}) = 0 \quad d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 1$$

Dimostrazione. Basta fare il calcolo in coordinate, osservando che $dx, dy, dz, d\bar{z}$ corrispondono rispettivamente ai vettori riga $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, i)$, $(1, -i)$; mentre $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ corrispondono rispettivamente ai vettori colonna $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ e l'accoppiamento $\omega(V)$ corrisponde al prodotto riga per colonna. □

Il calcolo $\omega(V)$ diventa quindi semplice, per esempio, se $V = ix\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial y}$ e $\omega = ydx + 3idy$ si ha $\omega(V) = ixy + 3ix^2$.

Come derivazioni, i campi $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ agiscono sulle funzioni. Indichiamo $\frac{\partial f}{\partial z}$ la derivazione di f lungo $\frac{\partial}{\partial z}$ e cioè

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(f) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(f) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$$

Dunque $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}$ è un normale operatore differenziale, che si può calcolare per tutte qualsiasi funzione f: non è la derivata in senso complesso, che esiste solo per le funzioni olomorfe.

Similmente,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(f) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$$

Anche questo è un operatore differenziale e, guarda caso, la condizione di olomorficità è proprio

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Come abbiamo già notato in precedenza, se f è olomorfa, e dunque $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i^2\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Facciamo alcuni esempi. Consideriamo la funzione $f(x, y) = 4x-2iy$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(4 - i(-2i)) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(4 + i(-2i)) = 3$$

e ciò è coerente col fatto che $4x - 2iy = z + 3\bar{z}$.

Facciamone un altro. Consideriamo la funzione $f(x, y) = 3x^2 - 2ixy$ e calcoliamo $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(6x - 2iy - i(-2ix)) = 2x - iy$$

calcoliamo ora $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(6x - 2iy + i(-2ix)) = 4x - iy$$

coerentemente col fatto che $f(x, y) = (z^2 + 5\bar{z}^2 + 6z\bar{z})/4$.

Proviamo ora a verificare con questo metodo che $f(z) = z^2$ è olomorfa. In coordinate reali abbiamo $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy$.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(2x + 2iy + i(-2y + 2ix)) = 0$$

Ok, è olomorfa, a questo punto facciamo anche $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(2x + 2iy - i(-2y + 2ix)) = 2x + 2iy = 2z$$

Fatto 1.4.4.

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

Dimostrazione.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y}(-idz + id\bar{z})\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})d\bar{z}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

□

Ritroviamo in particolare che se f è olomorfa allora $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz$.

Definizione 1.4.5. Un campo si dice di tipo $(1,0)$ se è un multiplo di $\frac{\partial}{\partial z}$, di tipo $(0,1)$ se è un multiplo di $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

L'insieme dei campi di tipo $(1,0)$ si indica solitamente con $T^{(1,0)}$, mentre $T^{(0,1)}$ indica i campi di tipo $(0,1)$.

Definizione 1.4.6. Un campo si dice olomorfo (o meromorfo) se è di tipo $(1,0)$ con coefficiente olomorfo (o meromorfo).

I campi olomorfi saranno quindi tutti del tipo $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ con f olomorfa. Per esempio $V(z) = z\frac{\partial}{\partial z}$, $V(z) = z^2\frac{\partial}{\partial z}$ sono olomorfi, $V(z) = \bar{z}\frac{\partial}{\partial z}$ non è olomorfo. Questi campi si possono disegnare perchè il coefficiente, essendo una funzione $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ può essere interpretato come un campo di vettori reale $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1.5. Gli operatori ∂ e $\bar{\partial}$.

Definizione 1.5.1. Si definiscono gli operatori ∂ e $\bar{\partial}$ come

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

Tali operatori sono definiti sullo spazio delle funzioni a valori in forme. Una funzione è olomorfa se il suo $\bar{\partial}$ è nullo. Osserviamo in oltre che

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

cioè $df = \partial f + \bar{\partial} f$.

Lemma 1.5.2. $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$

Dimostrazione. $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + i\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\right) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$. □

Da ciò si deduce immediatamente $\overline{\partial f} = \bar{\partial}\bar{f}$.

Per chi sa cosa sono le 2-forme differenziabili, gli operatori ∂ e $\bar{\partial}$ si possono estendere alle 1-forme – saranno quindi operatori dalle 1-forme alle 2-forme – ponendo

$$\partial(f dz) = \partial f \wedge dz \quad \text{ e } \quad \partial(f d\bar{z}) = \partial f \wedge d\bar{z}$$

similmente si fa per $\bar{\partial}$. Si verifica facilmente che $\partial(\partial f) = 0 = \bar{\partial}(\bar{\partial} f)$ e $\partial(\bar{\partial} f) = -\bar{\partial}(\partial f)$.

Chi è avvezzo a certe cose noti che se ω è una 1-forma olomorfa, dunque $\omega = f dz$ allora

$$d\omega = d(f dz) = df \wedge dz = (\partial f + \bar{\partial} f) \wedge dz = (\partial f) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz = 0.$$

Quindi le forme olomorfe son chiuse e l'integrale sui cammini dipende solo dalla classe di omologia dei cammini.

1.6. **Cambi di coordinate: Notazioni.**

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, possiamo considerare il suo differenziale come una forma a valori complessi cioè

$$\mathrm{diff}(f) : \mathbb{R}^2 \to \hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \simeq \hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$$

oppure, in coordinate reali, come

$$\mathrm{diff}(f) : \mathbb{R}^2 \to \hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \subseteq \hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2).$$

Nel primo caso *df* in coordinate sarà un vettore riga 1×2 a coefficienti complessi, nel secondo sarà una matrice 2×2 a coefficienti reali i cui coefficienti sono come al solito le derivate parziali, che può essere moltiplicata sia per vettori reali che per vettori complessi.

Benchè le due cose siano sostanzialmente equivalenti, il fatto che nel primo caso $df(V)$ sia un numero mentre nel secondo $df(V)$ sia un vettore, può creare confusione. Per evitarla, useremo una notazione diversa a seconda dei casi. In particolare, se

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

allora avremo $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ e il suo differenziale sarà indicato con Df:

$$Df : \mathbb{R}^2 \to \hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \subseteq \hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \qquad Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Se invece $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ allora il suo differenziale sarà indicato con *df*:

$$df : \mathbb{R}^2 \to \hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \simeq \hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Se infine $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è differenziabile in senso complesso allora il suo differenziale sarà una matrice 1×1 il cui coefficiente complesso è

$$f' = df/dz = \partial f/\partial z = \partial f/\partial x.$$

1.7. **Cambi di coordinate: pull-back di forme.**

Definizione 1.7.1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione differenziabile (per esempio un diffeomorfismo) e sia ω una forma su $\mathbb{R}^2$. Il **pull-back** di ω tramite f, che si denota con $f^*\omega$, è una forma su $\mathbb{R}^2$ definita da $(f^*\omega)_{(x,y)}(V) = \omega_{f(x,y)}(Df_{(x,y)}(V))$, più concisamente

$$f^*\omega(V) = \omega(Df(V))$$

Si chiama pull-back perché se consideriamo ω definita sull'$\mathbb{R}^2$ di arrivo di f, la stiamo *tirando indietro* sull'$\mathbb{R}^2$ di partenza tramite f. In generale infatti varrà che se $f : A \to B$ e ω è una forma su B, allora $f^*\omega$ è una forma su A.

Si noti che per definire il pull-back non è necessario che f sia invertibile, perchè stiamo usando solo f e Df e non le loro inverse.

Facciamo un esempio: Consideriamo

$$f(x,y) = (x^2 - y, x) \qquad Df = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora una forma ω, per esempio $\omega(s,t) = \cos t ds + e^{st}dt$. Se $V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$ allora avremo

$$\begin{aligned} (f^*\omega)_{(x,y)} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} &= \omega_{(x^2-y,x)} \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \\ &= (\cos x ds + e^{(x^2-y)x}dt) \begin{pmatrix} 2xV_x - V_y \\ V_x \end{pmatrix} \\ &= \cos x(2xV_x - V_y) + e^{(x^2-y)x}V_x \\ &= (2x\cos x + e^{(x^2-y)x})V_x - \cos x V_y \\ &= \Big((2x\cos x + e^{(x^2-y)x})dx - \cos x dy\Big) \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e dunque

$$f^*\omega = (2x\cos x + e^{(x^2-y)x})dx - \cos x dy.$$

In generale se ω corrisponde al vettore riga $(a(x,y), b(x,y))$, cioè $\omega = adx + bdy$, allora $f^*\omega$ è il prodotto, a sinistra, della riga (a,b) per la matrice che rappresenta Df:

$$f^*\omega = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} Df.$$

Per esempio se $f(x^2 - y, x)$ come prima, e $\omega = ads + bdt$, allora in rappresentazione vettoriale

$$f^*\omega = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xa + b & -a \end{pmatrix}$$

cioè $f^*\omega = (2xa + b)dx - ady$. Più precisamente, tenendo conto che a, b sono funzioni:

$$(f^*\omega)_{(x,y)} = \big(2xa(f(x,y)) + b(f(x,y)) \quad -a(f(x,y))\big)$$

cioè $f^*\omega = (2xa(f(x,y)) + b(f(x,y)))dx - a(f(x,y))dy$.

Ovviamente nulla osta che a, b siano funzioni a valori in $\mathbb{C}$.

Fatto 1.7.2. $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}((f \circ g)^*\omega)(v) &= \omega(D(f \circ g)(v)) = \omega(Df(Dg(v))) \\ &= (f^*\omega)(Dg(v)) = g^*(f^*\omega)(v).\end{aligned}$$

□

Fatto 1.7.3. *Il pull-back è lineare*

$$f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + \varphi^*(\eta) \qquad f^*(\lambda\omega) = \lambda f^*(\omega).$$

Dimostrazione.

$$f^*(\omega+\eta)(V) = (\omega+\eta)(DfV) = \omega(DfV)+\eta(DfV) = f^*(\omega)(V)+f^*(\eta)(V)$$

$$f^*(\lambda\omega)(V) = \lambda\omega(DfV) = \lambda f^*(\omega)(V).$$

□

1.8. Cambi di coordinate: push-forward di campi.

Definizione 1.8.1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un diffeomorfismo e sia V un campo di vettori su $\mathbb{R}^2$. Il **push-forward** di V tramite f, che si denota con f_*V, è il campo su $\mathbb{R}^2$ definito da

$$(f_*V)_{(s,t))} = Df_{f^{-1}(s,t)}(V(f^{-1}(s,t))),$$

ossia

$$(f_*V)_{f(x,y)} = Df_{(x,y)}(V(x,y))),$$

più concisamente

$$f_*V = Df(V)$$

Si noti che è necessario che f sia invertibile perchè si è usata f^{-1}. Se f non fosse suriettiva, ci sarebbero dei punti su cui f_*V non è definito, se f non fosse iniettiva potrebbe succedere che $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ ma $Df_{(x_1,y_1)}(V(x_1, y_y)) \neq Df_{(x_2,y_2)}(V(x_2, y_2))$ e dunque $f_*(V)$ non sarebbe univocamente definito.

Si chiama push-forward perché se pensiamo V definito sull'$\mathbb{R}^2$ di partenza, allora lo stiamo *spingendo in avanti* sull'$\mathbb{R}^2$ di arrivo tramite f. In generale se $f : A \to B$ e V è un campo su A allora f_*V è un campo su B.

Facciamo un esempio: Consideriamo come prima

$$f(x,y) = (x^2 - y, x) \qquad Df = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è invertibile in ogni punto ergo f è un diffeomorfismo. Esplicitamente $f^{-1}(s,t) = (t, t^2 - s)$. Consideriamo ora campo V, per esempio $V(x,y) = \begin{pmatrix} iy \\ x+i \end{pmatrix}$. Avremo

$$(f_*V)_{f(x,y)} = Df_{(x,y)}V(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iy \\ x+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ixy - x - i \\ iy \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\begin{aligned}(f_*V)_{(s,t)} = Df_{(t,t^2-s)}V(t,t^2-s) &= \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(t^2-s) \\ t+i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2it(t^2-s) - t - i \\ i(t^2-s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2it^3 - 2its - t - i \\ it^2 - is \end{pmatrix}\end{aligned}$$

In generale se $V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, cioè se V corrisponde al vettore colonna $\begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix}$, allora f_* corrisponde al prodotto, a destra, della matrice che rappresenta Df per $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$f_*V = Df \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Per esempio se $f(x^2 - y, x)$ come prima, e $V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, allora in rappresentazione vettoriale

$$f_*V = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xa - b \\ a \end{pmatrix}$$

cioè $f_*V = (2xa - b)\frac{\partial}{\partial s} + a\frac{\partial}{\partial t}$. Più precisamente, tenendo conto che a, b sono funzioni e che $(x,y) = f^{-1}(s,t) = (t, t^2 - s)$:

$$f_*V_{(s,y)} = \begin{pmatrix} 2ta(t,t^2-s) - b(t,t^2-s) \\ a(t,t^2-s) \end{pmatrix}$$

cioè $f_*V = \big(2ta(t,t^2-s) - b(t,t^2-s)\big)\frac{\partial}{\partial s} - a(t,t^2-s)\frac{\partial}{\partial t}$.
Ovviamente nulla osta che a, b siano funzioni a valori in $\mathbb{C}$.

Fatto 1.8.2. $(f \circ g)_*V = f_*(g_*V)$.

Dimostrazione.

$$(f \circ g)_*V = D(f \circ g)V = Df(DgV) = f_*(g_*(V)).$$

□

Fatto 1.8.3. *Il push-forward è lineare*

$$f_*(V + W) = f_*(V) + \varphi_*(V) \qquad f_*(\lambda V) = \lambda f_*(V).$$

Dimostrazione.

$$f_*(V+W) = Df(V+W) = DfV + DfW = f_*(V) + f_*(W)$$
$$f_*(\lambda V) = Df(\lambda V) = \lambda f_*(V).$$

□

Fatto 1.8.4. $f^*(\omega)(V) = \omega(f_*V)$

Dimostrazione.

$$f^*(\omega)(V) = \omega(Dfv) = \omega(f_*V).$$

□

1.9. **Invarianza della nozione di forma $(1,0)$ per biolomorfismi.** La domanda che ci poniamo adesso è: se ω è di tipo $(1,0)$ (o $(0,1)$) è vero che il suo pull back continua a essere di tipo $(1,0)$? La risposta sarà: sì, a patto che per tirarla indietro usiamo una funzione olomorfa.

Consideriamo un diffeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Su $\mathbb{R}^2$ mettiamo la struttura complessa standard $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Identifichiamo il primo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ tramite $z(x,y) = x+iy$ e il secondo tramite $w(s,t) = s+it$. Definiamo $\varphi = w \circ f$ e $\phi = \varphi \circ z^{-1}$. Ossia:

$$\begin{tikzcd} f^*\omega \quad \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \mathbb{R}^2 \quad \omega \arrow[d, "w"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

diffeo in coordinate reali
ω in arrivo, $f^*\omega$ in partenza

passaggio in coordinate complesse

f letta in coordinate complesse

Per esempio la funzione z^2 possiamo esprimerla come

$$\phi(z) = z^2 \qquad \varphi(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy \qquad f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy).$$

Lemma 1.9.1. *Se* $\omega = adw + bd\bar{w}$ *allora*

$$f^*\omega = ad\varphi + bd\bar{\varphi} = \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial z} + b\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}}}\right)dz + \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} + b\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right)d\bar{z}.$$

Dimostrazione. Andiamo per gradi e per prima cosa calcoliamo il pull-back della forma dw:

$$f^*(dw)[v] = dw(df[v]) = d(w \circ f)[v] = d\varphi[v]$$

similmente per $d\bar{w}$ si ha:

$$f^*(d\bar{w})[v] = d\bar{w}(df[v]) = d(\overline{w \circ f})[v] = d\bar{\varphi}[v]$$

dunque $f^*dw = d\varphi$ e $f^*d\bar{w} = d\bar{\varphi}$. Si noti che $d\varphi$ e $d\bar{\varphi}$ sono i differenziali di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e dunque vivono in $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$.

Quindi se $\omega = adw + bdw$ si ha

$$f^*\omega = ad\varphi + bd\bar{\varphi}$$

ove se a, b son funzioni allora $(f^*\omega)_{(x,y)} = a(f(x,y))d\varphi + b(f(x,y))d\bar{\varphi}$.

Adesso usiamo che $d = \partial + \bar{\partial}$:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}d\bar{z} \qquad d\bar{\varphi} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}dz + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}}d\bar{z}$$

e dunque

$$\begin{aligned} f^*\omega &= a\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + a\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}d\bar{z} + b\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}dz + b\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}}d\bar{z} \\ &= \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial z} + b\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)dz + \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} + b\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}}\right)d\bar{z}. \\ &= \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial z} + b\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}}\right)dz + \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} + b\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right)d\bar{z}. \end{aligned}$$

□

Fatto 1.9.2. *Se φ è olomorfa, allora ω è di tipo $(1,0)$ se e solo se $f^*\omega$ è di tipo $(1,0)$; ω è di tipo $(0,1)$ se e solo se $f^*\omega$ è di tipo $(0,1)$.*

Viceversa, se f è un diffeomorfismo che preserva il tipo delle forme, allora è olomorfo.

Dimostrazione. Supponiamo φ olomorfa. Allora $\partial\varphi/\partial\bar{z} = 0$, ergo la formula appena trovata per $f^*\omega$ diventa

$$f^*\omega = a\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + b\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}d\bar{z}.$$

Ne segue che $f^*\omega$ è $(1,0)$ se e solo se $b = 0$ se e solo se ω è $(1,0)$. Similmente $f^*\omega$ è $(0,1)$ se e solo se $a = 0$ se e solo se ω è $(0,1)$.

Viceversa, se f preserva il tipo delle forme, in particolare f^*dw sarà una forma $(1,0)$, ma sappiamo che $f^*dw = d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}d\bar{z}$ e dunque $\partial\varphi/\partial\bar{z} = 0$. □

Come corollario immediato abbiamo che se f è olomorfa e $\omega = adz$ allora

$$f^*\omega = a\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = a\frac{d\phi}{dz}dz = a\phi'(z)dz.$$

Un fisico direbbe “Ovvio: se $w = \phi(z)$ allora $dw = \phi'(z)dz$”, e in fondo non ha tutti i torti.

Non si dimentichi che se a è una funzione allora bisogna calcolarla nel punto giusto:

$$f^*\omega = a(\phi(z))\phi'(z)dz.$$

Fatto 1.9.3. *la composizione di funzioni olomorfe è olomorfa.*

Dimostrazione. Se f preserva il tipo delle forme e g pure, allora $f \circ g$ preserva il tipo delle forme, semplicemente perchè $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*(\omega))$. □

Osservazione 1.9.4. Le funzioni f, φ, ϕ sono in sostanza la stessa funzione: f ne è la descrizione in coordinate reali, φ in coordinate reali in partenza e complesse in arrivo, ϕ in coordinate complesse in partenza e in arrivo.

In altre parole dire

$$\phi(z) = z^2 \text{ oppure } \varphi(x,y) = x^2-y^2+2ixy \text{ oppure } f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$$

sono cose sostanzialmente equivalenti. Per cui, anche se abbiamo dato la definizione di funzione olomorfa solo per funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, diciamo che ϕ è olomorfa se e solo se φ è olomorfa; stessa cosa per f. Similmente possiamo parlare di forme olomorfe su $\mathbb{R}^2$ o su $\mathbb{C}$ sottintendendo l'identificazione di $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$.

1.10. $\Omega^{(1,0)}$ **come autospazio.** Applichiamo quanto appena detto al diffeomorfismo $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e alle forme $dz, d\bar{z}$. Siccome J è lineare, esso coincide col suo differenziale, in notazione vettoriale abbiamo

$$J^*(dz) = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i, -1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1, i \end{pmatrix} = idz$$

L'endomorfismo J ha due autovalori $\pm i$ con relativi autospazi: abbiamo appena visto che dz è un autovettore relativo a i. Un calcolo simile mostra che $J^* d\bar{z} = -id\bar{z}$. Ciò è coerente col fatto che $d(iz) = idz$ e $d(\overline{iz}) = -id\bar{z}$.

1.11. **Invarianza della nozione di campo** $(1,0)$ **per biolomorfismi.** La domanda che ci poniamo è: se V è un campo di tipo $(1,0)$ allora il suo push-forward è $(1,0)$? La risposta è quella che vi aspettate. Ma andiamo per gradi.

Come per le forme, mettiamoci in condizione di avere sia le coordinate reali che complesse per non fare confusione. Consideriamo un diffeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Su $\mathbb{R}^2$ mettiamo la struttura complessa standard $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Identifichiamo il primo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ tramite $z(x,y) = x+iy$ e il secondo tramite $w(s,t) = s+it$. Definiamo $\varphi = w \circ f$ e $\phi = \varphi \circ z^{-1}$. Ossia:

$$\begin{tikzcd} V \quad \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \mathbb{R}^2 \quad f_*V \arrow[d, "w"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

diffeo in coordinate reali
V in partenza, f_*V in arrivo

passaggio in coordinate complesse

f letta in coordinate complesse

Lemma 1.11.1. *Se* $V = a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \bar z}$ *allora*

$$\begin{aligned} f_*V &= d\varphi(V)\frac{\partial}{\partial w} + d\bar\varphi(V)\frac{\partial}{\partial \bar w} = V(\varphi)\frac{\partial}{\partial w} + V(\bar\varphi)\frac{\partial}{\partial \bar w} \\ &= \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial z} + b\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z}\right)\frac{\partial}{\partial w} + \left(a\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z}} + b\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar w}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il push-forward f_*V si può scrivere come combinazione di $\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar w}$, ossia esistono A, B per cui

$$f_*V = Df(V) = A\frac{\partial}{\partial w} + B\frac{\partial}{\partial \bar w}.$$

Per calcolare A e B basta calcolare $dw(f_*V)$ e $d\bar w(f_*V)$, esplicitamente

$$A = dw(f_*V) = dw(Df(V)) = D(w \circ f)(V) = d\varphi(V) = V(\varphi)$$

$$B = d\bar w(f_*V) = d\bar w(Df(V)) = D(\overline{w \circ f})(V) = d\bar\varphi(V) = V(\bar\varphi)$$

Quindi

$$f_*V = d\varphi(V)\frac{\partial}{\partial w} + d\bar\varphi(V)\frac{\partial}{\partial \bar w} = V(\varphi)\frac{\partial}{\partial w} + V(\bar\varphi)\frac{\partial}{\partial \bar w}.$$

Se $V = a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \bar z}$ allora

$$d\varphi(V) = V(\varphi) = d\varphi\left(a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \bar z}\right) = a\frac{\partial\varphi}{\partial z} + b\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z}$$

$$d\bar\varphi(V) = V(\bar\varphi) = d\bar\varphi\left(a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \bar z}\right) = a\frac{\partial\bar\varphi}{\partial z} + b\frac{\partial\bar\varphi}{\partial \bar z}$$

ergo

$$\begin{aligned} f_*V &= \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial z} + b\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z}\right)\frac{\partial}{\partial w} + \left(a\frac{\partial\bar\varphi}{\partial z} + b\frac{\partial\bar\varphi}{\partial \bar z}\right)\frac{\partial}{\partial \bar w} \\ &= \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial z} + b\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z}\right)\frac{\partial}{\partial w} + \left(a\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z}} + b\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar w}. \end{aligned}$$

ove se a, b son funzioni, bisogna ricordarsi di calcolare in $f^{-1}(s,t)$, così come tutto il resto. □

Fatto 1.11.2. *Se* φ *è olomorfa, allora* V *è di tipo* $(1,0)$ *se e solo se* f_*V *è di tipo* $(1,0)$*;* V *è di tipo* $(0,1)$ *se e solo se* f_*V *è di tipo* $(0,1)$*.*

Viceversa, se f *è un diffeomorfismo che preserva il tipo dei campi, allora è olomorfo.*

Dimostrazione. Supponiamo φ olomorfa. Allora $\partial\varphi/\partial\bar z = 0$, ergo la formula appena trovata per f_*V diventa

$$f_*V = a\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + b\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial \bar w}.$$

Ne segue che f_*V è $(1,0)$ se e solo se $b = 0$ se e solo se V è $(1,0)$. Similmente f_*V è $(0,1)$ se e solo se $a = 0$ se e solo se V è $(0,1)$.

Viceversa, se f preserva il tipo dei campi, in particolare $f_*\frac{\partial}{\partial z}$ sarà un campo $(1,0)$, ma sappiamo che $f_*\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\varphi)\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial z}(\bar\varphi)\frac{\partial}{\partial \bar w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial \bar\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z}}\frac{\partial}{\partial \bar w}$ e dunque $\partial\varphi/\partial\bar z = 0$. □

Come corollario immediato abbiamo che se φ è olomorfa e se $V = a\frac{\partial}{\partial z}$ allora

$$f_*V = a\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} = a\phi'\frac{\partial}{\partial w}.$$

Non si dimentichi che bisogna calcolare le cose nel punto giusto:

$$\left(f_*(a\frac{\partial}{\partial z})\right)_w = a(\phi^{-1}(w))\phi'(\phi^{-1}(w))\frac{\partial}{\partial w}.$$

La formula

$$f_*(\frac{\partial}{\partial z}) = \phi'\frac{\partial}{\partial w}$$

merita che ne si vedano i calcoli completi anche in coordinate reali. Poniamo $f_1 = \Re(\varphi)$ e $f_2 = \Im(\varphi)$ dunque $\varphi(x,y) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$ e $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

Come al solito

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$Df(\frac{\partial}{\partial z}) = \frac{1}{2}Df\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

se φ è olomorfa, le condizioni si Cauchy-Riemann ci dicono che

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{pmatrix}$$

e dunque se φ è olomorfa

$$\begin{aligned} Df(\frac{\partial}{\partial z}) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - i\frac{\partial f_1}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial w} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} = \phi'\frac{\partial}{\partial w} \end{aligned}$$

1.12. $T^{(1,0)}$ **come autospazio.** Applichiamo quanto appena detto al diffeomorfismo $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e ai campi $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar z}$. Siccome J è lineare, esso coincide col suo differenziale, in notazione vettoriale abbiamo

$$J_*(\frac{\partial}{\partial z}) = \frac{1}{2}J\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = i\frac{\partial}{\partial z}$$

L'endomorfismo J ha due autovalori $\pm i$ con relativi autospazi: abbiamo appena visto che $\frac{\partial}{\partial z}$ è un autovettore relativo a i. Un calcolo simile mostra che $J_* \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

1.13. **Funzioni olomorfe tra superfici di Riemann.** Le superfici di Riemann le consideriamo date attraverso atlanti olomorfi. Cioè una superficie di Riemann M sarà il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M, di carte locali $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ che siano omeomorfismi tra U_α e aperti di $\mathbb{C}$, tali che i cambi di carta $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$ siano olomorfi ove definiti.

Definizione 1.13.1. Una funzione $f : M \to N$ tra superfici di Riemann si dice olomorfa se è olomorfa letta in carte locali. Cioè, se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è un atlante per M e $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ è un atlante di per N, allora f si dice olomorfa se le funzioni

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

sono olomorfe ove definite.

Per esempio, una funzione meromorfa su S non è altro che una funzione olomorfa da S a $\mathbb{CP}^1$.

Mentre di funzioni olomorfe non costanti su superfici compatte non ne possono esistere per il principio del massimo, vale il seguente teorema, che qui non dimostriamo.

Teorema 1.13.2. *Ogni superficie di Riemann ammette funzioni meromorfe non costanti. Cioè per ogni S esiste $f : S \to \mathbb{CP}^1$ olomorfa non costante.*

1.14. **Forme olomorfe e meromorfe su superfici di Riemann.**

Definizione 1.14.1. Sia S una superficie di Riemann, la cui struttura è data da un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ subordinato a un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ con carte locali $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ i cui cambi di carta $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ siano olomorfi. Una 1-forma olomorfa su S è il dato di forme olomorfe ω_α su $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ tali che $\omega_\alpha = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^* \omega_\beta$.

La discussione delle sezioni precedenti ci dice che tale definizione è ben posta, perché i cambi di carta sono olomorfi e dunque preservano il tipo delle forme per pull-back. In oltre la composizione di funzioni olomorfe è olomorfa, dunque se i coefficienti di una forma sono olomorfi letti nella carta U_α allora lo sono anche letti nella carta U_β.

Localmente una forma olomorfa sarà sempre del tipo $f(z)dz$ con f olomorfa.

Similmente si possono definire le forme meromorfe su S: saranno quelle di tipo $(1, 0)$ che localmente si scrivono come $f(z)dz$ con f meromorfa. Ancora, tale definizione è ben posta perché la composizione di una funzione meromorfa con una olomorfa è ancora meromorfa. Si noti che le forme olomorfe sono particolari casi di forme meromorfe.

Osservazione 1.14.2. Se $f : S_1 \to S_2$ è una mappa olomorfa tra superfici di Riemann e ω è una forma su S_2, allora il pull-back $f^*\omega$ è ben definito in carte locali e dunque fornisce una forma su S_1. Se ω è olomorfa/meromorfa, allora anche $f^*\omega$ lo è.

Per i più curiosi: In termini di fibrati, possiamo definire il fibrato cotangente olomorfo di S, denotato con $\Omega^{(1,0)}(S)$, definendolo localmente attraverso le carte locali. Le forme olomorfe saranno, con questa terminologia, le sezioni olomorfe del fibrato olomorfo $\Omega^{(1,0)}(S)$. Una cosa simile si può fare con $\Omega^{(0,1)}$.

Definizione 1.14.3. Sia ω una forma meromorfa su una superficie di Riemann e sia $z_0 \in S$. La molteplicità $m_{z_0}(\omega)$ (detta molteplicità di z_0 se ω è chiara dal contesto) è definita come segue:

$$m_{z_0}(\omega) = n$$

se localmente, in una carta ove $z_0 = 0$, la forma ω si scrive come

$$z^n h(z)dz$$

con h olomorfa e $h(0) \neq 0$.

In sostanza gli zeri di ordine n hanno molteplicità n, i poli di ordine n hanno molteplicità $-n$, i punti che non sono nè zeri nè poli hanno molteplicità 0.

Facciamo degli esempi. Consideriamo la sfera di Riemann $S = \mathbb{CP}^1$. Abbiamo due carte locali a valori in $\mathbb{C}$ con cambio di carta $f(z) = 1/z$.

Consideriamo la forma $\omega = dz$ in una delle due carte. Nell'altra carta avremo che ω si legge come

$$f^*\omega = f^*dz = f'dz = -\frac{1}{z^2}dz$$

Cioè la forma dz che vediamo costante in una carta, precisamente corrispondente al vettore riga $(1, 0)$, nell'altra carta è tutt'altro che costante e, anzi, presenta un bel polo di ordine due. Ergo di molteplicità -2.

Proviamo con $\omega = g(z)dz$ con una g generica. In questo caso avremo

$$f^*\omega = -g(f(z))\frac{1}{z^2}dz = -g(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}dz$$

per esempio, se $\omega = \frac{1}{z}dz$ (cioè $g(z) = 1/z$) allora

$$f^*\omega = -\frac{1}{z}dz.$$

In questo caso sono presenti due poli di ordine 1, cioè molteplicità -1.

Fatto 1.14.4. *Ogni superficie di Riemann S ammette forme meromorfe non nulle.*

Dimostrazione. Per il Teorema 1.13.2 esiste una funzione olomorfa $f : S \to \mathbb{CP}^1$. $\mathbb{CP}^1$ ammette forme meromorfe, per esempio quelle appena viste, e il loro pull-back fornisce forme meromorfe non nulle su S. $\square$

Fatto 1.14.5. *Su $\mathbb{CP}^1$ non esistono forme olomorfe non nulle.*

Dimostrazione. Se $\omega = gdz$ con g olomorfa, allora $f^*\omega$ non può essere olomorfa, infatti se avessimo $f^*\omega = h(z)dz$ con h olomorfa, avremmo $g(1/z) = -h(z)z^2$ olomorfa con espansione di taylor in zero almeno quadratica, cioè $g(1/z) = a_2 z^2 + \dots$ e dunque $g(z) = a_2 \frac{1}{z^2} + \dots$ non sarebbe olomorfa in zero (a meno che tutti i coefficienti non siano nulli, cioè l'unico caso ammesso è $\omega = 0$). $\square$

È l'unico caso, tra poco scopriremo il perché. Facciamo prima un altro esempio, prendiamo per esempio il toro $T^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Chiamiamo $\pi : \mathbb{C} \to T^2$ la proiezione, e definiamo

$$V_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1, 0 < \Im(z) < 1\}$$
$$V_1 = V_0 + \frac{1}{2}, V_2 = V_0 + \frac{i}{2}, V_3 = V_0 + \frac{1+i}{2}.$$

Come carte locali prendiamo $U_i = \pi(V_i)$, per cui avremo $\varphi_i = \pi^{-1}|_{U_i}$.

Consideriamo $\omega = dz$ in V_0. I cambi di carta son traslazioni, quindi olomorfi con derivata 1, il coefficiente di ω è costante e non crea problemi, per cui se φ è un cambio di carta abbiamo

$$\varphi^*\omega = \varphi^* dz = \varphi' dz = dz.$$

Dunque la forma costante $\omega = dz$ definisce una 1-forma olomorfa su T^2.

Fatto 1.14.6. *Su $T^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ esistono solo forme olomorfe costanti.*

Dimostrazione. Usiamo lo stesso atlante di cui sopra. Vediamo come sono fatti nel dettaglio i cambi di carta. $U_0 \cap U_1$ ha due componenti connesse: una è

$$A = \pi(V_0 \cap V_1) = \pi(\{z : \frac{1}{2} < \Re(z) < 1, 0 < \Im(z) < 1\})$$

e l'altra è

$$B = \pi(\{z : 0 < \Re(z) < \frac{1}{2}, 0 < \Im(z) < 1\}).$$

Se un punto $[z]$ sta in $U_1 \cap U_0$, allora $\varphi_1(z)$ e $\varphi_0(z)$ devono essere punti equivalenti nel quoziente per definizione delle φ_i. Se $[z] \in A$ allora il punto di V_0 che è equivalente a $\varphi_1(z)$ è sé stesso dunque su $\varphi_1(A)$ il cambio di carta è

$$\varphi_0 \varphi_1^{-1}(z) = z.$$

Se invece $[z] \in B$, il punto di V_0 equivalente a $\varphi_1(z)$ è $f_1(z) - 1$. Dunque su $\varphi_1(B)$ il cambio di carta è

$$\varphi_0 \varphi_1^{-1}(z) = z - 1.$$

Un calcolo simile vale per gli altri cambi di carta.

Sia ora ω una 1-forma olomorfa su T^2 e siano $g_i : V_i \to \mathbb{C}$ olomorfe tali che nella carta V_i

$$\omega = g_i(z)dz.$$

Per definizione di forma olomorfa su superficie, deve valere che

$$(\varphi_0\varphi_1^{-1})^*(g_0 dz) = g_1 dz.$$

Siccome $(\varphi_0\varphi_1^{-1})' = 1$ su entrambe le componenti connesse, avremo

$$g_1(z)dz = g_0(\varphi_0\varphi_1^{-1}(z))dz$$

e dunque

$$g_1(z) = \begin{cases} g_0(z) & \frac{1}{2} < \Re(z) < 1 \\ g_0(z-1) & 1 < \Re(z) < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Poniamo $W_0 = \{0 < \Re(z) < 3/2\}$ e definiamo $h_0 : W_0 \to \mathbb{C}$ come

$$h_0 = \begin{cases} g_0(z) & 0 < \Re(z) < 1 \\ g_1(z) & \frac{1}{2} < \Re(z) < \frac{3}{2} \end{cases}$$

la funzione h_0 è ben definita, olomorfa e soddisfa $h_0(z+1) = h_0(z)$ per ogni z con $0 < \Re(z) < \frac{1}{2}$. Adesso, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, definiamo $W_m = W_0 + m$ e $h_m : W_m \to \mathbb{C}$ come

$$h_m(z) = h_0(z-m).$$

Le funzioni h_m sono olomorfe e ogni h_m coincide con la successiva su $W_m \cap W_{m+1}$ e dunque si possono incollare a formare una funzione olomorfa h sulla striscia $\{z : 0 < \Im(z) < 1\}$ tale che $h = g_0$ su V_0 e $h(z) = h(z+1)$.

Lo stesso ragionamento, applicato agli altri cambi di carte, ci dice che g_0 si estende ad una funzione olomorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $g = g_0$ su V_0 e

$$g(z + m + ni) = g(z)$$

per ogni $z \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{Z}$.

Dunque g passa al quoziente e definisce una funzione olomorfa $T^2 \to \mathbb{C}$. Essendo T^2 compatto, la funzione g ha un massimo. Per il principio del massimo ne deduciamo che g è costante. Siccome $g = g_0$ su V_0 allora g_0 è una costante c e la forma ω non è altro che

$$\omega = cdz.$$

□

In particolare tutte le forme olomorfe su T^2 sono multiple di dz. Possiamo riassumere gli ultimi due fatti nel seguente enunciato.

Fatto 1.14.7. *L'insieme delle forme olomorfe su $\mathbb{CP}^1$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione zero. L'insieme delle forme olomorfe su $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione* 1.

Osservazione 1.14.8. Qui non lo dimostreremo, ma è un fatto importante che, a parte $\mathbb{CP}^1$, tutte le altre superfici di Riemann ammettono forme olomorfe non nulle.

1.15. **Campi di vettori olomorfi e meromorfi su superfici di Riemann.**

Definizione 1.15.1. Sia S una superficie di Riemann, la cui struttura è data da un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ subordinato a un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ con carte locali $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ i cui cambi di carta $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ siano olomorfi. Un campo di vettori olomorfo su S è il dato di campi olomorfi V_α su $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ tali che $V_\beta = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_* V_\alpha$.

La discussione delle sezioni precedenti ci dice che tale definizione è ben posta, perché i cambi di carta sono olomorfi e dunque preservano il tipo dei campi per push-forward. In oltre la composizione di funzioni olomorfe è olomorfa, dunque se i coefficienti di un campo sono olomorfi letti nella carta U_α allora lo sono anche letti nella carta U_β.

Similmente si possono definire campi meromorfi. Localmente un campo olomorfo (meromorfo) sarà sempre del tipo

$$f(z)\frac{\partial}{\partial z}$$

con f olomorfa (meromorfa).

Definizione 1.15.2. Sia V un campo meromorfo su una superficie di Riemann e sia $z_0 \in S$. La molteplicità $m_{z_0}(V)$ (o molteplicità di z_0 se V è chiaro dal contesto) è definita come segue:

$$m_{z_0}(V) = n$$

se localmente, in una carta ove $z_0 = 0$, il campo V si scrive come

$$z^n h(z)\frac{\partial}{\partial z}$$

con h olomorfa e $h(0) \neq 0$.

In sostanza gli zeri di ordine n hanno molteplicità n, i poli di ordine n hanno molteplicità $-n$, i punti che non sono nè zeri nè poli hanno molteplicità 0.

Facciamo degli esempi. Consideriamo la sfera di Riemann $S = \mathbb{CP}^1$. Abbiamo due carte locali a valori in $\mathbb{C}$ con cambio di carta $f(z) = 1/z$.

Consideriamo il campo $V = \frac{\partial}{\partial z}$ in una delle due carte. Nell'altra carta avremo che V si legge come

$$f_*V = f_*\frac{\partial}{\partial z} = f'(f^{-1}(z))\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{(1/z)^2}\frac{\partial}{\partial z} = -z^2\frac{\partial}{\partial z}$$

Cioè il campo $\frac{\partial}{\partial z}$ che vediamo costante in una carta, precisamente corrispondente al vettore riga $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, nell'altra carta è tutt'altro che costante e, anzi, presenta un bello zero di ordine due, la cui molteplicità è 2. Si noti che $2 = \chi(\mathbb{CP}^1)$.

Proviamo il caso generale $V = g(z)\frac{\partial}{\partial z}$ con una g generica. In questo caso avremo

$$f_* = -g(1/z)\frac{1}{(1/z)^2}\frac{\partial}{\partial z} = -g(1/z)z^2\frac{\partial}{\partial z}$$

per esempio, se $V = z\frac{\partial}{\partial z}$ (cioè $g(z) = z$) allora

$$f_*V = -z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Dunque V ha due zeri di ordine 1, molteplicità 1 ognuno, la cui somma si noti che fa $2 = \chi(\mathbb{CP}^1)$.

Se pensiamo questi campi come campi reali e consideriamo $\mathbb{R}^2 \subseteq S^2$, stiamo dicendo che il campo costante orizzontale su $\mathbb{R}^2$ si estende all'infinito con uno zero di indice 2, mentre il campo radiale uscente da zero si estende all'infinito a un campo radiale entrante (quindi ha due zeri di indice 1, come è giusto che sia). Questo punto di vista sarà formalizzato nella prossima sezione.

Facciamo un esempio meromorfo. Sempre su $\mathbb{CP}^1$ supponiamo che V sia un campo che in una carta si scrive come $V = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z} = z^{-1}\frac{\partial}{\partial z}$. Dunque V ha un polo di ordine 1, che dunque ha molteplicità -1. Nell'altra carta V si legge come

$$f_*V = f_*\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{1/z} - \frac{1}{(1/z)^2}\frac{\partial}{\partial z} = -z^3\frac{\partial}{\partial z}$$

e presenta dunque uno zero di ordine 3 (molteplicità 3). Si noti che $3 - 1 = 2 = \chi(\mathbb{CP}^1)$.

Fatto 1.15.3. *Se V è un campo olomorfo su $\mathbb{CP}^1$ che in una carta si legge come $g(z)\frac{\partial}{\partial z}$ con g olomorfa, allora g è un polinomio di grado al più 2.*

Dimostrazione. Dal conto appena fatto risulta che nell'altra carta V si legge come

$$-g(1/z)z^2\frac{\partial}{\partial z}$$

e affinché $gz^2(1/z)$ sia olomorfa, occorre che lo sviluppo di taylor di g non abbia termini di grado maggiore di due. $\square$

Facciamo un altro esempio su una superficie diversa. Consideriamo $T^2 = \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Esso ammette un atlante ove i cambi di carte φ son traslazioni, ergo con differenziale 1, per cui il campo costante $\frac{\partial}{\partial z}$ si legge $\frac{\partial}{\partial z}$ in ogni carta:

$$\varphi_*V = \varphi'\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Fatto 1.15.4. *I campi olomorfi su $T^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ sono solo i campi costanti.*

Dimostrazione. Sia V un campo olomorfo su T^2 e sia $\omega = dz$ (che abbiamo visto essere ben definita su T^2). Allora $\omega(V) : T^2 \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa. Siccome T^2 è compatto essa ha un massimo e per il principio del massimo allora è costante. Ma in carte locali se $V = a(z)\frac{\partial}{\partial z}$ si ha $\omega(V) = dz(a\frac{\partial}{\partial z}) = a(z)$ dunque la funzione $a(z) = \omega(V)$ è costante in ogni carta, ergo globalmente costante e V risulta essere un multiplo costante di $\frac{\partial}{\partial z}$. □

1.16. **Indici di zeri e poli di campi di vettori olomorfi e meromorfi.** Sia S una superficie di Riemann e sia V un campo complesso su S.

Il campo V definisce un campo vettoriale reale

$$R(V) = V + \bar{V}.$$

Anche se a prima vista uno vorrebbe dire che $R(V)$ è la parte reale di V, bisogna stare un po' attenti.

Fatto 1.16.1. *$R(V)$ è un campo reale. Più precisamente, se*

$$V = \alpha\frac{\partial}{\partial z} + \beta\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \text{ allora } R(V) = (\Re(\alpha) + \Re(\beta))\frac{\partial}{\partial x} + (\Im(\alpha) - \Im(\beta))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dimostrazione.

$$R(V) = V + \bar{V} = \alpha\frac{\partial}{\partial z} + \beta\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \bar{\beta}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha\frac{\partial}{\partial y} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + i\beta\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial x} + i\bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\beta}\frac{\partial}{\partial x} - i\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha} + \beta + \bar{\beta})\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(-i\alpha + i\beta + i\bar{\alpha} - i\bar{\beta})\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= (\Re(\alpha) + \Re(\beta))\frac{\partial}{\partial x} + (\Im(\alpha) - \Im(\beta))\frac{\partial}{\partial y}$$

□

Corollario 1.16.2. *Se $V = g(z)\frac{\partial}{\partial z}$ allora $R(V) = \Re(g)\frac{\partial}{\partial x} + \Im(g)\frac{\partial}{\partial y}$.*

Dimostrazione. Basta usare la formula precedente con $\alpha = g$ e $\beta = 0$. □

In altre parole se V è di tipo $(1,0)$ allora "$R(V)$ è **il coefficiente** g **di** V **visto come campo reale**". Cioè

$$\text{se } V = (a+ib)\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{allora } R(V) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}.$$

Possiamo dire che $R(V)$ è la realizzazione di V come campo reale.

Osservazione 1.16.3. Gli zeri di V e $R(V)$ sono gli stessi.

Definizione 1.16.4. Sia V un campo di vettori complesso di tipo $(1,0)$ e sia z uno zero isolato di V: Allora il suo indice è definito come l'indice di z come zero del campo reale $R(V)$.

Vediamo che tutto è ben definito per cambi di coordinate olomorfi. Come detto, interpretiamo la funzione g come un campo reale e supponiamo che z sia uno zero non degenere.

Se φ è un cambio di carta olomorfo allora

$$\varphi_* V = \varphi'(\varphi^{-1}(z))g(\varphi^{-1}(z))\frac{\partial}{\partial z}$$

- La moltiplicazione per $\varphi'(\varphi^{-1}(z))$ è un diffeomorfismo che preserva l'orientazione e dunque non cambia l'indice.
- L'indice di $g(\varphi^{-1}(z))$ lo possiamo calcolare in coordinate reali calcolando il segno del determinante di $D(g \circ \varphi^{-1}) = Dg \circ D(\varphi^{-1})$. Ma siccome φ^{-1} è olomorfa $D(\varphi^{-1})$ preserva l'orientazione e dunque in coordinate reali $D(\varphi^{-1})$ ha segno positivo.

Come al solito, se lo zero è degenere possiamo perturbare il campo in modo da avere solo zeri non degeneri. L'indice sarà il grado della mappa $R(V)/||R(V)||$ e dunque la somma degli indici degli zeri non degeneri sarà uguale all'indice dello zero degenere.

Osservazione 1.16.5. Se $V = z^n \frac{\partial}{\partial z}$ allora l'indice dello zero è esattamente n in quanto il grado della mappa $z \to z^n$ su S^1 è proprio n.

Fatto 1.16.6. *Se $V = g\frac{\partial}{\partial z}$ con g è olomorfa e avente uno zero di ordine n allora l'indice di tale zero è n.*

Dimostrazione. A meno di traslazioni possiamo supporre che lo zero sia il punto 0. Localmente $g(z) = z^n h(z)$ con $h(0) \neq 0$ dunque h è omotopa a $h(0)$ e $g(z)$ a $z^n h(0)$. La moltiplicazione per un numero complesso non cambia l'indice, ergo l'indice dello zero di g coincide con l'indice di z^n che è n. □

Corollario 1.16.7. *L'indice di uno zero di un campo olomorfo (o meromorfo) è sempre positivo.*

Dimostrazione. Immediato perchè $n \geq 0$. □

Corollario 1.16.8. *Le uniche superfici di Riemann ad ammettere campi olomorfi non nulli sono $\mathbb{CP}^1$ oppure tori.*

Dimostrazione. Sia V un campo olomorfo su S. Allora $R(V) = V + \bar{V}$ è un campo reale globalmente definito. Per il teorema di Poincaré-Hopf, la somma degli indici degli zeri di V deve coincidere con la caratteristica di S, che dunque risulta non negativa. Se il campo non ha zeri allora $\chi(S) = 0$ e S è un toro, altrimenti $\chi(S) = 2$ e $S = \mathbb{CP}^1$. □

Fatto 1.16.9. *Sia S una superficie di Riemann di genere 1 e sia V un campo olomorfo non nullo su S. Allora ogni altro campo è del tipo cV con $c \in \mathbb{C}$. In altre parole i campi su S sono solo i campi costanti.*

Dimostrazione. Sia ω una forma olomorfa non nulla su S (che esiste sempre, vedasi l'Osservazione 1.14.8). Allora la funzione olomorfa $\omega(V)$ è una costante $c_0 \neq 0$. Se V_1 è un altro campo, la funzione $\omega(V_1)$ è una costante c_1. Dunque se in carte locali $V = f\frac{\partial}{\partial z}$ allora da $\omega(V) = c_0$ e $\omega(V_1) = c_1$ deduciamo che $V_1 = \frac{c_1}{c_0} f \frac{\partial}{\partial z}$, dunque $V_1 = cV$ con $c = c_1/c_0$. □

Corollario 1.16.10. *L'unica superficie di Riemann ad ammettere campi olomorfi non costanti è $\mathbb{CP}^1$.*

Dimostrazione. Immediata dai due risultati precedenti. □

Il Fatto 1.15.3 può essere interpretato dal seguente punto di vista: se V è un campo olomorfo su $\mathbb{CP}^1$ allora, siccome $\chi(\mathbb{CP}^1) = 2$, esso avrà solo ed esattamente due zeri (contati con la loro molteplicità) quindi in una carta locale non può avere grado più che 2.

La nozione di indice può essere estesa anche ai poli di campi meromorfi. Abbiamo visto che negli zeri l'indice coincide alla molteplicità. Sarà lo stesso nei poli. Vediamolo in dettaglio.

Definizione 1.16.11. Sia V un campo di tipo $(1, 0)$, dunque localmente

$$V = g(z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Diciamo che il coefficiente di V è localmente meromorfo (risp. localmente antimeromorfo) in z_0 se localmente g (risp. $\bar{g}$) è meromorfa con un polo in z_0.

Definizione 1.16.12. Sia V un campo di vettori $(1, 0)$ con coefficiente localmente meromorfo o antimeromorfo in z_0. Allora l'indice del polo z_0 è definito come il grado della mappa $R(V)/||R(V)||$ calcolato su un cerchio centrato in z_0.

Osservazione 1.16.13. Se U è un campo reale e f è una funzione reale positiva, allora il grado della mappa $U/||U||$ è lo stesso di quello della mappa $fU/||fU||$ perchè, siccome $f > 0$, essa si semplifica nella frazione. In altre parole, quello che conta per calcolare gli indici dei campi son solo le linee di flusso, non il modulo, e si può usare sia U che fU ottenendo lo stesso risultato.

In particolare:

Lemma 1.16.14. *Sia*

$$V = g\frac{\partial}{\partial z}$$

un campo $(1,0)$ *con coefficiente localmente meromorfo o antimeromorfo con un polo in* z_0*. Allora il campo* $(1,0)$ *definito da*

$$W = \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial}{\partial z}$$

ha uno zero in z_0 *e l'indice di* z_0 *come polo di* V *coincide con l'indice di* z_0 *come zero di* W*.*

Dimostrazione. Supponiamo il coefficiente di V localmente meromorfo, cioè g meromorfa. Nel caso antimeromorfo, cioè se fosse $\bar{g}$ a essere meromorfa, la dimostrazione è del tutto analoga. Se g ha un polo di ordine n in z_0 allora

$$g(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} h(z)$$

con h olomorfa e $h(z_0) \neq 0$. Dunque

$$\frac{1}{\bar{g}} = \frac{\overline{(z - z_0)}^n}{\bar{h}(z)}$$

e siccome $h(z_0) \neq 0$ allora W ha uno zero in z_0.

Si noti che $1/\bar{g} = g/|g|^2$ dunque

$$R(W) = \frac{R(V)}{||R(V)||^2}$$

quindi $R(W) = fR(V)$ con $f = 1/||R(V)||^2$ che dunque è una funzione positiva fuori dal polo. Ergo, per l'osservazione precedente, il grado della mappa $R(V)/||R(V)||$ coincide con quello dalla mappa $R(W)/||R(W)||$.

Per definizione il grado della mappa $R(W)/||R(W)||$ è l'indice dello zero del campo reale $R(W)$, cioè l'indice dello zero del campo complesso W.

Sempre per definizione, il grado della mappa $R(V)/||R(V)||$ è l'indice del polo di V, che dunque coincide con l'indice dello zero di W. □

Corollario 1.16.15. *L'indice di un polo di un campo con coefficiente localmente meromorfo o antimeromorfo non dipende dal sistema di coordinate olomorfe scelto.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che l'indice di uno zero di un campo $(1,0)$ non dipende dalle coordinate olomorfe scelte. Siccome abbiamo descritto l'indice di un polo attraverso l'indice dello zero del campo $\frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, esso non dipende dalle coordinate olomorfe scelte. □

Fatto 1.16.16. *L'indice del polo di* $1/z^n$ *è* $-n$*.*

Dimostrazione. Tale indice coincide con l'indice dello zero di $\bar{z}^n$ che è $-n$. □

Fatto 1.16.17. *L'indice del polo di* $1/\bar{z}^n$ *è* n*.*

Dimostrazione. Tale indice coincide con l'indice dello zero di z^n che è n. □

Fatto 1.16.18. *Se V è un campo meromorfo con un polo di ordine n allora l'indice di quel polo è $-n$.*

Dimostrazione. Tutto è locale e possiamo supporre che $V = g(z)\frac{\partial}{\partial z}$ con g avente un polo di ordine n in 0. Allora $z^n g(z) = h(z)$ con h olomorfa e $h(0) \neq 0$. Dunque fuori da zero $z^n g(z)$ è omotopa a 1 e g a $1/z^n$. Ne segue che il grado di g su un cerchio intorno al polo è lo stesso del grado di $1/z^n$ che è $-n$. □

Dunque anche nei poli l'indice coincide con la molteplicità.

Teorema 1.16.19. *Sia V un campo di vettori meromorfo su una superficie di Riemann S. Allora*

$$\sum m_z(V) = \chi(S)$$

Dimostrazione. L'idea è questa: Il campo $R(V) = V + \bar{V}$ è definito globalmente fuori dai poli. Vicino ai poli possiamo raccordarlo a un campo con degli zeri senza cambiarne le linee di flusso usando $R(V)/||R(V)||^2$ come nel Lemma 1.16.14. Tale nuovo campo avrà zeri di indice m_z negli zeri di V e zeri di indice m_z ove V presentava poli. Il teorema di Poinceré-Hopf conclude. Vediamo i dettagli.

Siano $p_1, \ldots, p_k$ i poli di V. Per ogni polo scegliamo un intorno U_i di p_i in modo che tali intorni siano a due a due disgiunti e interamente contenuti ognuno in una carta locale per S a valori in $\mathbb{C}$. Per ognuno degli U_i facciamo la seguente operazione. Sia U uno degli aperti $\{U_i\}$. meno di restringere U e di cambiare coordinate possiamo supporre che l'immagine di U sia $\{|z| < 1\}$ e il polo sia in 0. In tale carta V si legge come $g\frac{\partial}{\partial z}$ con $g = z^{-n}h(z)$ con $h(0) \neq 0$. Sia M il massimo di $|g|^2$ su $\{1/2 \leq |z| < 1\}$. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione liscia, pari, monotona decrescente su $\{x > 0\}$ e tale che

$$\begin{cases} f(x) = 1 & |x| \leq M \\ f(x) = 1/x & |x| > 2M \end{cases}$$

Il campo $W = R(V)f(||R(V)||^2)$ ha la seguente proprietà

$$W(z) = \begin{cases} R(V) & |z| > 1/2 \text{ ergo si raccorda a } R(V) \text{ fuori da } U \\ \frac{R(V)}{||R(V)||^2} & \text{vicino al polo} \end{cases}$$

Replichiamo questa costruzione su ogni U_i. Il campo W così ottenuto è un campo reale definito globalmente su tutta S, che coincide con V vicino agli zeri di V e vicino ai poli è lo stesso del Lemma 1.16.14 e presenta quindi zeri con gli stessi indici dei poli di V.

Possiamo quindi applicare il teorema di Poincarè-Hopf a W e abbiamo quindi

$$\sum_z i_z(V) = \sum_z i_z(W) = \chi(S).$$

□

1.17. **Indice di zeri e poli di forme olomorfe e meromorfe.** Sia S una superficie di Riemann e sia ω una 1-forma a valori in $\mathbb{C}$ su S. Si definisce la forma
$$R(\omega) = \frac{\omega + \bar{\omega}}{2}.$$

Fatto 1.17.1. *$R(\omega)$ è una forma reale. Se $\omega = \alpha dz + \beta d\bar{z}$ allora*
$$R(\omega) = \Re(\alpha + \beta)dx - \Im(\alpha - \beta)dy$$

Dimostrazione.
$$R(\omega) = \frac{\omega + \bar{\omega}}{2} = \frac{\alpha dz + \beta d\bar{z} + \bar{\alpha} d\bar{z} + \bar{\beta} dz}{2}$$
$$= \frac{\alpha dx + \alpha i dy + \beta dx - i\beta dy + \bar{\alpha} dx - i\bar{\alpha} dy + \bar{\beta} dx + i\bar{\beta} dy}{2}$$
$$= \frac{(\alpha + \beta + \bar{\alpha} + \bar{\beta})dx + i(\alpha - \beta - \bar{\alpha} + \bar{\beta})dy}{2}$$
$$\Re(\alpha + \beta)dx - \Im(\alpha - \beta)dy$$

□

Corollario 1.17.2. *Se $\omega = g(z)dz$ allora $R(\omega) = \Re(g)dx - \Im(g)dy$.*

Dimostrazione. Basta usare la formula precedente con $\alpha = g$ e $\beta = 0$. □

In altre parole se ω è di tipo $(1, 0)$ allora "$R(\omega)$ è il **coniugato** del coefficiente g di ω visto come forma reale". Cioè
$$\text{se } \omega = (a + ib)dz \quad \text{allora } R(\omega) = adx - bdy.$$

Osservazione 1.17.3. Se ω è meromorfa, allora $R(\omega)$ ha zeri dove li ha ω e singolarità di tipo $1/\bar{z}^n$ dove ω ha poli.

Siccome il nostro scopo è ottenere un analogo del Teorema 1.16.19 per le forme, e abbiamo a disposizione solo il teorema di Poincarè-Hopf sui campi, dobbiamo trovare un modo di passare da forme a campi.

Sia S una superficie di Riemann, sia ω una 1-forma differenziabile reale su S. Localmente $\omega = adx + bdy$ ove (a, b) può essere interpretato come un campo di vettori V_ω. Più precisamente se usiamo la notazione di vettore riga per ω e quella di vettore colonna per V_ω, abbiamo $V_\omega = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Cioè $V_\omega = a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial y}$.

Osservazione 1.17.4. Se $\omega = g(z)dz$ allora $V_{R(\omega)} = R(\bar{g}\frac{\partial}{\partial z})$. Quindi $V_{R(\omega)}$ rappresenta il **coniugato** del coefficiente di ω come campo reale:
$$\text{se } \omega = (a + ib)dz \quad \text{allora } V_{R(\omega)} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y}.$$

Infelicemente se definiamo V_ω con questa formula su ogni carta locale, esso non definisce un campo su S perchè non soddisfa le condizioni di compatibilità sui cambi di carta (i coefficienti dei campi e quelli delle forme cambiano in modo diverso). Fortunatamente possiamo porre rimedio a questo inconveniente.

Lemma 1.17.5. *Sia S una superficie e siano $p_1, \ldots, p_k$ punti di S. Siano U_i intorni aperti ognuno contenente p_i, disgiunti a due a due e ognuno interamente contenuto in una carta locale di un atlante di S. Allora possiamo scegliere un prodotto scalare $\langle , \rangle_p$ punto per punto su T_pS, in modo C^∞ e tale che nelle carte U_i esso sia il prodotto scalare standard.*

Dimostrazione. Diamo qui solo l'idea della dimostrazione (che quindi non sarà programma d'esame). Si osserva che l'insieme delle forme bilineari simmetriche definite positive è un convesso: la combinazione convessa di prodotti scalari è un prodotto scalare. A questo punto si definiscono prodotti scalari sulle varie carte locali avendo cura di mettere il prodotto scalare standard sugli U_i e si raccorda tutto attraverso partizioni dell'unità. □

Armati di questo lemma possiamo dimostrare il seguente

Lemma 1.17.6. *Sia ω una forma meromorfa su S e consideriamo la forma reale $R(\omega)$. Siano $p_1, \ldots, p_k$ i poli/zeri di ω. Siano scelte carte locali per S su aperti U_i tali che $p_i \in U_i$ e gli U_i siano a due a due disgiunti. Siano $a_i, -b_i$ i coefficienti di $R(\omega)$ negli U_i, cioè $R(\omega) = a_i dx - b_i dy$. Siano*

$$V_i = a_i \frac{\partial}{\partial z} - b_i \frac{\partial}{\partial y}$$

campi definiti su U_i. Allora esiste un campo reale $V_{R(\omega)}$ globalmente definito su S meno i poli di ω, tale che in ogni U_i si abbia

$$V_{R(\omega)} = V_i$$

e che non abbia altri zeri se non quelli di ω.

Dimostrazione. Sia $\langle , \rangle_p$ la famiglia di prodotti scalari del lemma precedente. Il campo V_ω è definito attraverso l'equazione

$$\langle V_{R(\omega)}, Y \rangle_p = R(\omega)_p(Y_p) \quad \text{per ogni campo } Y.$$

In coordinate ortonormali se $R(\omega) = adx - bdy$ allora $V_{R(\omega)}$ è proprio $a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y}$. □

Definizione 1.17.7. Sia ω una forma meromorfa. L'indice di un polo/zero di ω è definito come l'indice del corrispondente zero/polo di $V_{R(\omega)}$.

In termini di coefficienti, l'indice di $g(z)dz$ corrisponde all'indice di $\bar{g}$ come campo reale perchè $V_{R(\omega)} = R(\bar{g}\frac{\partial}{\partial z})$.

Il campo $V_{R(\omega)}$ dipende dalle scelte fatte, ma gli indici no. Infatti se abbiamo un cambio di coordinate olomorfo ϕ allora

$$\phi^*(g(z)dz) = g(\phi(z))\phi'(z)dz.$$

Dunque il coefficiente $\bar{g}$ diventa

$$\overline{g(\phi(z))\phi'(z)}$$

ϕ e ϕ' sono olomorfi quindi preservano l'orientazione e dunque isotopi all'identità e dunque l'indice di $\bar{g}$ e quello di $\overline{g(\phi(z))\phi'(z)}$ coincidono.

Fatto 1.17.8. *Sia ω una forma meromorfa. Gli indici degli zeri/poli sono l'opposto delle loro moteplicità.*

Dimostrazione. Localmente $\omega = g(z)dz$ e l'indice di uno zero polo di $g(z)dz$ è per definizione l'indice di $V_{R(\omega)} = R(\bar{g}\frac{\partial}{\partial z})$. Quindi come campi reali l'indice di ω è l'indice di $\bar{g}$. Se g ha un comportamento locale del tipo z^n, allora $\bar{g}$ ha un comportamento come $\bar{z}^n$ che ha indice $-n$. Cioè l'opposto della molteplicità. $\square$

Il seguente fatto è dunque un immediato corollario del Teorema 1.16.19

Teorema 1.17.9. *l Sia ω una forma meromorfa su una superficie di Riemann S. Allora*

$$\sum m_z(\omega) = -\chi(S) = 2g - 2$$

Osserviamo che la molteplicità m_z di uno zero è sempre per definizione un numero positivo (per cui l'indice è sempre negativo).

Come primo corollario ritroviamo il fatto che $\mathbb{CP}^1$ non ha forme olomorfe:

Corollario 1.17.10. *Se S ha genere 0 allora non ammette forme olomorfe non banali.*

Abbiamo anche una generalizzazione di quello che avevamo fatto sul toro $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$:

Corollario 1.17.11. *Se S ha genere 1 allora ogni forma olomorfa non banale su S è senza zeri; viceversa se S ammette una forma olomorfa mai nulla, allora ha genere 1.*

Come abbiamo visto, le forme olomorfe su S sono un modulo sull'anello delle funzioni olomorfe. Ma per il principio del massimo, se S è compatta le uniche funzioni olomorfe sono le costanti, ergo tale modulo è effettivamente uno spazio vettoriale complesso. Vale il seguente fatto generale (che qui non dimostriamo).

Teorema 1.17.12. *Se S è una superficie di Riemann di genere g allora le forme olomorfe su S formano uno spazio vettoriale complesso di dimensione g.*

1.18. **La formula di Riemann-Hurwiz.** Ricordiamo che ogni superficie di Riemann S ammette forme meromorfe non nulle (Fatto 1.14.4).

Una funzione olomorfa non costante ha zeri isolati. Supponiamo che f sia una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$. Allora vicino a zero 0, localmente f avrà un'espressione del tipo

$$f(z) = z^k g(z) \qquad g(0) \neq 0$$

per un certo $k \in \mathbb{N}$. Se guardiamo solo un intorno di 0, f avrà grado k perché $z^k = c$ ha k radici distinte per $c \neq 0$. Mentre $z^k = 0$ ha solo una radice, dunque 0 è un valore critico e $f^{-1}(0) = 0$. Se ci focalizziamo sui valori in $[0, 1) \subset \mathbb{C}$ vediamo che $f^{-1}([0, 1))$ ha la forma di una stella con k rami. A parte in 0, f è localmente un rivestimento. Diciamo quindi che f è localmente un rivestimento ramificato di grado k. Se f fosse un rivestimento, $f^{-1}([0, 1))$ sarebbe un solo ramo. Dunque ci sono $k - 1$ rami extra. Ciò giustifica euristicamente la seguente definizione.

Definizione 1.18.1. Sia f una funzione olomorfa non costante. Se vicino a un punto z_0, localmente f ha un'espressione del tipo

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^k g(z) \qquad g(z_0) \neq 0$$

diremo che l'indice di ramificazione di f nel punto z_0 è $k - 1$. Tale numero lo indicheremo con $\mathrm{ram}_f(z_0)$ o semplicemente $\mathrm{ram}(z_0)$ se la f è sottintesa.[1]

Per esempio $f(z) = z^3$ ha indice di ramificazione 2 in zero. Si noti che per come lo abbiamo definito, se z_0 è un punto regolare di f, allora $\mathrm{ram}(z_0) = 0$. Per esempio $f(z) = (z^2 + 1)(z - i) = (z + i)(z - i)^2$ ha indice di ramificazione 1 in i e 0 in $-i$, ma anche indice zero in ogni $z \neq i$.

Si noti che una funzione meromorfa f su S, vista come funzione $f : S \to \mathbb{CP}^1$ nei poli ha indice di ramificazione $k - 1$ ove k è l'ordine del polo. Per esempio $f(z) = 1/z^2$ ha indice di ramificazione 1 in zero, la funzione $f(z) = 1/z$ ha indice di ramificazione zero ovunque perchè come funzione in $\mathbb{CP}^1$ ha solo valori regolari.

Lemma 1.18.2. *Il grado di una funzione olomorfa coincide col numero delle preimmagini dei valori regolari.*

Dimostrazione. Le funzioni olomorfe preservano sempre l'orientazione, dunque il segno che dovrebbe comparire quando si calcola il grado è sempre positivo. □

Teorema 1.18.3 (Formula di Riemann-Hurwiz)**.** *Siano S, S_0 due superficie di Riemann e sia $f : S \to S_0$ una funzione olomorfa. Allora*

$$\chi(S) = \deg(f)\chi(S_0) - \sum_{z \in S} \mathrm{ram}(z).$$

[1]Spesso l'indice di ramificazione è definito come k, non come $k - 1$ come abbiam fanno noi. Per cui può darsi che vediate la formula di Riemann-Hurwiz scritta con un $\mathrm{ram}(z) - 1$.

Dimostrazione. L'idea è quella di usare il Teorema 1.17.9. Sia ω una forma meromorfa non nulla su S_0, che esiste per il Fatto 1.14.4 e sia $\alpha = f^*\omega$.

Dobbiamo calcolare le molteplicità degli zeri/poli di α. Dobbiamo fare i conti con attenzione. Nei valori regolari infatti i poli e gli zeri di ω si replicano $\deg(f)$ volte con le stesse molteplicità, nei punti di ramificazione però le cose cambiano. Vediamo i dettagli.

Sia p un punto di S_0 e sia m_p la sua molteplicità come polo/zero di ω (ove $m_p = 0$ nei punti che non sono nè zeri nè poli). Per ogni $q \in S$ tale che $f(q) = p$, possiamo scegliere carte locali in modo che sia p che q corrispondano a zero e f si legga come $f(z) \to z^{k_q}$ per un certo intero $k_q \geq 1$. Dunque

$$\mathrm{ram}(q) = k_q - 1.$$

Si noti che se q è un punto regolare allora $k_q = 1$. Si noti anche che vale

$$\sum_{q \in f^{-1}(p)} k_q = \deg(f).$$

In tali carte, ω si legge come $\omega = h(z)dz$, con $h(z) = z^{m_p} g(z)$ e $g(0) \neq 0$. Il pull-back di ω è dunque

$$f^*(\omega) = h(f(z))f'dz = h(z^{k_q})k_q z^{k_q - 1} = k_q z^{m_p k_q + k_q - 1} g(z^{k_q})dz$$

che ha quindi in q uno zero/polo di molteplicità

$$m_p k_q + k_q - 1 = m_p k_q + \mathrm{ram}(q)$$

Facendo la somma si ottiene

$$\begin{aligned}
\chi(S) &= -\sum_p \left(\sum_{q \in f^{-1}(p)} m_p k_q + \mathrm{ram}(q) \right) \\
&= -\sum_p m_p \sum_{q \in f^{-1}(p)} k_q - \sum_p \sum_{q \in f^{-1}(p)} \mathrm{ram}(q) \\
&= -\sum_p m_p \deg(f) - \sum_{z \in S} \mathrm{ram}(z) \\
&= -\deg(f) \sum_p m_p - \sum_{z \in S} \mathrm{ram}(z) \\
&= \deg(f)\chi(S_0) - \sum_{z \in S} \mathrm{ram}(z)
\end{aligned}$$

□

Osservazione 1.18.4. La formula di Riemann-Hurwiz si può enunciare e dimostrare senza parlare di robe olomorfe. Se $f : S \to S_0$ è un rivestimento ramificato di grado d tra due superfici, allora possiamo costruire una triangolazione di S_0 in modo tale che le immagini dei punti di ramificazione siano un sottoinsieme dei vertici. Si solleva tale triangolazione a S e si fa il conto $V - L + T$: tutto è replicato d volte tranne nei punti di ramificazione dove il difetto è proprio la somma degli indici di ramificazione. La formula segue immediatamente.

Corollario 1.18.5. *Se esiste una funzione olomorfa $f : S \to S_0$ allora $\chi(S) \leq \chi(S_0)$.*

Dimostrazione. Se $\chi(S_0) = 2$ è tautologico perchè $\chi(S) \leq 2$ sempre. Se $\chi(S_0) \leq 0$ allora, siccome $\deg(f) \geq 0$, $\deg(f)\chi(S_0) \leq \chi(S_0)$ e dunque $\chi(S) = \deg(f)\chi(S_0) - \sum \mathrm{ram}(z) \leq \deg(f)\chi(S_0) \leq \chi(S_0)$. □

1.19. **Curve in $\mathbb{CP}^2$: Preliminari sul proiettivo e i suoi polinomi.** Qui la parola *curva* significa "varietà complessa di dimensione 1" quindi di fatto si sta parlando di una superficie di Riemann.

Consideriamo $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3) = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$. I punti di $\mathbb{CP}^2$ saranno quindi classi di equivalenza di triple, che denoteremo con $[X_0, X_1, X_2]$ (note anche come coordinate omogenee). $\mathbb{CP}^2$ ha un atlante di varietà complessa con carte locali a valori in $\mathbb{C}^2$. Nella fattispecie possiamo considerare le tre carte

$$U_0 = \{X_0 \neq 0\} \qquad \varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}^2 \quad \varphi_0[X_0, X_1, X_2] = (\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0})$$

$$U_1 = \{X_1 \neq 0\} \qquad \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}^2 \quad \varphi_1[X_0, X_1, X_2] = (\frac{X_0}{X_1}, \frac{X_2}{X_1})$$

$$U_2 = \{X_2 \neq 0\} \qquad \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C}^2 \quad \varphi_2[X_0, X_1, X_2] = (\frac{X_0}{X_2}, \frac{X_1}{X_2})$$

U_0, U_1, U_2 ricoprono $\mathbb{CP}^2$ perchè le tre coordinate non possono annullarsi simultaneamente e le φ_i sono invertibili con inverse esplicite

$$\varphi_0^{-1}(x_1, x_2) = [1, x_1, x_2], \varphi_1^{-1}(x_0, x_2) = [x_0, 1, x_2], \varphi_2^{-1}(x_0, x_1) = [x_0, x_1, 1]$$

e i cambi di carta sulle intersezioni sono

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x_1, x_2) = (1/x_1, x_2/x_1)$$
$$\varphi_2 \circ \varphi_0^{-1}(x_1, x_2) = (1/x_2, x_1/x_2)$$
$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x_0, x_2) = (x_0/x_2, 1/x_2).$$

Le carte locali U_i hanno sezioni standard corrispondenti agli iperpiani $V_i = \{X_i = 1\}$.

Osservazione 1.19.1. Se consideriamo una carta U_i identificandola con $\mathbb{C}^2$ tramite φ_i, otteniamo che $\mathbb{CP}^2$ è formato dall'unione di $\mathbb{C}^2$ e la retta proiettiva all'infinito corrispondente al proiettivizzato di $\{X_i = 0\}$ (che risulta essere una copia di $\mathbb{CP}^1$). Per cui scriveremo

$$\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}^1_\infty.$$

Osservazione 1.19.2. Quando diciamo che vogliamo studiare la compattificazione proiettiva di un sottoinsieme di $A \subseteq \mathbb{C}^2$, vuol dire che stiamo considerando $A \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}^1_\infty$ e lì se ne considera la chiusura. Di fatto si devono aggiungere i cosiddetti punti all'infinito di A.

Se A è definito come luogo di zeri di una funzione F in $\mathbb{C}^2$ allora la chiusura di A in $\mathbb{CP}^2$ sarà il luogo di zeri della funzione corrispondente a F su $\mathbb{CP}^2$.

Per esempio se $A = \{zw = 0\}$ lo pensiamo nella carta U_0, allora A corrisponde in $\mathbb{CP}^2$ all'insieme $\{[X_0, X_1, X_2] : X_1X_2 = 0\}$. I punti all'infinito della carta U_0 sono $A \cap \{X_0 = 0\} = \{[0, X_1, X_2] : X_1X_2 = 0\} = \{[0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ (si ricordi che $[0, z, 0] = [0, 1, 0]$ e $[0, 0, z] = [0, 0, 1]$).

Definizione 1.19.3. Un polinomio P nelle variabili X_0, X_1, X_2 si dice omogeneo di grado d se ogni monomio ha grado d.

Per esempio $X_0X_1X_2 + X_0X_2^2$ è omogeneo di grado tre, mentre $X_0X_1X_2 + X_1X_2$ non è omogeneo perchè il primo monomio è di terzo grado e il secondo è di secondo grado.

Se usiamo un multi-indice indcando con $\mathbf{n} = (n_0, n_1, n_2)$ e con $|\mathbf{n}| = n_0+n_1+n_2$ (ove ogni $n_i \in \mathbb{N}$) possiamo scrivere un polinomio omogeneo di grado d come

$$\sum_{|\mathbf{n}|=d} a_{\mathbf{n}} X_0^{n_0} X_1^{n_1} X_2^{n_2}$$

oppure, volendo enfatizzare il ruolo delle variabili X_1, X_2, senza multi-indici, come

$$\sum_{0\le n+m\le d} a_{nm} X_0^{d-n-m} X_1^n X_2^m.$$

Nelle sezioni standard un polinomio omogeneo P diventa un polinomio non necessariamente omogeneo in una variabile di meno. Per esempio se $P(X_0, X_1, X_2) = X_0X_1X_2 + X_1X_2^2$, se mettiamo $X_0 = 1$, diventa $x_1x_2 + x_1x_2^2$. In generale nella sezione V_0, $P = \sum a_{nm} X_0^{d-n-m} X_1^n X_2^m$ diventa $p = \sum a_{nm} x^n y^m$. Viceversa, ogni polinomio non omogeneo in due variabili si può omogeneizzare in grado d aggiungendo potenze opportune in una terza variabile. Per esempio $xy + y + x^3 + 1$ diventa $XYZ + YZ^2 + X^3 + Z^3$. In generale $p = \sum a_{nm} x^n y^m$ si omogeneizza a $P = \sum a_{nm} X_0^{d-n-m} X_1^n X_2^m$. C'è dunque una corrisppondenza

$$p = \sum_{0\le n+m\le d} a_{nm} x^n y^m \quad \leftrightarrow \quad P = \sum_{0\le n+m\le d} a_{nm} X_0^{d-n-m} X_1^n X_2^m.$$

Fatto 1.19.4. *Se $P(X_0, X_1, X_2)$ è un polinomio omogeneo di grado d allora $P(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^d P(X, Y, Z)$.*

Dimostrazione. Discende immediatamente dal fatto che ogni monomio ha grado d. □

Ne segue che il luogo di zeri di un polinomio omogeneo è invariante per moltiplicazione e può esser letto senza perdita di informazione nel proiettivo. Viceversa se $p(z,w)$ è un polinomio in due variabili e vogliamo studiare la compattificazione proiettiva di $S = \{(z,w) : p(z,w) = 0\}$, bisogna considerare il luogo di zeri dell'omogeneizzato P di p in $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}^1_\infty$: tale luogo sarà dunque formato da S più gli zeri all'infinito.

Dato $P(X_0, X_1, X_2)$ omogeneo si definiscono i polinomi

$$p_0(x_1, x_2) = P(1, x_1, x_2)$$

$$p_1(x_0, x_2) = P(x_0, 1, x_2)$$

$$p_2(x_0, x_1) = P(x_0, x_1, 1).$$

Si noti che P è l'omogeneizzato dei p_i.

Osservazione 1.19.5. Nella carta locale U_i il luogo di zeri di P corrisponde al luogo di zeri di p_i.

Lemma 1.19.6. *Per ogni $i \neq j$, $\partial P/\partial X_i$ è l'omogeneizzato di $\partial p_j/\partial x_i$.*

Dimostrazione. Facciamo il calcolo per $i = 1$ e $j = 0$, per gli altri sarà simile. Se $P = \sum_{|\mathbf{n}|=d} a_{\mathbf{n}} X_0^{n_0} X_1^{n_1} X_2^{n_2}$ allora $p_0 = \sum_{|n|=d} a_{\mathbf{n}} x_1^{n_1} x_2^{n_2}$ e

$$\frac{\partial p_0}{\partial x_1} = \sum_{|\mathbf{n}|=d} a_{\mathbf{n}} n_1 x_1^{n_1-1} x_2^{n_2} = \sum_{n_1+n_2 \leq d} a_{(d-n_1-n_2, n_1, n_2)} n_1 x_1^{n_1-1} x_2^{n_2}$$

il cui omogeneizzato (di grado $d-1$) è

$$\sum_{n_1+n_2 \leq d} a_{(d-n_1-n_2, n_1, n_2)} n_1 X_0^{d-n_1-n_2} X_1^{n_1-1} X_2^{n_2}$$
$$= \sum_{|\mathbf{n}|=d} a_{\mathbf{n}} n_1 X_0^{n_0} X_1^{n_1-1} X_2^{n_2} = \frac{\partial P}{\partial X_1}$$

□

Lemma 1.19.7. *Se P è omogeneo di grado k allora*

$$kP = X_0 \frac{\partial P}{\partial X_0} + X_1 \frac{\partial P}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial P}{\partial X_2}.$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
kP = \sum_{|\mathbf{n}|=k} ka_{\mathbf{n}} X_0^{n_0} X_1^{n_1} X_2^{n_2} = \sum_{|\mathbf{n}|=k} a_{\mathbf{n}}(n_0+n_1+n_2) X_0^{n_0} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \\
= X_0 \sum_{|\mathbf{n}|=k} a_{\mathbf{n}} n_0 X_0^{n_0-1} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \\
+ X_1 \sum_{|\mathbf{n}|=k} a_{\mathbf{n}} n_1 X_0^{n_0} X_1^{n_1-1} X_2^{n_2} \\
+ X_2 \sum_{|\mathbf{n}|=k} a_{\mathbf{n}} n_2 X_0^{n_0} X_1^{n_1} X_2^{n_2-1} \\
= X_0 \frac{\partial P}{\partial X_0} + X_1 \frac{\partial P}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial P}{\partial X_2}.
\end{aligned}
$$

□

Fatto 1.19.8. 0 *è un valore regolare per* P *come funzione definita su* $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ *se e solo se lo è per tutti i polinomi* p_0, p_1, p_2*.*

Dimostrazione. Se 0 è critico per P allora esiste un punto (X, Y, Z) non nullo tale che $P(X, Y, Z) = 0$ e $\partial P/\partial X_i(X, Y, Z) = 0$ per ogni $i = 0, 1, 2$. Siccome $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$ una delle tre coordinate sarà non nulla e a meno di riordinarle possiamo supporre che sia la prima. Ponendo $y = Y/X$, $z = Z/X$, avremo che $p_0(y, z) = \partial p_0/\partial x_1(y, z) = \partial p_0/\partial x_2(y, z) = 0$ dunque (y, z) è uno zero critico per p_0 e dunque lo zero è un valore critico per p_0.

Viceversa, supponiamo 0 valore regolare per P e vediamo che è regolare per tutti i p_i. Facciamo il conto per p_0, per gli altri sarà simile. Ricordiamo che p_0 è definito ove la prima coordinata è non nulla.

Per il lemma precedente, se 0 è regolare e $P(X, Y, Z) = 0$ con $X \neq 0$, allora almeno una delle derivate di p_0 non si annulla in (y, z) (ove $y = Y/X, z = Z/X$). Quindi ogni zero di p_0 è regolare e dunque 0 è valore regolare per p_0. □

Se lo zero è un valore regolare per ogni p_i allora il luogo di zeri di P definisce una sottovarietà liscia di dimensione complessa 1 in $\mathbb{CP}^2$. Ergo una superficie di Riemann.

1.20. **La formula grado-genere.**

Teorema 1.20.1 (Formula grado-genere)**.** *Sia* $P(X_0, X_1, X_2)$ *un polinomio omogeneo di grado* d *tale che lo zero sia un valore regolare. Allora il luogo di zeri di* P *in* $\mathbb{CP}^2$ *è una superficie di genere*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Tale enunciato si può dare anche così:

Teorema 1.20.2 (Formula grado-genere)**.** *Sia* $p(z,w) = \sum a_{nm} z^n w^m$ *un polinomio di grado* d *tale che lo zero sia un valore regolare anche all'infinito. Allora il completamento del luogo di zeri di* p *è una superficie di Riemann di genere*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Notiamo anche che $g(1) = g(2) = 0$ e da 2 in poi il genere è monotono crescente come funzione del grado. In particolare, non tutti i generi sono ottenibili in questo modo, per esempio $g = 2$ non è ottenibile in quanto $g(1) = g(2) = 0$, $g(3) = 1$, $g(4) = 3$ e $g(d) > g(4) = 3$ per ogni altro grado.

Prima di dare la dimostrazione del teorema, osserviamo che questa storia della compattificazione proiettiva è necessaria:

Lemma 1.20.3. *Sia* p *un polinomio non costante di due variabili complesse e sia* S *il suo luogo di zeri. Allora* S *non è compatto.*

Dimostrazione. Se lo fosse, le funzioni coordinate $z : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ e $w : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ per restrizione a S sarebbero funzioni olomorfe su S globali non costanti, ma ciò è impossibile per il principio del massimo. □

Ne segue che S ha necessariamente punti all'infinito.

Dimostrazione della formula grado-genere. Durante la dimostrazione imporremo alcune condizioni aggiuntive sul polinomio ottenibili attraverso cambi di coordinate lineari; ciò non è un problema perchè i cambi di coordinate non cambiano la topologia del luogo di zeri.

In oltre, per favorire la leggibilità delle formule useremo la seguente notazione:

$$p_z$$

indicherà la derivata formale del polinomio p nella variabile z.

Sia

$$p(z,w) = \sum_{0 \le n+m \le d} a_{nm} z^n w^m$$

e sia

$$S = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : p(z,w) = 0\}.$$

Siccome lo zero è un valore regolare, le derivate parziali p_z, p_w non si annullano mai contemporaneamente. Le funzioni coordinate $z, w : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definiscono per restrizione funzioni olomorfe su S i cui differenziali sono 1-forme olomorfe su S.

Lemma 1.20.4. *Su* S *vale*

$$p_z dz + p_w dw = 0.$$

Dimostrazione. Scegliamo un atlante per S e consideriamo una parametrizzazione locale $\varphi : U \subset \mathbb{C} \to S$. Avremo

$$\varphi(t) = (z(t), w(t)) \quad \text{e} \quad p(z(t), w(t)) = 0$$

perchè p si annulla su S. Dunque

$$0 = d(p \circ \varphi) = p_z z' dt + p_w w' dt = p_z dz + p_w dw.$$

□

Corollario 1.20.5. *La forma dz si annulla su S esattamente dove si annulla p_w. La forma dw si annulla su S esattamente dove si annulla p_z.*

Dimostrazione. Le forme dz e dw non possono annullarsi contemporaneamente perchè $d\varphi$ non è mai nullo. D'altronde se $dz = 0$ in un punto, allora in quel punto $p_w dw = 0$ e dunque, non potendosi annullare dw, si annulla p_w. Similmente, le derivate parziali p_z, p_w non si annullano mai contemporaneamente su S perché lo 0 è un valore regolare. Ergo se $p_w = 0$ in un punto allora $p_z dz = 0$ e, non potendo annullarsi p_z, si deve annullare dz.

Stesso ragionamento per dw e p_z. □

Se tutto ciò pare strano si pensi allo stesso enunciato in $\mathbb{R}^2$: ove z, w sono rimpiazzate da variabili reali x, y: beh la forma dx si annulla su S esattamente nei punti in cui S ha tangente verticale, ossia dove $p_y = 0$.

Definiamo su S la seguente forma

$$\omega = \frac{dz}{p_w} = -\frac{dw}{p_z}.$$

Lemma 1.20.6. *ω è olomorfa e non si annulla mai nei punti di S.*

Dimostrazione. Sia l'essere olomorfa che l'essere non nulla sono condizioni locali. Ove $p_w \neq 0$ la forma $\omega = dz/p_w$ è olomorfa e non nulla per il corollario precedente. Ove $p_w = 0$ non si annulla p_z e basta usare l'altra descrizione $\omega = -dw/p_z$. □

A questo punto per conoscere il genere della chiusura proiettiva di S basta controllare gli ordini degli zeri e dei poli di ω all'infinito. Facciamo un po' di calcoli. Identifichiamo $\mathbb{C}^2$ con la carta $U_0 = \{X_0 \neq 0\}$, ponendo $z = X_1/X_0$ e $w = X_2/X_0$. Avremo

$$p(z, w) = \sum_{0 \le n+m \le d} a_{nm} z^n w^m$$

e il suo omogeneizzato è

$$P(X_0, X_1, X_2) = \sum_{0 \le n+m \le d} a_{nm} X_0^{d-n-m} X_1^n X_2^m.$$

L'infinito della carta U_0 è l'insieme $\{X_0 = 0\}$, per cui il luogo di zeri di P all'infinito della carta U_0, è l'intersezione di $\{P = 0\}$ con $\{X_0 = 0\}$, la cui equazione è

$$\sum_{n+m=d} a_{nm} X_1^n X_2^m = 0.$$

Cioè ci siamo ridotti a studiare il luogo di zeri di un polinomio omogeneo in due variabili, nella retta proiettiva all'infinito, che è un $\mathbb{CP}^1$. Possiamo quindi studiare tale luogo nelle carte locali di $\mathbb{CP}^1$ date da $U_1 = \{X_1 \neq 0\}$ e $U_2 = \{X_2 \neq 0\}$ (che altro non sono che le intersezioni delle due carte locali U_1, U_2 di $\mathbb{CP}^2$ con la retta all'infinito $\{X_0 = 0\}$).

Lavoriamo nella carta $U_2 = \{X_2 \neq 0\}$ e poniamo $x = X_1/X_2$. In tale carta il polinomio omogeneo $Q(X_1, X_2) = \sum_{n+m=d} a_{nm} X_1^n X_2^m$ diventa

$$q(x) = \sum_{n=0}^{d} a_{n(d-n)} x^n.$$

I punti all'infinito di S sono quindi dati dai punti della retta all'infinito che soddisfano

$$q(x) = 0.$$

A meno di cambi di coordinate lineari possiamo supporre che q abbia effettivamente grado d (ossia $[1, 0]$ non è radice di Q, quindi non ci sono radici nascoste all'infinito della carta $\{X_2 \neq 0\}$) e che abbia radici semplici (cioè tutte distinte tra loro). In particolare S ha esattamente d punti all'infinito, tutti nella carta U_2.

Sia ora $[0, X, Y]$ un punto all'infinito di S. *A meno di cambi di coordinate lineari* possiamo supporre che tale punto sia $[0, 1, 0]$.

Andiamo a studiare il comportamento di ω in tale punto. Siccome le radici di q sono semplici, la sua derivata non si annulla in $[0, 1, 0]$ e dunque $P_{X_1}[0, 1, 0] \neq 0$ (per il Lemma 1.19.6).

Su U_0 abbiamo

$$\omega = \frac{dz}{p_w} = -\frac{dw}{p_z}$$

su U_0 avevamo coordinate z, w; su U_2 mettiamo coordinate u, v, cioè

$$u = X_0/X_2 \qquad v = X_1/X_2.$$

Su $U_0 \cap U_2$ il cambio di carte è

$$[u, v, 1] = [1, \frac{v}{u}, \frac{1}{u}] = [1, z, w]$$

in altre parole

$$(z, w) = (\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}) = (\frac{v}{u}, \frac{1}{u}).$$

Dunque $w = 1/u$ e il pull-back di dw nella carta U_2 si legge come

$$dw = -\frac{1}{u^2} du.$$

Andiamo a vedere l'espressione di p_z, il cui omogeneizzato è P_{X_1}, che corrisponde a p_v in U_2. Abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{P_{X_1}}{X_0^{d-1}} &= X_0^{1-d}\sum_{0\leq n+m\leq d} a_{nm}nX_0^{d-n-m}X_1^{n-1}X_2^m \\ &= \sum_{0\leq n+m\leq d} a_{nm}nX_0^{d-n-m-d+1}X_1^{n-1}X_2^m \\ &= \sum_{0\leq n+m\leq d} a_{nm}nX_0^{-(n-1)-m}X_1^{n-1}X_2^m \\ &= \sum_{0\leq n+m\leq d} a_{nm}n\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^{n-1}\left(\frac{X_2}{X_0}\right)^m \\ &= p_z(z,w)\end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned}\frac{P_{X_1}}{X_2^{d-1}} &= X_2^{1-d}\sum_{0\leq n+m\leq d} a_{nm}nX_0^{d-n-m}X_1^{n-1}X_2^m \\ &= \sum_{0\leq n+m\leq d} a_{nm}nX_0^{d-n-m}X_1^{n-1}X_2^{m+1-d} \\ &= \sum_{0\leq n+m\leq d} a_{nm}nX_0^{d-n-m}X_1^{n-1}X_2^{m+1-d-n+n} \\ &= \sum_{0\leq n+m\leq d} a_{nm}n\left(\frac{X_0}{X_2}\right)^{d-n-m}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{n-1} \\ &= p_v(u,v)\end{aligned}$$

Dunque

$$p_z = \left(\frac{X_2}{X_0}\right)^{d-1} p_v = \frac{1}{u^{d-1}}p_v$$

e

$$\omega = -\frac{dw}{p_z} = \frac{1}{u^2}\frac{u^{d-1}}{p_v} = \frac{u^{d-3}}{p_v}.$$

Siccome $p_v \neq 0$ sugli zeri perché $P_{X_1} \neq 0$, abbiamo che ω presenta uno zero/polo di ordine $d-3$ nel punto $(u,v) = (0,1) = [0,1,0]$.

Il calcolo appena fatto vale in ogni punto all'infinito di S. Quindi ω ha uno zero/polo di ordine $d-3$ in ogni punto all'infinito di S (zero se $d > 3$, polo se $d < 3$).

Siccome q ha d radici, ergo i punti all'infinito di S sono d, la somma delle molteplicità di ω è $d(d-3)$. Abbiamo quindi

$$2 - 2g = \chi = -d(d-3)$$

e quindi

$$g = \frac{2 + d(d-3)}{2} = \frac{2 + d^2 - 3d}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

□

Facciamo alcuni esempi.

Consideriamo il luogo di zeri del polinomio

$$P(X_0, X_1, X_2) = X_0^n + X_1^n + X_2^n$$

noto anche come curva di Fermat di grado n. Controlliamo che 0 sia un valore regolare. Le derivate parziali $P_{X_i} = nX_i^{n-1}$ si annullano tutte contemporaneamente solo in $(0,0,0)$ che non fa parte di $\mathbb{CP}^2$. Se consideriamo la curva di grado 2, essa per la formula di grado-genere avrà genere

$$\frac{(2-1)(2-2)}{2} = 0$$

dunque è isomorfa a $\mathbb{CP}^1$. In grado n la curva di Fermat ha genere $(n-1)(n-2)/2$.

Facciamo un esempio a partire da un polinomio non omogeneo. Consideriamo la curva definita da

$$z^2 = w^5.$$

Stiamo cercando il luogo di zeri di $p(z,w) = z^2 - w^5$, che corrisponde al polinomio omogeneo $X^3Z^2 - W^5$. $P_X = 3X^2Z^2, P_Z = 2ZX^3, P_W = -5W^4$ e si annullano tutte e tre se $W = 0$ e $ZX = 0$ dunque per esempio $(X, Z, W) = (1, 0, 0)$ è un punto singolare di tale curva, che quindi non è liscia.

Riproviamoci. Consideriamo la curva definita da

$$w^5 = z^2 - z^5 - 1.$$

Stiamo cercando il luogo di zeri di $p(z,w) = w^5 + z^5 - z^2 + 1$, che corrisponde al polinomio omogeneo $W^5 + Z^5 - X^3Z^2 + X^5$. Le derivate parziali sono

$$P_X = 5X^4 - 3X^2Z^2, \quad P_Z = 5Z^4 - 2ZX^3, \quad P_W = 5W^4.$$

Affinché si annullino tutte e tre occorre in primis $W = 0$. Si noti che se $X = 0$ allora per annullarsi P_Z occorre che anche Z sia nullo, discorso simile se $Z = 0$. Dunque se le tre derivate si annullano contemporaneamente in un punto diverso dall'origine allora $ZX \neq 0$ e

$$\begin{cases} W = 0 \\ 5X^2 - 3Z^2 = 0 \\ 5Z^3 - 2X^3 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$3Z^2 = 5X^2 \quad 2X^3 = 5Z^3$$
$$3Z^5 = 5X^2Z^3 \quad 2X^3Z^2 = 5Z^5$$
$$25X^2Z^3 = 6X^3Z^2$$
$$25Z = 6X$$

Ma in tali punti $P(X, Z, W) \neq 0$ perchè

$$p(\frac{6}{25}, 0) = \left(\frac{6}{25}\right)^5 - \left(\frac{6}{25}\right)^2 + 1 \neq 0.$$

Quindi questa volta il luogo di zeri è liscio. La formula di grado-genere dice che esso è una superficie di genere

$$\frac{(5-1)(5-2)}{2} = 6.$$