

1. INTRODUZIONE

Innanzitutto, va detto che queste note non sono il libro di testo, servono più che altro a tener traccia di quello che facciamo a lezione. Il libro che seguiremo è sostanzialmente il Benedetti Petronio [BP]. Con aiuto del Ratcliffe [R]. Per quanto riguarda la geometria e la topologia delle varietà di dimensione bassa, un ottimo riferimento è il libro del Martelli [M]. Per un ripasso di questioni topologiche si può consultare il mio libro di topologia [F] (il .pdf si scarica dalla mia homepage).

Alcune cose non saranno inserite qua dentro se quello che faremo sarà praticamente uguale al libro.

Non tutto sarà dimostrato qui. Per esempio quando si scrive “Fatto” ci si riferisce a teoremi la cui dimostrazione è qui omessa ma presente sui libri di testo consigliati.

2. \mathbb{H}^n E I SUOI MODELLI

2.1. La definizione veloce. Per ogni dimensione $n \geq 2$, lo spazio iperbolico n -dimensionale \mathbb{H}^n è, a meno di isometrie, l'unica varietà Riemanniana di dimensione n che sia completa, semplicemente connessa e di curvatura sezionale costante -1 . Olè.

È come se uno vi dicesse che S^2 è l'unica varietà di curvatura costante $+1$. Che è vero, per carità, però ora descriviamo dei modelli espliciti di \mathbb{H}^n , tipo quando si dice che $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\}$.

2.2. Breve recap informale di geometria Riemanniana. Una varietà è una roba localmente omeomorfa a \mathbb{R}^n . Questo non è un concetto rigido: una sfera e un ellissoide sono omeomorfe. Anche un cubo è omeomorfo a una palla. Quello che li rende intrinsecamente differenti l'uno dall'altra è la loro forma come corpi rigidi. In un corpo rigido le distanze tra punti sono fissate e non possono cambiare. Noi siamo abituati a misurare le distanze degli oggetti che vediamo col metro, e gli angoli col goniometro; cioè usando la distanza di \mathbb{R}^3 , che percepiamo come qualità intrinseca del mondo in cui viviamo.

Se un matematico ha tra le mani una varietà differenziabile però, non c'è nessun modo intrinseco di misurare le distanze. C'è poco da fare, si dovrà aggiungere struttura. Un buon modo di farlo è quello di introdurre il concetto di metrica Riemanniana.

In soldoni una metrica Riemanniana su una varietà M è una scelta (differenziabile), per ogni $p \in M$, di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ sullo spazio tangente in p . In questo modo possiamo misurare la norma dei vettori tangenti in p e gli angoli tra loro¹.

¹L'angolo α tra v e w si ricava dalla formula $\cos \alpha = \langle v, w \rangle / \|v\| \|w\|$

In pratica siamo in grado di calcolare la velocità puntuale di una traiettoria $\gamma(t)$ (che sarà $\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)}}$) e gli angoli tra traiettorie che si incrociano (che saranno gli angoli dei rispettivi vettori velocità).

Si noti che dare un prodotto scalare $\langle v, w \rangle$ è come dare la forma quadratica associata $\langle v, v \rangle$, cioè la norma quadra $\|v\|^2$. In buona sostanza, l'importante è saper misurare le velocità delle traiettorie, gli angoli poi ne sono conseguenza. Le notazioni che trovate sui libri sono g per il prodotto scalare, che viene chiamato metrica Riemanniana, e ds^2 per la forma quadratica associata

$$g(V, W)_p = \langle V, W \rangle_p \quad ds_p^2(V) = \|V\|_p^2$$

A questo punto si è in grado di calcolare la lunghezza delle traiettorie: $L(\gamma) = \int \|\gamma'(t)\| dt$.

Esempi di metriche Riemmaniane sono quelle indotte: ogni bagaglio che sta dentro \mathbb{R}^n eredita un prodotto scalare punto per punto semplicemente considerando il prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n e la sua restrizione ad ogni spazio tangente. Se si fa questo giochino con la sfera unitaria in \mathbb{R}^3 si ritrova la geometria sferica di S^2 . In generale, se una varietà è dotata di metrica Riemmaniana, ogni sua sottovarietà ne eredita una nello stesso modo.

Avendo una metrica, si può definire la **distanza tra due punti** come il minimo delle lunghezze delle curve che li congiungono².

Le curve la cui lunghezza realizza la distanza si chiamano **geodetiche**. Un piccolo distinguo è d'uopo: in contesto metrico, una geodetica è una curva la cui lunghezza realizza la distanza tra i suoi due estremi; in contesto Riemanniano una geodetica è una curva che fa questo mestiere solo localmente: non è possibile cioè accorciare una geodetica solo perturbandola localmente. L'esempio classico è sulla sfera S^2 : mezzo meridiano, come curva dal polo nord al polo sud, è una geodetica in tutti i sensi, l'equatore lo è solo in senso Riemanniano.

Nella vita, le geodetiche sono realizzate da elastici in tensione: essi si adattano sempre su curve di lunghezza localmente minima.

L'ultimo concetto che vogliamo qui ricordare è quello di **isometria**. Un'isometria non è altro che una funzione $f : M \rightarrow M$ che preserva la metrica. Cioè i prodotti scalari, ergo pure gli angoli, e quindi manda geodetiche in geodetiche. Per esempio le rotazioni di S^2 sono isometrie rispetto alla metrica sferica standard (di rotazioni ce ne sono infinite). Se prendiamo però S^2 parametrizzata come un fagiolo in \mathbb{R}^3 , dotandola della metrica indotta, essa difficilmente avrà isometrie diverse dall'identità. Ancora, un'isometria di un cubo deve per forza preservare la stratificazione di spigoli e vertici; ne segue che di isometrie del cubo non banali ce ne sono, ma sono in numero finito.

²Qui sorvoliamo su questioni tecniche tipo esistenza di questo minimo et similia, anche se sono importanti.

2.3. Lo spazio-tempo e le sue sfere. Fin qui tutto bene. Solo che poi arriva coso e ci dice che la vita non è tutta rose e Riemann, e che lo spazio in cui viviamo, inteso come spazio-tempo, è una varietà un po' particolare. Punto per punto esiste sì un prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, che però non è un prodotto scalare. Ok, è una forma bilineare simmetrica non degenera, ma invece che essere definita positiva ha segnatura $(3, 1)$ e quindi ha anche vettori isotropi (cioè non nulli ma tali che $\langle v, v \rangle = 0$). Di solito quando si parla di spazio di Minkowski si intende \mathbb{R}^4 munito del prodotto Lorentziano standard, cioè quello con forma quadratica $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ (lo stesso prodotto per tutti i punti di \mathbb{R}^4). In generale il prodotto di Lorentz su \mathbb{R}^{n+1} è il prodotto di forma quadratica $x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$, quindi di segnatura $(n, 1)$. In questo spazio ci sono vettori di norma quadra positiva (vettori di tipo spazio), negativa (vettori di tipo tempo) e nulla (vettori di tipo luce). Spesso si usa la notazione $\mathbb{R}^{n,1}$ per indicare \mathbb{R}^n dotato del prodotto Lorentziano di segnatura $n, 1$.

Ok, se questo è quanto, vediamo cosa possiamo farci. Proviamo a fare col prodotto Lorentziano le stesse cose che facevamo col prodotto Euclideo standard in \mathbb{R}^n .

Nell' \mathbb{R}^n Euclideo standard, se consideriamo le sfere di raggio r , cioè i vettori per cui $\|v\|^2 = r^2$, otteniamo delle normali sfere tonde, tutte uguali a meno di riscalamento, e la metrica Riemanniana indotta è quella sferica.

Nello spazio di Lorentz invece si possono considerare sfere di raggio quadro positivo, negativo o nullo.

Il cosiddetto **cono luce** è la sfera di “raggio zero”, cioè l'insieme dei vettori isotropi cioè quelli per cui $\langle v, v \rangle = 0$. Si chiama cono proprio perché è un cono. Facciamo l'esempio di $\mathbb{R}^{2,1}$ che si visualizza bene. L'equazione del cono luce è $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ dunque il cono luce è la superficie di rotazione ottenuta da $\rho^2 - z^2 = 0$ che descrive l'insieme delle due bisettrici a 45 gradi nel piano cartesiano. Il cono luce in $\mathbb{R}^{2,1}$ è dunque un doppio cono il cui vertice è piazzato nell'origine.

La sfera unitaria è la quadrica di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, dunque la superficie di rotazione ottenuta dalla curva di equazione $\rho^2 - z^2 = 1$, che è un'iperbole parametrizzata da $\rho = \cosh t, z = \sinh t$. Dunque la rotazione attorno all'asse z produce un'iperboloide a una falda, che chiamiamo \mathcal{S} .

La sfera che si potrebbe chiamare “meno-unitaria” (ma che nessuno chiama così), è la quadrica di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, dunque la superficie di rotazione ottenuta dalla curva di equazione $\rho^2 - z^2 = -1$, ossia $-\rho^2 + z^2 = 1$, che dunque è un'iperbole parametrizzata da $\rho = \sinh t, z = \cosh t$. Dunque la rotazione attorno all'asse z produce un'iperboloide a due falde: una, \mathcal{I}_+ , nel semispazio superiore e una, \mathcal{I}_- , nel semispazio inferiore.

Andiamo ora a vedere cosa induce il prodotto Lorentziano su ognuna di queste sfere. In generale, se consideriamo gli insiemi di livello di una

forma quadratica $\langle v, v \rangle$, cioè $M_r = \{v : \langle v, v \rangle = r\}$, lo spazio tangente a M_r nel punto p è proprio “l’ortogonale di p ” cioè

$$T_p(M_r) = \{v : \langle v, p \rangle = 0\}.$$

Questo perchè il tangente a M_r è il nucleo del differenziale della funzione $f(v) = \langle v, v \rangle$ che si vede facilmente essere $df_p[v] = 2\langle p, v \rangle$.

Se fate questo calcolo in \mathbb{R}^n standard, ottenete che il tangente alla sfera nel punto p è proprio l’ortogonale di p nel senso classico del termine. A me è sempre sembrato buffo.

Se p è un punto del cono luce allora si vede facilmente che una base del piano tangente al cono in p è data da p stesso e un vettore orizzontale, indi di tipo spazio. La restrizione del prodotto di Lorentz a tale piano tangente sarà dunque degenerare (la matrice viene $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

Se p è un punto della sfera unitaria \mathcal{S} , allora la restrizione a $T_p\mathcal{S}$ sarà non degenerare e di segnatura $(1, 1)$. Questo perchè se v_1, v_2 è una base di $T_p\mathcal{S}$, ortogonale rispetto al prodotto di Lorentz, allora p, v_1, v_2 è una base di \mathbb{R}^3 , ortogonale rispetto al prodotto di Lorentz, e siccome $\langle p, p \rangle > 0$ allora su $T_p\mathcal{S}$ avanza una forma di segnatura $(1, 1)$.

Dunque la sfera unitaria \mathcal{S} ha, punto per punto, un prodotto Lorentziano di dimensione 2.

Per lo stesso motivo, se consideriamo un punto $p \in \mathcal{I}_+$, allora la restrizione del prodotto di Lorentz a $T_p(\mathcal{I}_+) = p^\perp$ è definita positiva (l’autovalore negativo scompare in p^\perp perchè $\langle p, p \rangle < 0$).

Toh! Si parte da un prodotto di Lorentz, si considera l’iperboloide a due falde dei vettori di norma quadra -1 , si restringe il prodotto di Lorentz al tangente . . . et voilà, ci troviamo in mano una bellissima varietà dotata di una metrica Riemanniana!

Abbiamo appena incontrato il **piano iperbolico**.

2.4. Modello dell’iperboloide. Ripetiamo, un po’ più formalmente, quello che abbiamo detto poco fa.

Definizione 2.1. $\mathbb{R}^{n,1}$ è lo spazio vettoriale \mathbb{R}^{n+1} munito della forma bilineare simmetrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ di segnatura $(n, 1)$ associata alla forma quadratica $q(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots x_n^2 - x_{n+1}^2$; ossia

$$\langle (x_1, \dots, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_{n+1}) \rangle = x_1 y_1 + \dots x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}.$$

La norma quadra di $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ non è altro che $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$; l’ortogonale di $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ è definito come

$$x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, y \rangle = 0\}.$$

L’iperboloide superiore è

$$\mathcal{I}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \|x\|^2 = -1, x_{n+1} > 0\}.$$

Proposizione 2.2. \mathcal{I}^n è una varietà differenziabile e per ogni $x \in \mathcal{I}^n$, lo spazio tangente $T_x \mathcal{I}^n$ coincide con x^\perp . La restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $T_x \mathcal{I}^n$ è un prodotto scalare.

Dimostrazione. Sia $q(x)$ la forma quadratica associata a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Per definizione $\mathcal{I}^n = q^{-1}(-1)$. Il differenziale di q , nel punto x , calcolato in un vettore v è

$$\begin{aligned} dq_x[v] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q(x + \epsilon v) - q(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle x + \epsilon v, x + \epsilon v \rangle - \langle x, x \rangle}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\epsilon \langle x, v \rangle + \epsilon^2 \langle v, v \rangle}{\epsilon} = 2\langle x, v \rangle \end{aligned}$$

Siccome $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è non degenere, allora -1 è un valore regolare per q ; ergo $\mathcal{I}^n = q^{-1}(-1)$ è una varietà differenziabile e

$$T_x \mathcal{I}^n = \ker dq_x = \{v : dq_x[v] = 0\} = \{v : \langle x, v \rangle = 0\} = x^\perp.$$

L'ultima asserzione deriva dal fatto che siccome $\langle x, x \rangle < 0$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ha segnatura $(n, 1)$ allora la sua restrizione a x^\perp è definita positiva. \square

Definizione 2.3. Denotiamo con \mathbb{I}^n la varietà \mathcal{I}^n munita della metrica Riemanniana ottenuta per restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $T\mathcal{I}^n$.

Fatto 2.4. \mathbb{I}^n è isometrico a \mathbb{H}^n .

In altre parole \mathbb{I}^n è un *modello* di \mathbb{H}^n . Si chiama modello dell'iperboloide di \mathbb{H}^n .

Proposizione 2.5. Siano $x, y \in \mathbb{R}^{n,1}$ tali che $\|x\|^2 < 0, \|y\|^2 < 0$ e x_{n+1}, y_{n+1} entrambi positivi o negativi. Allora $\langle x, y \rangle < 0$.

Dimostrazione. Denotiamo con $(x, y)_E$ il prodotto Euclideo standard tra (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) , e con $\|x\|_E$ la norma euclidea di (x_1, \dots, x_n) . Dunque $\langle x, y \rangle = (x, y)_E - x_{n+1}y_{n+1}$.

Per ipotesi

$$\|x\|_E^2 < x_{n+1}^2 \quad \|y\|_E^2 < y_{n+1}^2 \quad x_{n+1}y_{n+1} > 0$$

e per la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$(x, y)_E \leq \|x\|_E \|y\|_E < x_{n+1}y_{n+1}$$

che è equivalente a

$$\langle x, y \rangle < 0.$$

\square

Definiamo $\|x\|$ come $i\sqrt{\|x\|_E^2}$.

Corollario 2.6 (Disuguaglianza tipo Schwarz). Siano $x, y \in \mathbb{R}^{n,1}$ tali che $\|x\|^2 < 0, \|y\|^2 < 0$ e x_{n+1}, y_{n+1} entrambi positivi o negativi. Allora $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$ e l'uguaglianza vale solo se x, y sono uno multiplo dell'altro.

Dimostrazione. Consideriamo la retta parametrizzata da $t \mapsto x + ty$. Essa parte da x e procede con vettore velocità dato da y . Tale retta passa per l'origine se e solo se x, y sono multiplo uno dell'altro e in tal caso l'enunciato è immediato.

Se x, y non sono uno multiplo dell'altro, la retta deve per forza uscire dal cono dei vettori di tipo tempo. Infatti se non è parallela al piano $\{x_{n+1} = 0\}$, deve per forza incontrarlo, ergo contenere vettori di tipo spazio; se è parallela a $\{x_{n+1} = 0\}$ esce dal cono perché l'intersezione del cono con tale piano è limitata.

Consideriamo ora la funzione $f(t) = \|x + ty\|^2$. Essa è negativa per $t = 0$ e, per quanto appena osservato, tale funzione assume anche valori positivi. Esplicitamente $f(t) = \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t\langle x, y \rangle$, che è un polinomio di secondo grado in t . Ne segue che il discriminante deve essere positivo, quindi

$$\langle x, y \rangle^2 > \|x\|^2\|y\|^2 \quad \text{da cui} \quad |\langle x, y \rangle| > \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2}$$

e la tesi segue dal fatto che $\langle x, y \rangle < 0$. \square

Ne segue per $x, y \in \mathcal{I}^n$ si ha $\langle x, y \rangle \leq -1$ e $\langle x, y \rangle = -1$ solo se $x = y$. Essendo $-\langle x, y \rangle \geq 1$ è ben definito il suo arcocoseno iperbolico, cioè esiste un unico numero non negativo $\eta(x, y)$ tale che

$$\cosh(\eta(x, y)) = -\langle x, y \rangle.$$

Fatto 2.7 (Vedasi Teorema 4.3). *La distanza (iperbolica) tra $x, y \in \mathbb{I}^n$ è data da $d_{\mathbb{H}}(x, y) = \eta(x, y)$. Cioè vale la formula*

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(x, y) = -\langle x, y \rangle.$$

Si noti che questa definizione assomiglia molto a quella di angolo. Infatti per ogni $x \in \mathbb{I}^n$, sul tangente $T_x\mathbb{I}^n$, la restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare, quindi per ogni $v, w \in T_x\mathbb{I}^n$ unitari, l'angolo $\alpha(v, w)$ tra v e w è definito dalla formula $\cos(\alpha(v, w)) = \langle v, w \rangle$. Si osservi che v, w sono vettori nella sfera unitaria \mathcal{S}^n di $\mathbb{R}^{n,1}$.

Esercizio 2.8. Provare a descrivere la geometria sferica di \mathbb{S}^2 usando lo stesso punto di vista esposto per \mathbb{I}^n . Quanto viene la distanza tra due punti di \mathbb{S}^2 ?

Esercizio 2.9. Scegliere un punto $x \in \mathbb{I}^n$ e scrivere esplicitamente una base ortonormale a per $T_x\mathcal{I}^n$.

Esercizio 2.10 (Meridiani iperbolici). Verificare che la curva $\gamma(t) = (\sinh t, 0, \dots, 0, \cosh t)$ è una curva in \mathbb{I}^n parametrizzata per lunghezza d'arco, che parte da $\gamma(0) = e_{n+1}$. Verificare che la lunghezza della curva $\gamma|_{[0, T]}$ soddisfa

$$\cosh(L(\gamma|_{[0, T]})) = -\langle \gamma(0), \gamma(T) \rangle.$$

Esercizio 2.11. Verificare che per ogni $X \in \mathbb{I}^n$ e $V \in X^\perp$ di norma unitaria, la curva $\gamma(t) = X \cosh t + V \sinh t$ è una curva in \mathbb{I}^n parametrizzata per lunghezza d'arco, che parte da X con velocità V . Verificare che la lunghezza della curva $\gamma|_{[0,T]}$ soddisfa

$$\cosh(L(\gamma|_{[0,T]})) = -\langle \gamma(0), \gamma(T) \rangle.$$

Esercizio 2.12. Dimostrare che per ogni X, Y in \mathbb{I}^n esistono unici $t \geq 0$ e $V \in X^\perp = T_X \mathbb{I}^n$ tali che $\langle V, V \rangle = 1$ e $Y = X \cosh t + V \sinh t$.

Esercizio 2.13. Dimostrare che \mathbb{H}^n è illimitato, cioè esistono punti arbitrariamente distanti tra loro.

Esercizio 2.14 (Paralleli iperbolici). In \mathbb{I}^2 sia γ la curva chiusa data dall'intersezione di \mathcal{I}^2 con il piano $\{x_3 = \cosh t\}$. Scrivere una parametrizzazione esplicita di γ e calcolarne la lunghezza. Verificare che $L(\gamma) = 2\pi \sinh t$. Fare lo stesso calcolo sui paralleli di $S^2 \in \mathbb{R}^3$.

2.5. Modello proiettivo di Beltrami-Klein. Come in \mathbb{R}^{n+1} ogni retta interseca una sola coppia di punti di S^n , e dunque molte questioni si possono studiare passando al proiettivo, così succede per \mathcal{I}^n . Ogni retta di tipo tempo interseca \mathcal{I}^n in un solo punto (\mathcal{I}^n è solo la falda superiore dell'iperboloide a due falde). Ne segue che la proiezione $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ induce una corrispondenza biunivoca tra \mathcal{I}^n e un sottoinsieme di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

Consideriamo ora la carta proiettiva $\{x_{n+1} \neq 0\}$. Cioè, come sezione della relazione d'equivalenza che definisce il proiettivo, si usa l'iperpiano affine $\{x_{n+1} = 1\}$, identificandolo naturalmente con \mathbb{R}^n .

In questa carta il cono luce corrisponde alla sfera unitaria e la proiezione P risulta di fatto un omeomorfismo tra \mathcal{I}^n e il disco unitario $D \subseteq \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Come metrica Riemanniana su D si prende il pull-back tramite P della metrica di \mathbb{I}^n , in altre parole il prodotto scalare tra due vettori $v, w \in T_x(D)$ è dato da $\langle dP_x^{-1}(v), dP_x^{-1}(w) \rangle$.

Questo modello è molto utile per vari motivi, ma presenta dei trabocchetti a cui si deve stare attenti. In primis, si è tentati di usare la metrica Euclidea sul disco. Ebbene, essa non c'entra quasi nulla con quella iperbolica. Per esempio gli angoli che “vediamo Euclideanamente” nel modello proiettivo non corrispondono agli angoli iperbolici. Tantomeno le lunghezze: il modello proiettivo è Euclideanamente limitato, lo spazio iperbolico no.

Definizione 2.15 (Birapporto). Dati 4 punti allineati p_1, p_2, p_3, p_4 in \mathbb{R}^n si definisce il loro birapporto come

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{d_E(p_3, p_1) d_E(p_2, p_4)}{d_E(p_2, p_1) d_E(p_3, p_4)} = \frac{\|p_3 - p_1\|_E \|p_2 - p_4\|_E}{\|p_2 - p_1\|_E \|p_3 - p_4\|_E}$$

ove d_E e $\|\cdot\|_E$ indicano distanza e norma Euclidea standard.

Il birapporto è sempre positivo e diverso da 0, 1, ∞ se i quattro punti sono diversi tra loro. Se si cambia l'ordine dei punti il birapporto cambia in modo semplice.

Esercizio 2.16. Trovare in che modo cambia il birapporto se si cambia l'ordine dei punti.

È un fatto noto di geometria proiettiva che il birapporto è invariante per proiettività. Cioè due quadruple che sono l'una immagine dell'altra per una proiettività, hanno lo stesso birapporto.

Fatto 2.17 (Si veda il Corollario 4.15). *Dati due punti $x \neq y$ nel modello proiettivo di \mathbb{H}^n , siano x_∞ e y_∞ l'intersezione della retta (Euclidea) passante per x, y con il bordo del disco, in modo che x_∞ sia quello dalla parte di x . Allora la distanza iperbolica tra x e y è data da*

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log[x_\infty, x, y, y_\infty] & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Fatto 2.18. *La metrica Riemmaniana di \mathbb{I}^n nel modello proiettivo corrisponde alla seguente forma quadratica: se v è un vettore di \mathbb{R}^n , considerato come vettore tangente al disco nel punto p , allora*

$$ds_p^2(v) = \|v\|_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{1 - \|p\|_E^2} \|v\|_E^2 + \frac{1}{(1 - \|p\|_E^2)^2} (\langle v, p \rangle_E)^2$$

Si noti che la norma iperbolica di un vettore v scoppia all'avvicinarsi di p al bordo del disco.

Esercizio 2.19. Scrivere esplicitamente $P : \mathcal{I}^n \rightarrow D$ e $P^{-1} : D \rightarrow \mathcal{I}^n$ e verificare la formula di cui sopra per la norma iperbolica, utilizzando la definizione via pull-back.

Esercizio 2.20. Per $|x| < 1$, calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, x] \rightarrow D$ data da $\gamma(t) = te_1$. Verificare che $L(\gamma) = d_{\mathbb{H}}(0, xe_1)$.

Esercizio 2.21. Consideriamo un triangolo equilatero nel piano Euclideo. Dotiamo il suo interno della metrica del birapporto come definita nel Fatto 2.17: Che roba è?

2.6. Modello del disco. In questo modello, come quello del proiettivo, lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n è parametrizzato da un disco D^n , quello che cambia rispetto a prima è (la parametrizzazione e) la metrica. Vediamo i dettagli.

Identifichiamo il piano $\{x_{n+1} = 0\}$ con \mathbb{R}^n . Sia $\pi : \mathcal{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la restrizione della proiezione stereografica rispetto al punto $-e_{n+1} = (0, \dots, 0, -1)$. Cioè per ogni punto $x \in \mathcal{I}^n$ si considera la retta passante per x e $(0, \dots, 0, -1)$ e se ne considera l'intersezione col piano $\{x_{n+1} = 0\}$.

Esercizio 2.22. Dimostrare che

$$\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_{n+1}}$$

Esercizio 2.23. L'immagine di \mathcal{I}^n tramite π è il disco unitario di \mathbb{R}^n .

Esercizio 2.24. Determinare l'inversa di π dal disco a \mathcal{I}^n .

Definizione 2.25. Denotiamo con \mathbb{D}^n il disco $\{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ munito della metrica Riemanniana ottenuta per pull-back di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tramite π .

Proposizione 2.26. *L'espressione esplicita della metrica iperbolica nel modello del disco è*

$$ds_p^2(v) = \|v\|_{\mathbb{H}}^2 = \left(\frac{2}{1 - \|p\|_E^2} \right)^2 \|v\|_E^2.$$

Dimostrazione. Basta fare il conto. Vabbeh, facciamolo. Pronti? Al-
leggeriamo la notazione usando $|x|^2$ al posto di $\|p\|_E^2$. Cioè $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. L'inversa di π è la funzione

$$F(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - |x|^2} (2x_1, \dots, 2x_n, 1 + |x|^2).$$

Il differenziale di F è dunque

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - |x|^2} \begin{pmatrix} & 2Id_{n \times n} & \\ 2x_1 & \dots & 2x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \\ 1 + |x|^2 \end{pmatrix} d\left(\frac{1}{1 - |x|^2}\right) \\ &= \frac{2}{1 - |x|^2} \left(\begin{pmatrix} & Id_{n \times n} & \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - |x|^2} \begin{pmatrix} 2x_1^2 & 2x_1x_2 & \dots & 2x_1x_n \\ 2x_2x_1 & 2x_2^2 & \dots & 2x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2x_nx_1 & 2x_nx_2 & \dots & 2x_n^2 \\ x_1(1 + |x|^2) & \dots & \dots & x_n(1 + |x|^2) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Siccome la situazione presenta una evidente simmetria assiale, possiamo fare il calcolo nel punto $p = (x_1, 0, \dots, 0)$.

$$dF_{(x_1, 0, \dots, 0)} = \frac{2}{1 - x_1^2} \left(\begin{pmatrix} & Id_{n \times n} & & \\ x_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - x_1^2} \begin{pmatrix} 2x_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1(1 + x_1^2) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right)$$

e dunque

$$dF_p \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{2}{1 - |x|^2} \begin{pmatrix} v_1(1 + \frac{2x_1^2}{1-x_1^2}) \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ v_1 x_1(1 + \frac{1+x_1^2}{1-x_1^2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \frac{1+x_1^2}{1-x_1^2} \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ v_1 \frac{2x_1}{1-x_1^2} \end{pmatrix}$$

ergo

$$\begin{aligned} ds_p^2(v) &= \langle dF_p(v), dF_p(v) \rangle = \\ &= \left(\frac{2}{1 - |x|^2} \right)^2 \left(v_2^2 + \dots + v_n^2 + v_1^2 \left(\left(\frac{1+x_1^2}{1-x_1^2} \right)^2 - \left(\frac{2x_1}{1-x_1^2} \right)^2 \right) \right) \\ &= \left(\frac{2}{1 - |x|^2} \right)^2 (v_1^2 + \dots + v_n^2) = \left(\frac{2}{1 - |x|^2} \right)^2 \|v\|_E^2 \end{aligned}$$

□

Si noti una differenza tra l'espressione della metrica nel modello proiettivo e in quello del disco: nel modello del disco la metrica iperbolica è, punto per punto, un multiplo di quella Euclidea, cioè cambiano solo le norme dei vettori secondo il fattore di scala $2/(1 - |x|^2)$ (che scoppia quando ci si avvicina al bordo del disco) mentre la nozione di perpendicolarità e gli angoli sono uguali a quelli che vediamo nella metrica Euclidea. Formalmente, si dice che nel modello del disco la metrica iperbolica è conforme a quella Euclidea.

Nel modello proiettivo invece la presenza del secondo addendo nella formula del Fatto 2.18 fa sì che gli angoli iperbolici siano diversi da quelli Euclidei.

Esercizio 2.27. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = te_1$, cioè $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$.

Esercizio 2.28. Calcolare la lunghezza delle circonferenze di centro $0 \in \mathbb{D}^n$, al variare del raggio.

2.7. Modello del semispazio. Il modello del semispazio è molto semplice da descrivere, un po' meno è far vedere che è un modello di \mathbb{H}^n .

Sia $\Pi^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$.

Siccome la variabile x_n è diversa dalle altre perché non può essere negativa, rappresenteremo questa come direzione "verticale" e useremo la seguente notazione. Un sottospazio affine è *verticale* se la sua giacitura contiene e_n , è *orizzontale* se la sua giacitura è contenuta in $\text{span}(e_1, \dots, e_{n-1})$. Un sottoinsieme $X \subseteq \Pi^n$ si dirà *orizzontale* se è contenuto in un iperpiano orizzontale.

Definizione 2.29. Denotiamo con \mathbb{I}^n il semispazio Π^n dotato della metrica

$$ds_x^2(v) = \frac{\|v\|_E^2}{x_n^2}.$$

In altre parole la matrice della metrica nel punto di Π^n ad altezza x_n è semplicemente $\begin{pmatrix} \frac{1}{x_n^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{x_n^2} \end{pmatrix}$. Anche in questo caso la metrica iperbolica su Π^n è conforme a quella Euclidea e il fattore di scala è semplicemente $1/x_n$. Si noti che il vettore $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ è lungo 1 nei punti ad altezza 1, è lungo 10 nei punti ad altezza $1/10$ ed è lungo 0,001 nei punti ad altezza 1000.

Per vedere che \mathbb{I}^n è un modello di \mathbb{H}^n , si può calcolare direttamente la curvatura e vedere che viene costante -1 . Ma si possono anche esibire isometrie esplicite con gli altri modelli. Facciamolo con \mathbb{D}^n , che è un classico.

Scordiamoci per un attimo della metrica iperbolica e concentriamoci su \mathbb{R}^n con l'usuale distanza. Data una sfera S di centro c e raggio R , l'inversione rispetto a S è la funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{c\}$ definita come segue: $f(p)$ è il punto sul raggio emanante da c e passante per p , che soddisfa

$$d(f(p), c)d(p, c) = R^2.$$

Esplicitamente, l'inversione rispetto a una sfera centrata nell'origine è data da $f(x) = xR^2/||x||^2$ e in generale

$$f(x) = \frac{(x - c)R^2}{||x - c||^2} + c.$$

Si può estendere f a $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ imponendo che vengano scambiati c e ∞ . Dalla definizione si vede subito che l'interno e l'esterno della sfera vengono scambiati e che S è fissata punto per punto. Con un po' di lavoro si può anche verificare che le inversioni rispetto a sfere sono trasformazioni conformi, cioè preservano gli angoli. Le inversioni di fatto generalizzano il concetto di riflessione rispetto a un iperpiano.

Esercizio 2.30. Sia f_t l'inversione rispetto alla sfera di centro te_1 e di raggio t . Dimostrare che per $t \rightarrow \infty$ l'inversione f_t converge alla riflessione rispetto all'iperpiano $x_1 = 0$.

Torniamo adesso al mondo iperbolico. Sia φ l'inversione della sfera di centro $-e_n$ e raggio $\sqrt{2}$. Esplicitamente,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 2 \frac{(x_1, \dots, x_n + 1)}{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (1 + x_n)^2} - (0, \dots, 0, 1)$$

Proposizione 2.31. $\varphi(D^n) = \Pi^n$ e $\varphi(\partial D^n) = \partial \Pi^n \cup \{\infty\}$.

Dimostrazione. Basta controllare l'ultima coordinata di $\varphi(x)$ per $\|x\|_E < 1$, che è

$$2 \frac{x_n + 1}{\|x\|_E^2 + 1 + 2x_n} - 1 = \frac{2x_n + 2 - \|x\|_E^2 - 2x_n - 1}{\|x + e_n\|_E^2} = \frac{1 - \|x\|_E^2}{\|x + e_n\|_E^2} > 0.$$

$\partial D^n = \{x : \|x\|_E = 1\}$. Il punto $-e_n \in \partial D^n$ viene mandato all'infinito; gli altri punti di ∂D^n vengono mandati in punti con ultima coordinata nulla. \square

Proposizione 2.32. *Il pull-back tramite φ della metrica di \mathbb{H}^n è proprio la metrica di \mathbb{D}^n .*

Dimostrazione. Usiamo una notazione in cui x è un vettore colonna e alleggeriamo le cose usando $|x|^2$ per denotare ${}^t x x = \|x\|_E^2$.

Abbiamo $\varphi(x) = \frac{2}{|x+e_n|^2}(x+e_n) + e_n$. Per cui

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{2}{|x+e_n|^2} Id - \frac{4}{|x+e_n|^4} (x+e_n) {}^t (x+e_n) \\ &= \frac{2}{|x+e_n|^2} \left(Id - \frac{2}{|x+e_n|^2} (x+e_n) {}^t (x+e_n) \right). \end{aligned}$$

Abbiamo visto poco fa che l'ultima coordinata di $\varphi(x)$ è $\frac{1-|x|^2}{|x+e_n|^2}$. Per cui per calcolare il pull-back della metrica in $\varphi(x)$ dobbiamo calcolare

$${}^t d\varphi_x \begin{pmatrix} \frac{|x+e_n|^4}{(1-|x|^2)^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{|x+e_n|^4}{(1-|x|^2)^2} \end{pmatrix} d\varphi_x$$

e dunque

$$\begin{aligned} & \frac{|x+e_n|^4}{(1-|x|^2)^2} \frac{4}{|x+e_n|^4} \left(Id - \frac{2}{|x+e_n|^2} (x+e_n) {}^t (x+e_n) \right) \left(Id - \frac{2}{|x+e_n|^2} (x+e_n) {}^t (x+e_n) \right) \\ &= \left(\frac{2}{1-|x|^2} \right)^2 \left(Id - 4 \frac{(x+e_n) {}^t (x+e_n)}{|x+e_n|^2} + 4 \frac{(x+e_n) {}^t (x+e_n) (x+e_n) {}^t (x+e_n)}{|x-e_n|^4} \right) \\ &= \left(\frac{2}{1-|x|^2} \right)^2 \left(Id - 4 \frac{(x+e_n) {}^t (x+e_n)}{|x+e_n|^2} + 4 \frac{(x+e_n) (|x+e_n|^2) {}^t (x+e_n)}{|x-e_n|^4} \right) \\ &= \left(\frac{2}{1-|x|^2} \right)^2 \left(Id - 4 \frac{(x+e_n) {}^t (x+e_n)}{|x+e_n|^2} + 4 \frac{(x+e_n) {}^t (x+e_n)}{|x-e_n|^2} \right) \\ &= \left(\frac{2}{1-|x|^2} \right)^2 Id \end{aligned}$$

\square

Questo calcolo in particolare mostra che φ è un'applicazione conforme rispetto alla metrica euclidea. Il ruolo del centro e del raggio della sfera non è stato fondamentale e lo stesso conto vale in generale:

Esercizio 2.33. Dimostrare che le inversioni rispetto a sfere sono tutte conformi.

Esercizio 2.34. Calcolare la lunghezza della curva $t \mapsto te_n$.

Esercizio 2.35. Calcolare la lunghezza della curva $t \mapsto te_1 + e_n/\sqrt{2}$.

Esercizio 2.36. Trovare una parametrizzazione per lunghezza d'arco per la curva $t \mapsto e_1 \cos t + e_n \sin t$. (Potrebbe risultare utile sapere che la funzione $f(t) = (1 - \cos t)/\sin t$ soddisfa $f' = f/\sin t$)

Esercizio 2.37. Le due curve dei due esercizi precedenti si intersecano in due punti: quale delle due è la più corta tra esse?

Esercizio 2.38. Siano $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (x_1, \dots, x_{n-1}, y_n)$ due punti di \mathbb{H}^n con le stesse prime $n - 1$ coordinate. Dimostrare che il segmento verticale che connette X e Y ha lunghezza $|\log x/y|$. Dimostrare che ogni altra curva che connette X e Y è strettamente più lunga. (Suggerimento: considerare l'ultima coordinata di tale curva).

3. ISOMETRIE

3.1. **Un paio di trucchetti.** Supponiamo di avere in mano una varietà Riemanniana X e di voler conoscere le sue isometrie.

Definizione 3.1. X si dice omogenea se per ogni $x, y \in X$ esiste un'isometria $f : X \rightarrow X$ tale che $f(x) = y$. In altre parole, se il gruppo delle isometrie agisce in modo transitivo su X .

Per esempio, \mathbb{R}^2 e S^2 sono omogenei, un fagiolo no.

Definizione 3.2. Lo stabilizzatore di $x \in X$ è il sottogruppo delle isometrie di X che fissano x :

$$\text{stab}(x) = \{f \in \text{Isom}(X) : f(x) = x\}.$$

Trucchetto 1) Per conoscere le isometrie di una varietà omogenea basta conoscere lo stabilizzatore di un punto x_0 e, per ogni altro $y \in X$, un'isometria f tale che $f(x_0) = y$.

Questo si usa per esempio quando si dice che le isometrie di \mathbb{R}^2 che preservano l'orientazione sono roto-traslazioni: le rotazioni sono lo stabilizzatore dell'origine e le traslazioni fanno il resto.

Lemma 3.3 (Si trova in un qualsiasi libro di geometria Riemanniana). *Se X è connessa allora due isometrie di X che coincidono in un punto insieme ai loro differenziali, sono proprio uguali: se $f(x) = g(x)$ e $df_x = dg_x$, allora $f = g$.*

Il differenziale di un'isometria di $\text{stab}(x)$ è un isomorfismo lineare $df_x : T_x X \rightarrow T_x X$ che preserva il prodotto scalare del punto x , cioè un'isometria di $T_x X$. Queste sono facili da capire perché sono robe in uno spazio vettoriale finito.

Trucchetto 2) Per conoscere $\text{stab}(x)$ ci si può ridurre a studiare i loro differenziali in x . Raccogliamo i trucchetti in un enunciato vero e proprio.

Lemma 3.4. *Sia X una varietà Riemmaniana connessa, sia $x \in X$ un suo punto qualsiasi e sia $\text{Isom}_X(T_x X)$ il gruppo delle isometrie di $T_x X$ indotte dagli elementi di $\text{stab}(x)$.*

Sia ora G un sottogruppo di isometrie di X e sia $\text{Isom}_G(T_x X)$ il sottogruppo di $\text{Isom}_X(T_x X)$ formato dai differenziali degli elementi di $G \cap \text{stab}(x)$. Se:

- (1) G agisce transitivamente su X ;
- (2) $\text{Isom}_G(T_x X) = \text{Isom}_X(T_x X)$;

allora $G = \text{Isom}(X)$.

Dimostrazione. Sia f un'isometria di X , vogliamo dimostrare che $f \in G$. Sia $y = f(x)$. Per ipotesi (1) esiste un elemento $g \in G$ tale che $g(x) = y$. Quindi $g^{-1}f$ è un'isometria che fissa x . Per ipotesi (2) esiste un elemento $h \in G$ tale che $h(x) = x$ e $dh = d(g^{-1}f)$. Per il Lemma 3.3 si ha $g^{-1}f = h$ e dunque $f = gh \in G$. \square

3.2. Riflessioni ortogonali. Consideriamo per il momento una forma bilineare (\cdot, \cdot) su \mathbb{R}^n , simmetrica, non degenera, di segnatura qualsiasi. Esiste sempre una base ortonormale in cui (\cdot, \cdot) è associata alla matrice $J = J_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$. Tipo, il prodotto di Lorentz è rappresentato da $J_{n,1}$.

Definizione 3.5. $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ è il sottogruppo delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^n che preservano (\cdot, \cdot) , cioè $(f(x), f(y)) = (x, y)$.

Definizione 3.6. $O(p, q)$ è il sottogruppo delle matrici $n \times n$ che soddisfano

$${}^t A J_{p,q} A = J_{p,q}.$$

In una base ortonormale in cui (\cdot, \cdot) è rappresentata da $J_{p,q}$, le funzioni in $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ sono rappresentate da matrici in $O(p, q)$.

Definizione 3.7. Dato un iperpiano W e un vettore non nullo $v \notin W$, siano rispettivamente p_W e p_v le proiezioni su W e $\text{span}(v)$ date dalla decomposizione $\mathbb{R}^{n+1} = W \oplus \text{span}(v)$ (quindi $x = p_W(x) + p_v(x)$). La riflessione rispetto a W lungo v è la funzione lineare

$$f(x) = p_W(x) - p_v(x) = x - 2p_v(x) = 2p_W(x) - x.$$

Se v è ortogonale a W , rispetto a (\cdot, \cdot) , allora f si chiama riflessione ortogonale rispetto a W o anche riflessione ortogonale parallela a v .

Come ha da essere, le riflessioni hanno ordine due: coincidono con la loro inversa. Si osservi che l'iperpiano v^\perp non contiene v se e solo se v non è isotropo (cioè $(v, v) \neq 0$, cioè non è di tipo luce); viceversa W non

contiene W^\perp se e solo se W^\perp non è isotropo. In soldoni, le riflessioni ortogonali si possono fare solo parallele a direzioni non isotrope.

Lemma 3.8. *Le riflessioni ortogonali stanno in $Isom(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \langle p_W(x) - p_v(x), p_W(y) - p_v(y) \rangle \\ &= \langle p_W(x), p_W(y) \rangle - \langle p_W(x), p_v(y) \rangle - \langle p_v(x), p_W(y) \rangle + \langle p_v(x), p_v(y) \rangle \\ &= \langle p_W(x), p_W(y) \rangle - 0 - 0 + \langle p_v(x), p_v(y) \rangle \\ &= \langle p_W(x), p_W(y) \rangle + 0 + 0 + \langle p_v(x), p_v(y) \rangle \\ &= \langle p_W(x), p_W(y) \rangle + \langle p_W(x), p_v(y) \rangle + \langle p_v(x), p_W(y) \rangle + \langle p_v(x), p_v(y) \rangle \\ &= \langle p_W(x) + p_v(x), p_W(y) + p_v(y) \rangle = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.9. *Se una riflessione sta in $Isom(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ allora è ortogonale.*

Dimostrazione. Sia f una riflessione rispetto a W lungo $v \notin W$. Se f è un'isometria allora per ogni $w \in W$ si ha

$$(v, w) = (f(v), w) = (-v, w) = -(v, w)$$

per cui $(v, w) = 0$ e dunque $v = W^\perp$.

□

Esercizio 3.10. Scrivere la matrice della riflessione ortogonale di $\mathbb{R}^{n,1}$ parallela a un generico vettore v di tipo spazio (cioè $\langle v, v \rangle > 0$).

In una base ortonormale, le riflessioni ortogonali parallele agli assi

sono quelle usuali, tipo $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ è la riflessione ortogonale

(sia per il prodotto Euclideo che per la forma (\cdot, \cdot)) parallela a e_1 . In particolare $-Id$ è una composizione di riflessioni.

Teorema 3.11. *$Isom(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ è generato dalle riflessioni.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione e supponiamo il teorema vero per ogni $m < n$ (il caso $n = 1$ è ovvio). Sia A una isometria. Vogliamo dimostrare che essa è composizione di riflessioni. Il primo passo sarà dimostrare che a meno di comporre A per una riflessione, possiamo supporre che abbia un punto fisso v ; indi applicheremo il passo induttivo su v^\perp che ha dimensione $n - 1$.

Iniziamo. Scegliamo un vettore non isotropo v e guardiamo dove va a finire. Va in Av . Lo vogliamo rimettere a posto con una riflessione, la direzione da prendere è $Av - v$.

Se $Av - v$ fosse isotropo, lavoriamo con $-A$ anziché A , tanto $-Id$ è prodotto di riflessioni e siamo a posto.

Esercizio 3.12. Verificare che se $Av - v$ è isotropo allora $-Av - v$ non lo è.

Sia dunque f la riflessione parallela a $Av - v$.

Esercizio 3.13. Verificare che $Av - v$ e $Av + v$ sono ortogonali tra loro e che la decomposizione di v è data da

$$v = \frac{Av + v}{2} - \frac{Av - v}{2}.$$

Quindi

$$f(v) = \frac{Av + v}{2} + \frac{Av - v}{2} = Av$$

e dunque

$$f \circ A(v) = v.$$

Quindi a meno di composizione per riflessioni, possiamo supporre che $A(v) = v$. Siccome A è un'isometria, allora $A(v^\perp) = v^\perp$ e, siccome v lo abbiamo scelto non isotropo, la restrizione di (\cdot, \cdot) a v^\perp è non degenera. In oltre la restrizione di A a v^\perp è un'isometria. Quindi è prodotto di riflessioni. Le riflessioni di v^\perp si estendono a riflessioni di \mathbb{R}^n semplicemente imponendo che v sia fisso ed estendendo per linearità. Dunque A è composizione di riflessioni. \square

Esercizio 3.14. Dimostrare che se v non è isotropo, allora le riflessioni ortogonali di v^\perp si estendono a riflessioni ortogonali di \mathbb{R}^n .

In termini matriciali, $O(p, q)$ è generato dalle matrici di riflessioni ortogonali.

3.3. Le isometrie di \mathbb{H}^n nel modello dell'iperboloide. Le isometrie di $\mathbb{R}^{n,1}$ preservano anche l'iperboloide a due falde, ma potrebbero scambiare le due falde, per esempio la riflessione ortogonale parallela a e_{n+1} le scambia. Le isometrie di $\mathbb{R}^{n,1}$ che preservano \mathcal{I}^n inducono isometrie di \mathbb{I}^n per restrizione, questo semplicemente perchè la metrica di \mathbb{I}^n è ottenuta per restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $T\mathcal{I}^n$. In particolare, le riflessioni ortogonali che preservano \mathcal{I}^n sono isometrie di \mathbb{I}^n . A priori potrebbero esserci isometrie di \mathbb{I}^n che non provengono da restrizioni di isometrie di $\mathbb{R}^{n,1}$. Vediamo invece che non ce ne sono altre: sono tutte lineari e generate da riflessioni.

Iniziamo con sistemare la cosa dello scambio delle falde.

Lemma 3.15. *Sia $v \in \mathcal{I}^n$ un vettore qualsiasi. Un'isometria f non scambia le falde se e solo se $f(v) \in \mathcal{I}^n$.*

Dimostrazione. Siccome f è un'isometria $f(v)$ sta in \mathcal{I}^n oppure in $-\mathcal{I}^n$. Le due falde sono le componenti connesse di $\{\|x\|^2 = -1\}$ quindi \mathcal{I}^n è la componente connessa di v e dunque $f(\mathcal{I}^n)$ è la componente connessa di $f(v)$, che è \mathcal{I}^n se $f(v) \in \mathcal{I}^n$, e $-\mathcal{I}^n$ se $f(v) \in -\mathcal{I}^n$. \square

Corollario 3.16. *Una riflessione ortogonale parallela a v preserva le falde se e solo se $\langle v, v \rangle > 0$.*

Dimostrazione. Siccome parliamo di riflessioni ortogonali, $\langle v, v \rangle \neq 0$. Se $\langle v, v \rangle > 0$ allora v^\perp contiene vettori di norma quadra negativa, e quindi anche vettori in \mathcal{I}^n . Siccome v^\perp è fissato dalla riflessione parallela a v , il Lemma 3.15 conclude. Viceversa se $\langle v, v \rangle < 0$ allora un multiplo di v appartiene a \mathcal{I}^n ; per definizione la riflessione parallela a v inverte tutti i multipli di v ; il Lemma 3.15 conclude. \square

Teorema 3.17. *Il gruppo delle isometrie di \mathbb{I}^n è generato dalle (restri- zioni delle) riflessioni ortogonali che preservano \mathcal{I}^n , agisce transitiva- mente su \mathbb{I}^n e gli stabilizzatori dei punti sono isomorfi a $O(n)$.*

Dimostrazione. Sia $G < Isom(\mathbb{I}^n)$ il sottogruppo generato dalle rifles- sioni ortogonali che preservano la falda \mathcal{I}^n . Vogliamo usare il Lem- ma 3.4 ergo dividiamo la dimostrazione in due passi e dimostriamo che

- (1) G (indi anche tutto $Isom(\mathbb{I}^n)$) agisce in modo transitivo su \mathbb{I}^n
- (2) $Isom_G(T_{e_{n+1}}\mathbb{I}^n) = Isom_{\mathbb{I}^n}(T_{e_{n+1}}\mathbb{I}^n)$.

Procediamo. (1) siano $x, y \in \mathbb{I}^n$: scommettiamo che la riflessione or- togonale parallela a $x - y$ manda x in y ? Prima di tutto osserviamo che $\langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = -2(1 + \langle x, y \rangle)$; per la disuguaglianza tipo Schwarz $\langle x, y \rangle < -1$ quindi $1 + \langle x, y \rangle < 0$ ergo $\langle x - y, x - y \rangle > 0$, in particolare $x - y$ non è isotropo e la riflessione pa- rallela a esso preserva \mathcal{I}^n (Corollario 3.16). La riflessione in questione è

$$f(v) = v - 2\langle v, x - y \rangle \frac{x - y}{\|x - y\|^2}$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 2\langle x, x - y \rangle \frac{x - y}{\|x - y\|^2} \\ &= \frac{x\|x - y\|^2 - 2\|x\|^2(x - y) + 2\langle x, y \rangle(x - y)}{\|x - y\|^2} \\ &= \frac{x(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle) - 2\|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + y(2\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle)}{\|x - y\|^2} = y \end{aligned}$$

(ove nell'ultimo passaggio si è usato $\|x\|^2 = \|y\|^2$.)

Passo (2): Siccome $T_{e_{n+1}}\mathbb{I}^n = e_{n+1}^\perp = \{x_{n+1} = 0\}$, su cui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induce il prodotto scalare standard, ogni isometria di \mathbb{I}^n che fissa e_{n+1} induce su $T_{e_{n+1}}\mathbb{I}^n$ un elemento di $O(n)$. Cioè $Isom_{\mathbb{I}^n}(T_{e_{n+1}}\mathbb{I}^n) \leq O(n)$.

Le riflessioni ortogonali che fissano e_{n+1} preservano \mathcal{I}^n perché ne fissano un punto (Lemma 3.15), quindi stanno in G . In oltre esse sono tutte del tipo $\begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix}$ con A riflessione ortogonale del piano $\{x_{n+1} = 0\}$. Siccome $O(n)$ è generato da riflessioni (Teorema 3.11)

allora $Isom_G(T_{e_{n+1}}\mathbb{I}^n)$ è tutto $O(n)$. In particolare $Isom_G(T_{e_{n+1}}\mathbb{I}^n) = Isom_{\mathbb{I}^n}(T_{e_{n+1}}\mathbb{I}^n)$ e $stab(e_{n+1})$ è isomorfo a l'intero $O(n)$.

Per il punto (1) gli stabilizzatori dei punti sono tutti isomorfi tra loro, ergo isomorfi a $stab(e_{n+1})$ che è isomorfo a $O(n)$. \square

Corollario 3.18. *Le isometrie di \mathbb{I}^n sono restrizioni di applicazioni lineari di $\mathbb{R}^{n,1}$ che preservano il prodotto di Lorentz. Lo stabilizzatore di e_{n+1} è $\begin{pmatrix} O(n) \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Definizione 3.19. Denotiamo $O^+(n, 1)$ denota il sottogruppo di $O(n, 1)$ formato dagli elementi che preservano le falde. Quindi

$$Isom(\mathcal{I}^n) = O^+(n, 1).$$

Corollario 3.20. *Le isometrie di \mathbb{I}^n agiscono transitivamente sul fibrato tangente unitario di \mathbb{I}^n e in modo libero e transitivo sul fibrato dei riferimenti ortonormali di \mathbb{I}^n .*

Cioè:

- (1) *(Azione transitiva su $T^1\mathbb{I}^n$) per ogni $x, y \in \mathbb{I}^n$, per ogni $v \in T_x\mathbb{I}^n, w \in T_y\mathbb{I}^n$ unitari, esiste un'isometria f tale che $f(x) = y$ e $df_x(v) = w$.*
- (2) *(Azione libera e transitiva sul fibrato dei riferimenti ortonormali) per ogni $x, y \in \mathbb{I}^n$, per ogni $(v_1, \dots, v_n) \in T_x\mathbb{I}^n, (w_1, \dots, w_n) \in T_y\mathbb{I}^n$ basi ortonormali, esiste un'unica isometria f tale che $f(x) = y$ e $df_x(v_i) = w_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.*

Esercizio 3.21. Calcolare tutte le matrici in $O(1, 1)$ e di queste individuare quelle che preservano le falde.

3.4. Le isometrie di \mathbb{H}^n nel modello proiettivo.

Proposizione 3.22. *Le isometrie di \mathbb{H}^n nel modello proiettivo sono tutte e sole le proiettività che preservano D .*

Dimostrazione. Siccome il birapporto è preservato dalle proiettività, allora ogni proiettività che preserva il disco D è un'isometria per la metrica iperbolica. D'altronde, siccome le isometrie di \mathbb{I}^n son tutte lineari, ognuna di esse induce una proiettività che preserva il disco. \square

In termini matriciali $Isom(D) = PO(n, 1)$.

Questo fatto non è ovvio a priori. Per esempio, se consideriamo un triangolo equilatero e lo dotiamo della metrica del birapporto come nel Fatto 2.17, otteniamo un onestissimo spazio metrico, le proiettività che lo preservano sono isometrie, ma ce ne sono altre!

Facciamo ora una piccola riflessione su come si riflettono le riflessioni nel modello proiettivo. Indichiamo con $[x] = P(x)$ la classe proiettiva di $x \in \mathbb{R}^{n,1}$. Se f è una riflessione ortogonale di $\mathbb{R}^{n,1}$, rispetto all'iperpiano W e parallela a $v = W^\perp$, essa nel proiettivo avrà un iperpiano

fisso: quello corrispondente a W e in più un altro punto fisso: quello corrispondente a v . Infatti nel proiettivo $[v] = [-v] = [f(v)]$. $[v]$ si chiama talvolta polare di f . Non ci sono altri punti fissi perché f non ha autovettori all'infuori di W e v .

Siccome facciamo riflessioni che preservano \mathcal{I}^n allora $\langle v, v \rangle > 0$, cioè $[v]$ sta fuori D e $[W]$ interseca D . Siccome f fissa $[W]$ e lascia D invariante, i piani tangenti a ∂D nei punti di $[W] \cap D$ sono invarianti. Essi si intersecano tutti in un punto, che è fisso per f e quindi è esattamente il punto $[v]$. (Per visualizzarlo si tagli una palla con una piano e si consideri il cono tangente all'intersezione tra palla e piano).

Da ciò segue in particolare che tutte le rette per $[v]$ e un punto $p \in D$ intersecano $[W]$ dentro D . Ogni tale retta è invariante per f perché contiene due punti fissi.

Il punto $f(p)$ si calcola quindi come segue: detto y il punto di intersezione tra $[W]$ e la retta per $[v]$ e p , $f(p)$ è il punto q su tale retta che soddisfa $d_{\mathbb{H}}(p, y) = d_{\mathbb{H}}(q, y)$.

In tutto ciò $[v]$ potrebbe essere un punto all'infinito, in tal caso stiamo facendo riflessioni rispetto a iperpiani per l'origine (cioè roba che proviene da $\text{stab}(e_{n+1})$) ed esse coincidono con le riflessioni ortogonali euclidee rispetto a tali iperpiani.

3.5. Applicazioni conformi e isometrie nel modello del disco e del semipiano. I modelli del disco e del semipiano sono modelli conformi: in essi la metrica iperbolica si esprime punto per punto come un multiplo di quella Euclidea:

$$ds^2(v)_x = f(x) \|v\|_E^2$$

In particolare in tali modelli, due vettori sono ortogonali tra loro rispetto alla metrica iperbolica se e solo se sono perpendicolari rispetto al prodotto scalare standard. Similmente, gli angoli che si vedono col goniometro in questi modelli sono gli stessi di quelli che si calcolano usando la metrica iperbolica.

Definizione 3.23. Siano M e N due varietà Riemanniane, con metriche rispettivamente g_M, g_N . Una funzione $\varphi : M \rightarrow N$ si dice **conforme** se il pull-back della metrica g_N è un multiplo di g_M , cioè se esiste una funzione positiva f tale che $\varphi^*(g_N) = f(x)g_M$.

Il gruppo dei diffeomorfismi conformi di M si denota con $\text{Conf}(M)$.

Con questa terminologia le inclusioni $i_{\mathbb{D}} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $i_{\mathbb{H}} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono applicazioni conformi quando dotiamo \mathbb{D}^n e \mathbb{H}^n della metrica iperbolica e \mathbb{R}^n di quella Euclidea.

Le isometrie sono tautologicamente applicazioni conformi di una varietà in sé (con la funzione $f = 1$). Quindi per ogni isometria φ dello spazio iperbolico le funzioni

$$i_{\mathbb{D}} \circ \varphi \circ (i_{\mathbb{D}})^{-1} \quad i_{\mathbb{H}} \circ \varphi \circ (i_{\mathbb{H}})^{-1}$$

sono elementi di $Conf(D^n)$ e $Conf(\Pi^n)$ rispettivamente. Beh, non ce ne sono altre.

Esercizio 3.24. Dimostrare che le inversioni rispetto a sfere sono applicazioni conformi. (Hint: il calcolo non è diverso da quello con cui abbiamo dimostrato che \mathbb{H}^n e \mathbb{D}^n sono isometrici, anzi è pure più facile).

Esercizio 3.25. Sia f un'inversione rispetto a una sfera di centro c e raggio R . Dimostrare che:

- (1) Se S è una sfera che non contiene c allora $f(S)$ è una sfera che non contiene c ;
- (2) Se S è una sfera che contiene c allora $f(S)$ è un iperpiano che non contiene c ;
- (3) Se S è un iperpiano che non contiene c allora $f(S)$ è una sfera che non contiene c ;
- (4) Se S è un iperpiano che contiene c allora $f(S)$ è un iperpiano che contiene c .

(Hint: dimostrare che basta dimostrarlo per $n = 2$, $c = 0$ e $R = 1$; indi dimostrarlo in tal caso.)

Facciamo insieme il primo punto. E facciamolo nel caso $n = 2$, $c = 0$, $R = 1$ e usiamo coordinate complesse per fare i calcoli. Sia f l'inversione rispetto alla sfera di centro 0 e raggio 1. Esplicitamente $f(z) = 1/\bar{z}$. Sia C il cerchio di centro $p \in \mathbb{R}$ e raggio $r \neq p$ (in modo che non passi da zero). L'intersezione di C con \mathbb{R} è composta dai due punti $x = c - r$ e $y = c + r$; sia p' il punto medio di $f(x) = 1/x$ e $f(y) = 1/y$. Esplicitamente

$$p' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-r} + \frac{1}{p+r} \right) = \frac{p}{p^2 - r^2}$$

ed è il candidato a essere il centro di $f(C)$; facendo le proporzioni, se $f(C)$ è un cerchio dovrà essere di raggio $r/|p^2 - r^2|$. Andiamo a verificare che $f(C)$ è il cerchio di centro p' e raggio $r' = r/|p^2 - r^2|$. Dobbiamo solo controllare che $|z - p| = r \Rightarrow |(f(z) - p')(p^2 - r^2)| = r$

$$|(f(z) - p')(p^2 - r^2)| = \left| \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{p}{p^2 - r^2} \right) (p^2 - r^2) \right| = \left| \frac{p^2 - r^2 - \bar{z}p}{\bar{z}} \right|$$

Siccome $|z - p| = r$ si ha

$$(z - p)(\bar{z} - p) = r^2 \quad p - \bar{z} = \frac{r^2}{p - z}$$

e dunque

$$\left| \frac{p^2 - r^2 - \bar{z}p}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{p(p - \bar{z}) - r^2}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{\frac{r^2}{p-z} - r^2}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{zr^2}{(p-z)\bar{z}} \right| = \left| \frac{r^2}{p-z} \right| = r$$

□

Esercizio 3.26. Siano S, S' due sfere differenti. S' è invariante per l'inversione rispetto a S se e solo se S e S' sono ortogonali tra loro, se e solo se S è invariante per l'inversione rispetto a S' . (Hint: il triangolo con due vertici nei centri e un terzo in $S \cap S'$ è rettangolo se...).

Esercizio 3.27. Dimostrare che le inversioni rispetto a sfere ortogonali a ∂D^n sono isometrie di \mathbb{D}^n .

Esercizio 3.28. Dimostrare che le inversioni rispetto a sfere ortogonali a $\partial \Pi^n$ sono isometrie di \mathbb{I}^n .

Esercizio 3.29. Sia G il sottogruppo delle isometrie di \mathbb{D}^n generato dalle inversioni rispetto a sfere ortogonali al bordo (inclusi iperpiani). Dimostrare che G agisce transitivamente su D^n e che $stab_G(0) = O(n)$.

In generale vale il seguente fatto.

Fatto 3.30 (Vedasi [BP]). *Valgono i seguenti fatti (gli iperpiani di \mathbb{R}^n li consideriamo sfere passanti per l'infinito):*

- (1) $Conf(S^n) = Conf(\mathbb{R}^n \cup \{\infty\})$ è generato da inversioni rispetto a sfere.
- (2) $Conf(D^n) = \{f \in Conf(\mathbb{R}^n) : f(D^n) = D^n\}$;
- (3) $Conf(\Pi^n) = \{f \in Conf(S^n) : f(\Pi^n) = \Pi^n\}$;
- (4) $Isom(\mathbb{D}^n) = Conf(D^n)$ ed è generato da inversioni rispetto a sfere ortogonali a ∂D^n .
- (5) $Isom(\mathbb{I}^n) = Conf(\Pi^n)$ ed è generato da inversioni rispetto a sfere ortogonali a $\partial \Pi^n$.
- (6) Le applicazioni conformi di D^n sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$x \mapsto Ai(x)$$

ove $A \in O(n)$ e i è o l'identità oppure un'inversione rispetto a una sfera ortogonale al bordo di D^n .

- (7) Le applicazioni conformi di Π^n sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$x \mapsto \lambda \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i(x) + \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

ove $\lambda > 0$, $A \in O(n-1)$, i è o l'identità oppure un'inversione rispetto a una sfera ortogonale al bordo di Π^n , $b \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Esercizio 3.31. Dimostrare che le applicazioni del tipo (6) sono tutte applicazioni conformi da D^n in sé.

Esercizio 3.32. Dimostrare che le applicazioni del tipo (7) sono tutte applicazioni conformi da Π^n in sé.

4. GEODETICHE

4.1. Definizione.

Definizione 4.1 (geodetiche). Una geodetica in uno spazio metrico è:

- [versione parametrizzata:] una curva $\gamma(t)$ tale che $\forall x, y$ si ha $d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|$.
- [versione non parametrizzata:] una curva $\gamma(t)$ tale che $\forall x, y$ la distanza $d(\gamma(x), \gamma(y))$ è la lunghezza della restrizione di γ ad $[x, y]$.
- [versione locale:] una curva $\gamma(t)$ tale $\forall x \exists \varepsilon > 0$ tale la restrizione di γ a $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ sia geodetica secondo le due definizioni di cui sopra, parametrizzata e non.

In generale non è ovvio che esistano geodetiche, per esempio $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, con la distanza indotta da \mathbb{R}^2 non ha geodetiche: la distanza Euclidea tra due punti di S^1 è realizzata dalla lunghezza Euclidea della corda tra essi, e l'arco di circonferenza è troppo lungo!

In geometria Riemanniana si definisce la distanza tra due punti come l'inf delle lunghezze delle curve tra essi e le geodetiche son sempre nella versione parametrizzata locale (in geometria Riemanniana sono curve che soddisfano una determinata equazione differenziale ordinaria).

Per quanto ci riguarda non faremo distinzione tra le varie versioni se sarà chiaro dal contesto quale usiamo. Per il momento useremo la versione locale: γ è una geodetica se ogni perturbazione locale ne accresce la lunghezza.

Il seguente fatto è un teorema standard di geometria Riemanniana.

Fatto 4.2. *Sia M una varietà dotata di una metrica Riemanniana.*

- (1) *Per ogni $x \in M$ e $v \in T_x M$ esiste un'unica geodetica che parte da x con velocità iniziale v .*
- (2) *Ogni $x \in M$ ha un intorno U tale che per ogni $z, y \in U$ esiste un'unica geodetica γ tra z e y contenuta in U , in oltre ogni altra curva che connette z a y in M è più lunga di γ .*

Nello spazio iperbolico vale molto di più.

4.2. Nel modello dell'iperboloide.

Teorema 4.3. *Nel modello dell'iperboloide di \mathbb{H}^n , per ogni $X, Y \in \mathbb{I}^n$, la curva ottenuta intersecando $\text{span}(X, Y)$ con \mathbb{I}^n è la più corta che connette X e Y .*

Dimostrazione. Sfrutteremo ora il fatto³ che, fissato X , ogni punto $P \in \mathbb{H}^n$ si scrive in modo unico come $P = X \cosh \alpha + V \sinh \alpha$ per un qualche $\alpha > 0$ e $V \in X^\perp$ di norma unitaria.

In particolare

$$Y = X \cosh t_y + V_y \sinh t_y$$

per certi V_y, t_y . La curva data da

$$t \mapsto X \cosh t + V_y \sinh t$$

³Esercizio 2.12

è esattamente la parametrizzazione per lunghezza d'arco dell'intersezione di $\text{span}(X, Y) \cap \mathbb{I}^n$. Ivi, il segmento tra X e Y è lungo t_y . Non ci resta che dimostrare che ogni altra curva che connette X a Y in \mathbb{I}^n è lunga più di t_y .

Sia $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^n$ una qualsiasi curva che connette X a Y . Se η passa più volte da X è certamente più lunga di una sua porzione, quindi supponiamo che ciò non succeda. Come osservato poc'anzi, esistono $\alpha(t)$ e $V(t) \in X^\perp$ di norma unitaria per cui

$$\eta(t) = X \cosh \alpha(t) + V(t) \sinh \alpha(t).$$

Siccome $\eta(1) = Y$ si ha $V(1) = V_y$ (e $\alpha(1) = t_y$). Facendo la derivata

$$\dot{\eta}(t) = \dot{\alpha}(t)X \sinh \alpha(t) + V(t)\dot{\alpha}(t) \cosh \alpha(t) + \dot{V}(t) \sinh \alpha(t)$$

Si noti che siccome $V(t)$ è un vettore di norma unitaria in $X^\perp = T_X \mathbb{I}^n$, allora $\dot{V}(t)$ sta in $X^\perp \cap V(t)^\perp$. Ne segue che

$$\|\dot{\eta}(t)\|^2 \leq \|\dot{\alpha}(t)X \sinh \alpha(t) + V(t)\dot{\alpha}(t) \cosh \alpha(t)\|^2 = \dot{\alpha}(t)^2.$$

In oltre l'uguaglianza vale solo se $\dot{V} = 0$.

La curva

$$\xi(t) = X \cosh \alpha(t) + V_y \sinh \alpha(t)$$

soddisfa $\|\dot{\xi}(t)\|^2 = \dot{\alpha}(t)^2$, ergo è più corta di η , ed è strettamente più corta se V non è costante. In oltre, ξ è una curva che connette X a Y in $\text{span}(X, Y) \cap \mathbb{I}^n$ e dunque essa è lunga almeno t_y . \square

Corollario 4.4. *Ogni coppia di punti distinti in \mathbb{H}^n è connessa da un'unica geodetica.*

Dimostrazione. La curva $\gamma : [0, t_y] \rightarrow \mathbb{I}^n$ data da $\gamma(t) = X \cosh t + V_y \sinh t$, in quanto la più corta che unisce X a Y , è l'unica geodetica tra essi. \square

Corollario 4.5. *Abbiamo una dimostrazione del Fatto 2.7.*

Dimostrazione. Basta mettere insieme la definizione di distanza, il Teorema 4.3 e l'Esercizio 2.11. \square

Definizione 4.6. Sia M una varietà dotata di una metrica Riemanniana. Un sottoinsieme X di M si dice **convesso** se per ogni $x, y \in X$ ogni segmento geodetico tra x e y è contenuto in X .

Definizione 4.7. Sia M una varietà dotata di una metrica Riemanniana. Un sottoinsieme X di M si dice **totalmente geodetico** se per ogni $x, y \in X$ ogni geodetica passante per x e y è interamente contenuta in X .

Per esempio in \mathbb{R}^n Euclideo le geodetiche son le rette e i sottoinsiemi totalmente geodetici sono i sottoinsiemi "dritti" cioè i sottospazi affini (rette, piani etc...).

Si osservi che i totalmente geodetici son convessi.

Lemma 4.8. *L'insieme dei punti fissi di un'isometria di \mathbb{H}^n è totalmente geodetico.*

Dimostrazione. Sia f un'isometria di \mathbb{H}^n e siano x, y punti fissi di f . Sia γ l'unica geodetica tra x e y (Corollario 4.4), parametrizzata per lunghezza d'arco. La curva $f(\gamma)$ è anch'essa parametrizzata per lunghezza d'arco e lunga quanto γ perché f è un'isometria. D'altronde, siccome x, y son fissi, $f(\gamma)$ è una geodetica che collega x e y . Per l'unicità si ha $f(\gamma) = \gamma$. Siccome sono entrambe parametrizzate per lunghezza d'arco, si ha $f(\gamma(t)) = \gamma(t)$ per ogni t . Cioè l'intera γ è contenuta nell'insieme dei punti fissi di f . \square

Lemma 4.9. *Sia $H \subseteq \mathbb{I}^n$ un sottoinsieme totalmente geodetico, sia $x \in H$ e sia $T_x H = \{v \in T_x \mathbb{I}^n : \exists \text{ geodetica a velocità costante } \gamma \subseteq H : \gamma(0) = x, \dot{\gamma}(0) = v\}$. Allora $T_x H$ è un sottospazio vettoriale di $T_x \mathbb{I}^n$ e H coincide con $\text{span}(x, T_x H) \cap \mathbb{I}^n$.*

Dimostrazione. Per definizione di $T_x H$, le geodetiche uscenti da x con velocità iniziale in $T_x H$ stanno in H . D'altronde siccome H è totalmente geodetico, ogni $y \in H$ è contenuto nella geodetica di H che passa per x e y , dunque in una geodetica uscente da x con velocità iniziale in $T_x H$. Perciò H coincide con l'insieme di tutte le geodetiche uscenti da x con velocità iniziale in $T_x H$. Per Teorema 4.3, H è l'intersezione con \mathbb{I}^n di $\cup_{v \in T_x H} \text{span}(x, v) \subseteq \text{span}(x, T_x H)$. Se dimostriamo che $T_x H$ è un sottospazio vettoriale, allora avremo

$$\cup_{v \in T_x H} \text{span}(x, v) = \text{span}(x, T_x H)$$

e la dimostrazione sarà conclusa. Vediamolo. La chiusura per multipli è ovvia: basta riparametrizzare le geodetiche. Mostriamo la chiusura per somma. Siano $v_1, v_2 \in T_x H$. A meno di isometrie possiamo supporre $x = e_{n+1}, v_1 = ae_1 + be_2, v_2 = cv_1 - be_2$ (in modo che $v_1 + v_2 \in \text{span}(e_1)$). Ci basta dunque lavorare in \mathbb{I}^2 , dunque $n + 1 = 3$. Sia $\xi_1(t) = e_3 \cosh(t) + v_1 \sinh(t)$ la geodetica emanante da x con velocità iniziale v_1 e similmente definiamo ξ_2 ; esse son contenute in H . Sia η la geodetica tra $\xi_1(42)$ e $\xi_2(42)$. Essa sta in H perchè H è totalmente geodetico. In oltre, per come sono messi v_1, v_2 , esiste t_0 per cui $\eta(t_0) \in \text{span}(e_3, e_1)$. Sia infine γ_0 la geodetica che passa per x e $\eta(t_0)$. Essa sta in H per totale geodeticità ed il suo vettore velocità in x è parallelo a e_1 , che è un multiplo di $v_1 + v_2$; la chiusura per multipli conclude. \square

Corollario 4.10. *Gli insiemi totalmente geodetici di \mathbb{I}^n sono intersezioni di \mathcal{I}^n con sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{n,1}$ e viceversa.*

Dimostrazione. Una delle affermazioni segue dal fatto che $\text{span}(x, T_x H)$ è un sottospazio vettoriale, l'altra dal fatto che gli iperpiani vettoriali sono il luogo dei punti fissi delle riflessioni ortogonali. Quindi essi sono totalmente geodetici, e così lo sono anche le loro intersezioni. \square

Si noti che questo corollario in particolare fornisce una dimostrazione alternativa al fatto che le geodetiche di \mathbb{H}^n sono le intersezioni di \mathcal{I}^n con piani vettoriali. Certo, si è usato il Teorema 4.3 per dimostrare il Lemma 4.8, ma a ciò si può ovviare con il seguente fatto di geometria Riemanniana.

Esercizio 4.11. Usare il Fatto 4.2 per dimostrare che in generale (quindi non necessariamente in \mathbb{H}^n) le componenti connesse degli insiemi dei punti fissi delle isometrie sono totalmente geodetiche.

Proposizione 4.12. *Sia $H \subseteq \mathbb{H}^n$ un sottoinsieme totalmente geodetico di dimensione k . Allora H è isometrico a \mathbb{H}^k .*

Dimostrazione. Sia $x \in H$. Siccome le isometrie agiscono in modo transitivo, a meno di isometrie possiamo supporre che $x = e_{n+1}$. Dunque H è l'intersezione di \mathbb{H}^n con un sottospazio vettoriale V che contiene e_{n+1} . A meno di elementi di $\text{stab}(e_{n+1})$ possiamo supporre che $V = \text{span}(e_{n+1}, e_1, \dots, e_k)$. La restrizione del prodotto di Lorentz a V è dunque il prodotto di Lorentz k -dimensionale, ergo $V \cap \mathbb{H}^n$ è isometrico a \mathbb{H}^k . \square

Proposizione 4.13. *Ogni k -upla di punti $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{H}^n$ è contenuta in sottospazio totalmente geodetico e k -dimensionale. Tale sottospazio è unico se e solo se x_0, \dots, x_k non sono contenuti in un sottospazio totalmente geodetico di dimensione minore di k .*

Dimostrazione. In $\mathbb{R}^{n,1}$ i punti x_i generano un sottospazio. Esso ha dimensione $k + 1$ se essi sono linearmente indipendenti tra loro, e ha dimensione $\leq k$ altrimenti. La tesi segue. \square

4.3. Nel modello proiettivo.

Teorema 4.14. *Nel modello proiettivo di \mathbb{H}^n le geodetiche sono segmenti. Gli insiemi totalmente geodetici sono intersezioni di sottospazi affini col disco.*

Dimostrazione. Discende dal Corollario 4.10 e dal fatto che le proiezioni di sottospazi vettoriali nella carta affine $x_{n+1} = 1$ sono sottospazi affini. \square

Corollario 4.15. *Abbiamo una dimostrazione del Fatto 2.17.*

Dimostrazione. Siano $x \neq y$ due punti di \mathbb{H}^n nel modello proiettivo. Siccome le isometrie sono proiettività, esse preservano il birapporto. In oltre, esse preservano le rette (sia perchè sono isometrie sia perchè sono proiettività) e tautologicamente preservano D^n . Dunque se f è un'isometria e x_∞, y_∞ sono le intersezioni della retta per x, y col bordo del disco, allora $f(x_\infty) = f(x)_\infty$ e $f(y_\infty) = f(y)_\infty$, dunque

$$[x_\infty, x, y, y_\infty] = [f(x_\infty), f(x), f(y), f(y_\infty)] = [f(x)_\infty, f(x), f(y), f(y)_\infty].$$

Per il Corollario 3.20, a meno di isometrie possiamo supporre che y sia l'origine e che x sia del tipo xe_1 . Il calcolo fatto nell'Esercizio 2.20 conclude. \square

Esercizio 4.16. Trovare una formula che leghi l'angolo euclideo che si vede nel modello del disco e l'angolo iperbolico tra due geodetiche che si intersecano.

Osservazione 4.17. Nel modello proiettivo è particolarmente evidente la non validità del V postulato di Euclide: Data una geodetica e un punto fuori da essa, esiste una barilata di geodetiche per tale punto che non intersecano quella data.

4.4. Nel modello del disco. Nel modello del disco ci sono alcune geodetiche che sono proprio facili da vedere. Le altre sono facili da vedere.

Quelle proprio facili da vedere sono quelle che passano per il centro: i sottospazi di \mathbb{R}^{n+1} che contengono e_{n+1} si proiettano infatti in sottospazi per l'origine.

Esercizio 4.18. Dimostrarlo.

Dunque abbiamo:

Lemma 4.19. *Le geodetiche per $0 \in \mathbb{D}^n$ sono intersezioni di rette vettoriali con \mathbb{D}^n . I sottospazi totalmente geodetici passanti per $0 \in \mathbb{D}^n$ sono intersezioni di sottospazi vettoriali con \mathbb{D}^n .*

Dimostrazione. L'avete appena dimostrato. \square

Le altre geodetiche sono facili da vedere: sono archi di circonferenze perpendicolari al bordo.

Teorema 4.20. *Ogni geodetica in \mathbb{D}^n è o un diametro di \mathbb{D}^n o un arco di circonferenza che interseca perpendicolarmente $\partial\mathbb{D}^n$.*

Dimostrazione. Sia γ e siano $x, y \in \gamma$. I punti $0, x, y$ sono contenuti in un piano passante per 0 , che taglia \mathbb{D}^n in un piano totalmente geodetico isometrico a \mathbb{D}^2 , dunque γ è contenuta in tale piano e possiamo fare i calcoli lì. Supponiamo quindi $n = 2$. Esiste un'isometria $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ tale che $f(x) = 0$, dunque $f(\gamma)$ è l'intersezione di una retta r per l'origine con \mathbb{D}^2 . Sappiamo che le isometrie sono composizioni di inversioni rispetto a cerchi. Per l'Esercizio 3.25 $f^{-1}(r)$ è o una retta o una circonferenza, perpendicolare al bordo di \mathbb{D}^n perchè le inversioni sono conformi e r lo era. Le rette che incontrano ortogonalmente $\partial\mathbb{D}^n$ sono diametri. \square

Si poteva anche confezionare una dimostrazione usando il Lemma 4.8. Similmente si può dimostrare che

Esercizio 4.21. I sottospazi totalmente geodetici di \mathbb{D}^n sono intersezioni di \mathbb{D}^n o con sottospazi vettoriali o con sfere perpendicolari a $\partial\mathbb{D}^n$.

4.5. Nel modello del semipiano. Avendo le geodetiche nel modello del disco, e sapendo che un'isometria esplicita tra il modello del disco e quello del semipiano è data da un'inversione rispetto a una sfera, abbiamo praticamente gratis la descrizione delle geodetiche e dei sottospazi totalmente geodetici di \mathbb{H}^n .

Teorema 4.22. *Le geodetiche di \mathbb{H}^n sono o rette verticali o archi di circonferenza perpendicolari al bordo. I sottospazi totalmente geodetici sono o sottospazi affini verticali o intersezione con Π^n di sfere ortogonali a $\partial\Pi^n$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata per esercizio. \square

5. DISTANZE E INFINITI

5.1. Distanze da e tra geodetiche. In questa parte faremo dei conti che sarebbero squisitamente Riemmanniani, basati sul fatto che la funzione distanza tra geodetiche è strettamente convessa in curvatura negativa. Qui però, faremo tutto a mano.

Prima richiamiamo/diamo un paio di definizioni. A volte è comodo considerare le geodetiche come sottoinsiemi. Sarà chiaro dal contesto quando ci riferiremo alle funzioni $\gamma(t)$ o alle loro immagini $\{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Definizione 5.1. Dato un punto p e un insieme X in uno spazio metrico, la distanza tra p e X è definita come

$$d(p, X) = \inf_{x \in X} d(p, x).$$

Dati due sottoinsiemi X, Y la loro distanza è

$$d(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} d(x, y).$$

Le palle e sfere metriche son definite usualmente:

Definizione 5.2. In uno spazio metrico X , per ogni $p \in X$ e $r > 0$ le palle e le sfere centrate in x e di raggio r sono:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad S_r(x) = \{y \in X : d(x, y) = r\}.$$

Dato un sottoinsieme $A \subseteq X$ si pone

$$I_r(x) = \{y \in X : d(y, A) < r\} \quad S_r(A) = \{y \in X : d(y, A) = r\}.$$

Esercizio 5.3. Nel modello proiettivo le palle metriche centrate nell'origine sono palle Euclidee centrate nell'origine (ma i raggi iperbolici e Euclidei son diversi).

Esercizio 5.4. Nel modello del disco le palle metriche sono anche palle Euclidee, ma il centro iperbolico coincide col centro Euclideo solo nell'origine.

Esercizio 5.5. Nel modello del semispazio le palle metriche sono anche palle Euclidee, ma il centro iperbolico non coincide mai col centro Euclideo.

Lemma 5.6. *In \mathbb{H}^n le palle metriche sono convesse.*

Dimostrazione. Sia $B_r(x)$ una palla metrica. A meno di isometrie possiamo supporre che nel modello proiettivo x sia l'origine. Quindi $B_r(X)$ è una palla Euclidea e le geodetiche son rette Euclidee. La tesi segue dunque dalla convessità Euclidea delle palle Euclidee. \square

Nel caso di geodetiche dello spazio iperbolico, si usano dei nomi buffi la cui motivazione sarà chiara tra poche pagine.

Definizione 5.7. Data una geodetica γ in \mathbb{H}^n , l'intorno a banana di γ e raggio r è l'insieme

$$I_r(\gamma) = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, \gamma) < r\}$$

La (buccia di) banana di centro γ e raggio r è l'insieme

$$S_r(\gamma) = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, \gamma) = r\}$$

La terminologia “banana neighbourhood” è abbastanza standard, quella di “buccia di banana” no.

Lemma 5.8. *Nel modello del semispazio, se γ è una geodetica verticale, gli intorni a banana di γ e le loro bucce, sono coni infiniti (e i loro bordi) con vertice nel punto al bordo di γ e con asse γ . L'angolo al vertice del cono parametrizza il raggio della banana.*

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata per esercizio. \square

La distanza tra un punto e una geodetica funziona nel modo usuale.

Lemma 5.9. *Data una geodetica $\gamma \subseteq \mathbb{H}^n$ e un punto x fuori da essa, esiste $y \in \gamma$ tale che $d(x, y) = d(x, \gamma)$.*

Dimostrazione. Basta scegliere un modello qualsiasi e controllare che la funzione $f(t) = d(x, \gamma(t))$ sia propria, ergo ha un punto di minimo. \square

In realtà tale punto è unico.

Lemma 5.10. *Siano $x, y \in \mathbb{H}^n$ diversi, sia $r = d(x, y)$ e sia σ la geodetica passante per x e y . Allora $T_y(S_r(x)) = (T_y(\sigma))^\perp$.*

Dimostrazione. Andiamo in \mathbb{I}^n . Usando la formula per la distanza $\cosh(d(x, y)) = -\langle x, y \rangle$, si deduce che lo spazio tangente a $S_r(x)$ nel punto y è dato da $T_y(S_r(x)) = x^\perp \cap y^\perp$, e siccome la geodetica σ passante per x e y è $\text{span}(x, y) \cap I^n$ allora $T_y(S_r(x))$ è ortogonale a $\dot{\sigma}$ in y . \square

Proposizione 5.11. *Data una geodetica $\gamma \subseteq \mathbb{H}^n$ e un punto c fuori da essa, esiste un'unica sfera metrica centrata in c e tangente a γ .*

Dimostrazione. Mettiamoci nel modello proiettivo. A meno di isometrie possiamo supporre che c sia il centro del disco. Adesso l'enunciato si è trasformato in un enunciato Euclideo e nel mondo Euclideo la tesi è vera. \square

Corollario 5.12. *Data una geodetica γ in \mathbb{H}^n e un punto x fuori da essa, esiste un'unica geodetica passante per x e ortogonale a γ . Essa è l'unica geodetica che realizza la distanza tra x e γ .*

Dimostrazione. La geodetica in questione non può che essere il raggio della sfera centrata in x e tangente a γ , passante per il punto di tangenza. Essa realizza la distanza perchè ogni altro punto di γ sta fuori dalla suddetta sfera, ergo è più lontano da x rispetto al punto di tangenza. \square

Definizione 5.13. *Data una geodetica γ , il piede dell'unica geodetica passante per x e ortogonale a γ si dice proiezione di x su γ .*

Esercizio 5.14. Dimostrare che esiste C tale che per ogni geodetica γ e per ogni sfera S disgiunta da γ , di raggio anche 100000000, la proiezione di S su γ ha diametro al più C .

Passiamo alla distanza tra geodetiche. Spoiler: c'è qualche sorpresa in arrivo. Date due rette nel piano Euclideo siamo abituati ad avere due soli casi: o si intersecano o no, e in questo caso sono parallele. Possiamo riformulare questa dualità in termini di distanza: nel mondo Euclideo due rette si intersecano se e solo se la distanza tra esse è nulla, e sono disgiunte se e solo se la distanza tra esse è positiva. Nel mondo iperbolico si presenta un caso in più. Vediamo un po'.

I modelli proiettivi e del disco hanno un bordo topologico che si vede e, per come son fatte le geodetiche, esse sono determinate dai due punti di intersezione col bordo. Quindi se uno ha in mano due geodetiche, i punti al bordo in totale possono essere due, tre o quattro.

Proposizione 5.15. *Siano γ, η due geodetiche di \mathbb{H}^n . Nel modello proiettivo, sia X l'insieme dei punti di intersezione delle due rette di supporto di $\gamma \cup \eta$ col bordo del disco. Si ha:*

- (1) *Se X consiste di due punti allora $\gamma = \eta$ (e viceversa).*
- (2) *Se X consiste di tre punti allora $d(\gamma, \eta) = 0$ ma $\gamma \cap \eta = \emptyset$ (e viceversa).*
- (3) *Se X consiste di quattro punti allora*

$$d(\gamma, \eta) = \inf_{x \in \gamma, y \in \eta} (x, y) = \min_{x \in \gamma, y \in \eta} d(x, y)$$

è realizzato (e viceversa) e in tal caso $d(\gamma, \eta) = 0$ se e solo se $\gamma \cap \eta \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che i “viceversa” sono ovvi essendo i tre casi mutuamente esclusivi, quindi ci limitiamo a dimostrare solo gli “allora”.

(1) è praticamente tautologico usando il modello proiettivo posto che in \mathbb{R}^n per due punti passa una e una sola retta.

Vediamo il punto (2). Chiaramente le due geodetiche sono disgiunte in \mathbb{H}^n perchè l'unico loro punto di intersezione sta in ∂D che non fa parte di \mathbb{H}^n . Sia $p \in \partial D$ tale punto. A meno di rotazioni, che sono isometrie e quindi non cambiano le distanze tra cose, possiamo supporre che $p = -e_n$, dunque $p = -e_n$ anche nel modello del disco e $p = \infty$ nel modello del semispazio. Finiamo il lavoro in questo modello. Qui γ e η son due rette verticali che possiamo parametrizzare come $\gamma(t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, t)$, $\eta(t) = (y_1, \dots, y_{n-1}, t)$. Se $C = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ è la distanza Euclidea tra esse, la distanza iperbolica tra $\gamma(t)$ e $\eta(t)$ sarà

$$\frac{C}{t} \rightarrow 0.$$

Quindi $\inf_{x \in \gamma, y \in \eta} d(x, y) \leq d(\gamma(t), \eta(t)) \rightarrow 0$ e dunque $d(\gamma, \eta) = 0$.

Vediamo infine il punto (3). Siano $\gamma^{\pm\infty}$ e $\eta^{\pm\infty}$ i punti di intersezione delle rette di supporto di γ e η con ∂D . Consideriamo $x \in \gamma, y \in \eta$ e calcoliamo la loro distanza tramite la formula del birapporto (Fatto 2.17): sia r la retta per x, y e siano x_∞, y_∞ le intersezioni di r con ∂D . Diamo un'occhiata al birapporto

$$[x_\infty, x, y, y_\infty] = \frac{\|y - x_\infty\|_E \|x - y_\infty\|_E}{\|x - x_\infty\|_E \|y - y_\infty\|_E}.$$

Quando x si avvicina a $\gamma^{\pm\infty}$, il termine $\|x - x_\infty\|_E \rightarrow 0$, similmente per y , mentre i numeratori rimangono limitati e lontani da zero. Per cui il birapporto tende all'infinito. In termini aulici, e ritirando in ballo le parametrizzazioni, la funzione $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $d(t, s) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(t), \eta(s))$ è propria. Essa è continua perchè la funzione distanza è continua tautologicamente, ergo d ha minimo. Cioè esistono $x \in \gamma$ e $y \in \eta$ tali che

$$d(\gamma, \eta) = d(x, y)$$

e chiaramente $d(\gamma, \eta) = 0$ se e solo se $x = y$ se e solo se $\gamma \cap \eta \neq \emptyset$. \square

Osservazione 5.16. Questa roba della distanza tra geodetiche qui l'abbiamo fatta un po' a mano, come si dice "tagliata con la motosega e rifinita con l'accetta", con lo scopo neanche tanto nascosto di far vedere come si può giocare tra i vari modelli. In realtà la storia della distanza tra geodetiche è una cosa più generale ed elegante, e sotto c'è il fatto che in curvatura negativa la distanza tra geodetiche è una funzione convessa.

Esercizio 5.17. Questa stranezza che esistono rette disgiunte ma a distanza nulla tra loro non vale solo per le geodetiche, ma anche per i sottospazi totalmente geodetici. Fatevi delle domande e datevi delle risposte in merito.

Lemma 5.18. *Siano γ e η due geodetiche con $d(\gamma, \eta) > 0$ e siano $x \in \gamma, y \in \eta$ tali che $d(x, y) = d(\gamma, \eta)$ allora la geodetica per x e y è ortogonale a entrambe γ e η .*

Dimostrazione. Siccome $d(x, y) = d(\gamma, \eta)$, in particolare x realizza la distanza $d(\gamma, y)$ e y realizza $d(x, \eta)$ e la geodetica tra x e y è dunque ortogonale a entrambe γ e η . (Corollario 5.12). \square

In realtà tale perpendicolare comune è unica.

Lemma 5.19. *In \mathbb{H}^n siano: γ una geodetica, $y \notin \gamma$, $r = d(y, \gamma)$ e σ la geodetica passante per y e ortogonale a γ . Allora $T_y(S_r(\gamma)) = (T_y(\sigma))^\perp$.*

Dimostrazione. Mettiamoci nel modello del semispazio in cui γ è verticale, con l'origine come punto al bordo. In \mathbb{H}^2 le geodetiche rappresentate da semicirconferenze centrate nell'origine sono perpendicolari a tutte le rette Euclidee emananti dall'origine, dunque sono perpendicolari a γ e alle bucce di banana centrate in γ . La buccia di banana in \mathbb{H}^n si ottiene per rotazione di quella in \mathbb{H}^2 . Ne segue che il piano tangente $T_y(S_r(\gamma))$ è l'ortogonale alla geodetica per y e ortogonale a γ . \square

Proposizione 5.20. *Date due geodetiche disgiunte γ e η esiste una sola buccia di banana centrata in γ e tangente a η .*

Dimostrazione. Nel modello del semispazio in cui γ è verticale e η è una semicirconferenza ortogonale al bordo, la famiglia di coni con asse γ è disgiunta da η quando l'angolo al vertice del cono è piccolo, poi incontra η in un sol punto e poi in due. Il cono tangente è quello che incontra η in un punto solo. \square

Esercizio 5.21. Formalizzare per bene la dimostrazione precedente.

Corollario 5.22. *Siano γ, η due geodetiche disgiunte in \mathbb{H}^n . Se $d(\gamma, \eta) > 0$, allora esiste un'unica geodetica ortogonale a entrambe. E viceversa.*

Dimostrazione. Per il Lemma 5.19, un segmento σ è ortogonale a entrambe le geodetiche se e solo se la banana centrata in γ e di raggio $L(\sigma)$ è tangente a η , e di queste ce n'è una e una sola (Proposizione 5.20).

Vediamo il viceversa: Se $d(\gamma, \eta) = 0$ allora $\gamma \cap \eta \neq \emptyset$, oppure possiamo metterci in un modello del semispazio in cui sono entrambe verticali, dunque sono contenute in uno stesso piano verticale, ed è immediato controllare che in questo caso non esistono ortogonali comuni. \square

Esercizio 5.23. Dimostrare che le banane son convesse.

Esercizio 5.24. Dimostrare che se H_1, H_2 sono due sottospazi totalmente geodetici di \mathbb{H}^n , con $d(H_1, H_2) > 0$, allora esiste un'unica geodetica ortogonale a entrambi.

5.2. Bordo all'infinito. È arrivato il momento di chiarire il ruolo dei punti che nei modelli del proiettivo, disco e semispazio, appaiono come al bordo di \mathbb{H}^n .

Chiaramente nel modello dell'iperboloide essi rappresentano rette nel cono luce, che però in tale modello non sono adiacenti a \mathcal{I}^n , come è giusto che sia: tali punti non fanno parte di \mathbb{H}^n . Però abbiamo visto che sono importanti. Adiamo a formalizzare un po' le cose.

Definizione 5.25. Un raggio geodetico è una funzione $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ che sia geodetica e parametrizzata per lunghezza d'arco. Una mezza geodetica insomma.

Abbiamo visto che per ogni $x \in \mathbb{H}^n$ e per ogni $v \in T_x^1(\mathbb{H}^n)$ esiste un'unica geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco che parte da x con velocità v . (Esercizio 2.11 e 4.3). Con la terminologia appena introdotta possiamo riformulare questo fatto come segue:

Lemma 5.26. *L'insieme dei raggi geodetici è in corrispondenza biunivoca col fibrato tangente unitario $T^1(\mathbb{H}^n)$ di \mathbb{H}^n .*

Lemma 5.27. *Siano γ, η raggi geodetici. Allora il limite $\lim_t d(\gamma(t), \eta(t))$ esiste in $[0, \infty]$.*

In oltre, se $\lim_t d(\gamma(t), \eta(t)) < +\infty$, allora a meno di cambiare punto di partenza per uno dei due raggi, si ha $\lim_t d(\gamma(t), \eta(t)) = 0$.

Dimostrazione. Mettiamoci nel modello del semispazio in cui γ è verticale, punta verso l'alto e parte da $(0, \dots, 0, x_0)$, cioè $\gamma(t) = (0, \dots, 0, x_0 e^t)$. L'altro raggio sarà quello che gli pare: $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_n(t))$. Consideriamo la proiezione verticale di η , cioè $\eta_V = (0, \dots, 0, \eta_n(t))$.

Chiaramente $d(\gamma(t), \eta(t)) \geq d(\gamma(t), \eta_V(t)) = t + \log \frac{x_0}{\eta_n(t)}$ (esercizio: dimostrarlo). Se η non è verticale, allora $\eta_n(t)$ ha un massimo e dunque $d(\gamma(t), \eta(t)) \rightarrow \infty$.

Se η è verticale allora $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ sono costanti e $\eta_n = y_0 e^t$. Ponendo $c = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i^2}$, un calcolo immediato mostra che

$$|\log(x_0/y_0)| < d(\gamma(t), \eta(t)) < \frac{c}{y_0 e^t} + |\log(x_0/y_0)|$$

che converge a $|\log(x_0/y_0)|$. A meno di cambiare il punto di partenza di uno dei due raggi possiamo supporre $x_0 = y_0$, per cui $\lim_t d(\gamma(t), \eta(t)) = 0$. □

Chiaramente η e γ stanno a distanza limitata se e solo se “finiscono nello stesso punto” nei modelli in cui si vede il bordo, se e solo se in $\mathbb{R}^{n,1}$ stanno su piani che si intersecano in una retta di tipo luce. Questo giustifica la seguente definizione.

Definizione 5.28. Il bordo all'infinito di \mathbb{H}^n , denotato con $\partial_\infty \mathbb{H}^n$, o semplicemente $\partial \mathbb{H}^n$, è il quoziente dell'insieme dei raggi geodetici per la relazione $\gamma \sim \eta$ sse $\lim(\gamma(t), \eta(t)) < \infty$.

Osservazione 5.29. Nei modelli uno vede γ e il suo punto al bordo p , e vorrebbe dire $p \in \gamma$, ma per come abbiamo definito noi le cose, se $p \in \partial\mathbb{H}^n$ e $[\gamma] = p$ si deve dire $\gamma \in p$. Lo so fa un po' schifo. Alla fine l'importante è capirsi e anche dire $p \in \gamma$ va bene se chiaro dal contesto.

Esercizio 5.30. Per ogni x in \mathbb{H}^n , si ha che $T_x^1(\mathbb{H}^n)$ è in corrispondenza biunivoca con $\partial_\infty\mathbb{H}^n$. Cioè in ogni classe di equivalenza c'è uno e un solo raggio emanante da x .

Si osservi che la definizione di bordo all'infinito attraverso le geodetiche ha senso in generale. Tipo, chi è il bordo di \mathbb{R}^2 ?

Sul bordo all'infinito si può mettere una topologia naturale: quella quoziente, mettendo sull'insieme dei raggi la topologia data dall'identificazione con fibrato unitario tangente. In pratica un sistema fondamentale di intorni per $[\gamma]$ in tale topologia è dato dagli insiemi del tipo

$$I(V, \gamma) = \{[\eta] \mid \eta(0) = \gamma(0), \dot{\eta}(0) \in V\}$$

ove V è un intorno di $\dot{\gamma}(0)$ in $T_{\gamma(0)}^1\mathbb{H}^n$.

Esercizio 5.31. Dimostrare che $\partial\mathbb{H}^n$ è omeomorfo a S^{n-1} .

Esercizio 5.32. Dimostrare che la topologia di $\partial\mathbb{H}^n$ è quella che si vede nei modelli del disco e/o del proiettivo.

Esercizio 5.33. Dimostrare che $\partial\mathbb{H}^n$ è la compattificazione di Alexandrov di $\partial\mathbb{H}^n$.

In oltre su $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ si può mettere una topologia naturale che lo rende omeomorfo alla chiusura del modello del disco e/o proiettivo. Una base di intorni per tale topologia è fatta così: per i punti di \mathbb{H}^n si usano le palle metriche, per i punti di $\partial\mathbb{H}^n$ un sistema fondamentale di intorni di $[\gamma]$ è dato da

$$A(V, \gamma, R) = I(V, \gamma) \bigcup_{\eta: \eta(0)=\gamma(0), [\eta] \in I(V, \gamma)} \{\eta(t) : t > R\}$$

ove I è come sopra e $R > 0$ è un numero.

Definizione 5.34. Si denota $\overline{\mathbb{H}^n}$ oppure $\overline{\mathbb{H}^n}^\infty$ l'insieme $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ dotato della topologia di cui sopra.

Esercizio 5.35. Dimostrare che $\overline{\mathbb{H}^n}$ è omeomorfo a un disco chiuso e che la topologia è quella che si vede nei vari modelli.

Esercizio 5.36. Scrivere un intorno di ∞ nel modello del semispazio.

Definizione 5.37. Data una geodetica γ essa determina due punti all'infinito che denotiamo con $\gamma^{\pm\infty}$: se γ è parametrizzata per lunghezza d'arco allora $\gamma^\infty = [\gamma|_{[0, \infty)}]$ altrimenti si considera $\eta(t) = \gamma(-t)$ e $\gamma^{-\infty} = [\eta|_{[0, \infty)}]$.

Esercizio 5.38. Dimostrare che per ogni geodetica γ e per ogni $p \in \partial\mathbb{H}^n$ diverso da $\gamma^{\pm\infty}$ esiste un'unica geodetica ortogonale a γ e avente p come punto all'infinito.

La topologia di $\partial\mathbb{H}^n$ è naturalmente metrizzabile, anche se la metrica iperbolica non si estende all'infinito. Un modo classico è quello di utilizzare le cosiddette metriche visuali: su $T_x^1\mathbb{H}^n$ abbiamo la metrica data dalla metrica Riemanniana nel punto x .

Definizione 5.39. La visual metric di $\partial\mathbb{H}^n$ centrata in x è la metrica indotta dall'identificazione di $\partial\mathbb{H}^n$ con $T_x^1\mathbb{H}^n$.

Quindi sentirete parlare di palette di raggio ε centrate in punti all'infinito.

Esercizio 5.40. Dimostrare che la topologia indotta su $\partial\mathbb{H}^n$ da una qualsiasi visual metric è quella solita.

5.3. Funzioni di Busemann e orosfere. Se $p \in \partial\mathbb{H}^n$ e $x \in \mathbb{H}^n$, non si deve dimenticare che $d(x, p) = \infty$: p non sta in \mathbb{H}^n ! Vediamo come si aggiusta questo fatto. Ridiamo un'occhiata alla dimostrazione del Lemma 5.27. Il fatto che $\lim d(\gamma(t), \eta(t)) = |\log x_0 - \log y_0|$ si può leggere dicendo che “ok, $d(\gamma(0), \infty) = d(\eta(0), \infty) = \infty$, ma $d(\gamma(0), \infty) - d(\eta(0), \infty) = |\log x_0 - \log y_0|$ ”. In un certo senso quindi si può misurare la “distanza tra $x \in \mathbb{H}^n$ e $p \in \partial\mathbb{H}^n$ ”, a patto di prendere come riferimento un altro punto. Formalizziamo:

Definizione 5.41. Dato $O \in \mathbb{H}^n$, la funzione di Busemann con base O è la funzione $B_O : \mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$B_O(x, p) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(t)) - d(O, \gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(t)) - t$$

ove γ è il raggio partente da O tale che $p = [\gamma]$.

Se γ è fissato, allora si chiama funzione di Busemann associata a γ la funzione $B_\gamma(x) = B_{\gamma(0)}(x, [\gamma])$.

A volte si trova la notazione $B(x, \gamma)$ per $B_\gamma(x)$. A volte è comoda la notazione $B_p(O, x)$. Totale: se $p = [\gamma]$ e $O = \gamma(0)$, le seguenti sono notazioni equivalenti

$$B_O(x, p) = B(x, \gamma) = B_\gamma(x) = B_p(O, x).$$

Quello che conta non è la notazione, ma che questa è una funzione che funzioni bene.

Innanzitutto si deve dimostrare che è ben definita, cioè che il limite esiste: questa non è altro che una variazione del calcolo fatto nella dimostrazione del Lemma 5.27.

Lemma 5.42. In \mathbb{H}^n sia $\gamma(t) = (0, \dots, 0, x_0 e^t)$ e sia $x = (x_1, \dots, x_n)$. Allora

$$B_\infty(\gamma(0), \eta(0)) = B_{\gamma(0)}(x, \infty) = \log x_0 - \log x_n.$$

In particolare, se $[\gamma] = [\eta] = p \in \partial\mathbb{H}^n$, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma(t), \eta(t)) = |B_p(\gamma(0), \eta(0))|.$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Si noti che le curve di livello di $x \mapsto B_O(x, \infty)$ sono gli iperpiani orizzontali. Queste robe si chiamano orosfere:

Definizione 5.43. Fissato p e $O \in \mathbb{H}^n$, l'orosfera centrata in p normalizzata in O è l'insieme di livello di una funzione di Busemann B_O :

$$S_r(p, O) = \{B_O(x, p) = r\}$$

Le oropalle son gli insiemi $\{B_O(x, p) < r\}$.

Se γ è un raggio e $p = [\gamma]$, si usa la notazione

$$S_r(\gamma) = S_r(p, \gamma(0)).$$

Si noti che la famiglia delle orosfere dipende solo da p e non dal punto O scelto per calcolare la funzione di Busemann.

Abbiamo anche un analogo del Lemma 5.10, cioè come le sfere sono ortogonali ai raggi per il centro, le orosfere sono ortogonali ai raggi in p :

Lemma 5.44. Siano $x, O \in \mathbb{H}^n$ e $p \in \partial\mathbb{H}^n$. Sia $r = B_O(x, p)$, e sia $\sigma \in p$ la geodetica passante per x . Allora $T_x(S_r(p, O)) = (T_x\sigma)^\perp$.

Dimostrazione. Immediato nel modello del semispazio. □

In un certo senso le funzioni di Busemann sono tipo delle distanze con segno dai punti al bordo e le orosfere/palle sono le sfere/palle centrate in un punto del bordo.

5.4. Campionario di sfere, banane, iperbanane e orosfere. Gli intorni $I_r(A)$ sono interessanti non solo quando A è una geodetica, ma anche quando è un sottospazio geodetico di dimensione qualsiasi. I due estremi sono: geodetiche e iperpiani.

Gli intorni $I_r(A)$ in questo caso non hanno dei nomi standard. Possiamo usare tranquillamente il nome *iperbanana* o roba del genere. A dire il vero nel caso degli iperpiani si parla di intorni conchiglia, perchè in \mathbb{H}^n assomigliano a conchiglie Bivalve.

5.4.1. Il caso \mathbb{H}^2 (che è psicologicamente rassicurante). In questo caso geodetiche e iperpiani coincidono.

Abbiam detto che nel modello del semipiano, le palle sono cerchi Euclidei (col centro spostato) e che le banane verticali son coni, delimitate da rette incidenti al bordo con angolo $\alpha \neq \pi/2$.

Lemma 5.45 (Nel semipiano). Se γ è una geodetica in \mathbb{H}^2 , allora le banane centrate in γ sono delimitate da due archi di circonferenza (non ortogonali al bordo) che passano per gli stessi punti al bordo di γ e formano con γ due angoli uguali.

Dimostrazione. Ogni banana è ottenuta da una verticale attraverso isometrie, che son generate da riflessioni, che son conformi e mandano rette e cerchi in rette e cerchi. La tesi segue. \square

Lemma 5.46 (Sempre nel semipiano). *Le orosfere di \mathbb{H}^2 sono rette orizzontali o cerchi tangenti al bordo.*

Dimostrazione. Dal Lemma 5.42 segue immediatamente che le orosfere $S_r(\infty, O)$ son rette orizzontali. Le altre sono ottenute da queste per isometrie, quindi sono cerchi che passano per il bordo una sola volta, cioè tangenti. \square

Lemma 5.47 (Nel disco). *Le sfere son cerchi interni a \mathbb{D}^2 , le banane sono delimitate da archi di cerchi o rette non perpendicolari al bordo, le orosfere son cerchi tangenti a D^2 .*

Dimostrazione. Segue dal fatto che l'isometria standard tra \mathbb{D}^2 e \mathbb{H}^2 è un'inversione rispetto a un cerchio, che preserva gli angoli e la famiglia di cerchi e rette. \square

Fatto 5.48. *Nel modello del proiettivo le funzioni di Busemann (ergo le sue curve di livello) si calcolano in questo modo: Dato un punto $p \in \partial D^2$ e due punti $x, y \in D^2$, si tracciano le rette px e py , denotando x_0 e y_0 le rispettive intersezioni con ∂D^2 . Si tracciano ora le seguenti 4 rette: r_1 è la tangente al disco in p ; r_4 è la retta per x_0 e y_0 , la quale interseca r_0 in un punto detto q ; r_2 e r_3 sono le rette qx e qy rispettivamente. Ebbene*

$$B_p(x, y) = \log([r_1, r_2, r_3, r_4]).$$

Come dichiarato, quando scriviamo “fatto” la dimostrazione non la diamo. Questa si basa su teoremini stile Talete e cose standard del proiettivo, tipo il fatto che il birapporto tra quattro rette è definito. E' alla portata di uno studente volenteroso che sa un po' di geometria proiettiva spicciola.

Euristicamente, nel modello del disco, quando uno prende un cerchio Euclideo centrato nell'origine, esso rappresenta una sfera iperbolica, ma mano che spostiamo il cerchio verso il bordo, mantenendo fisso il raggio Euclideo, il centro iperbolico si sposta verso il bordo e il raggio iperbolico tende all'infinito. Quando il cerchio è diventato tangente, rappresenta un'orosfera: il centro ora è all'infinito. Se lo spostiamo ancora un po', il cerchio interseca il bordo in due punti: esso ora rappresenta una buccia di banana, il centro è diventato una geodetica. O se volete è scappato fuori da \mathbb{H}^2 .

Questo fenomeno si apprezza bene nel modello dell'iperboloide, dove sfere, orosfere, bucce di banane sono tutte intersezioni di \mathcal{I}^2 con piani affini.

Teorema 5.49 (Sfere nell'iperboloide). *Sia $x \in \mathcal{I}^2$. Le sfere $S_r(x)$ sono le intersezioni di \mathcal{I}^2 con i piani affini di giacitura x^\perp .*

Dimostrazione. Ricordando che $x^\perp = T_x \mathcal{I}^n$, si può vedere che il lemma è vero per $x = e_2$ e dunque è vero per gli altri punti perchè le isometrie son lineari e mandano sfere in sfere. Ma si può fare anche il calcolo esplicito.

Sia π_k il piano affine di equazione $\langle v, x \rangle = k$. Chiaramente $\pi_0 = x^\perp = T_x \mathcal{I}^2$ è la giacitura di ogni π_k . Se $y \in \pi_k \cap \mathcal{I}^2$ allora

$$\cosh(d(x, y)) = -\langle y, x \rangle = -k$$

e dunque è la sfera di centro x e raggio $\cosh^{-1}(-k)$ (avendo cura di scegliere $k < -1$, altrimenti $\pi_k \cap \mathcal{I}^2$ è vuota). \square

Si noti che π_k è ottenuto traslando π_0 di kx .

Le geodetiche in \mathbb{I}^2 sono intersezione di \mathcal{I}^2 con piani che hanno ortogonale di tipo spazio. Cioè per ogni γ esiste x con $\langle x, x \rangle = 1$ per cui $\gamma = x^\perp \cap \mathbb{I}^2$. (Esercizio: dimostrarlo).

Teorema 5.50 (Banane in \mathbb{I}^2). *Sia $\gamma = x^\perp \cap \mathcal{I}^2$ una geodetica in \mathbb{I}^2 . Le bucce di banana $S_r(\gamma)$ sono le intersezioni di \mathcal{I}^2 con i piani affini di giacitura x^\perp .*

Dimostrazione. Facciamo il calcolo esplicito. Normalizziamo x in modo che $\langle x, x \rangle = 1$. Sia $\pi_0 = x^\perp$ e sia π_k il piano $kx + \pi_0$, cioè quello di equazione $\langle x, v \rangle = k$ (se $v \in x^\perp$ allora $\langle v + kx, x \rangle = k$). Siccome

$$\langle av + kx, av + kx \rangle = a^2 \langle v, v \rangle + k^2$$

allora se $v \in \gamma$, cioè $\langle v, v \rangle = -1$, affinché $av + kx$ abbia norma quadra -1 occorre $a^2 = 1 + k^2$. Dunque gli elementi di $\pi_k \cap \mathcal{I}^2$ sono tutti della forma $v\sqrt{k^2 + 1} + kx$ per un qualche $v \in \gamma$.

Per ogni $v, w \in \gamma$, si ha

$$\cosh d(w, v\sqrt{k^2 + 1} + kx) = -\langle w, v\sqrt{k^2 + 1} + kx \rangle = -\langle w, v \rangle \sqrt{k^2 + 1}$$

Per la disuguaglianza di tipo Schwarz sappiamo che $-\langle v, w \rangle \geq 1$ ed è 1 solo se $v = w$ (entrambi hanno norma quadra -1). Dunque, ponendo $r = \cosh^{-1}(\sqrt{k^2 + 1})$, abbiamo

$$(\pi_k \cap \mathcal{I}^2) \cup (\pi_{-k} \cap \mathcal{I}^2) = S_r(\gamma).$$

Si noti che $k^2 = \sinh^2 r$. \square

Osservazione 5.51. Nella dimostrazione abbiamo visto che il punto $v\sqrt{k^2 + 1} + kx$ si proietta sul punto v di γ . Quindi la buccia di banana di raggio r è parametrizzata da

$$\alpha(t) = \gamma(t) \cosh r \pm x \sinh r$$

in modo che la proiezione di $\alpha(t)$ su γ sia proprio $\gamma(t)$.

Nell'iperboloide i punti del bordo corrispondono a vettori di tipo luce, quindi se parliamo di orosfere, esse sono centrate in vettori isotropi.

Esercizio 5.52. Dati $P \in \mathcal{I}^n$ e $V \in P^\perp$ con $\|V\|^1 = 1$, verificare che il punto al bordo del raggio $\gamma(t) = P \cosh t + V \sinh t$ è la retta di direzione $P + V$.

Lemma 5.53. In \mathbb{H}^n siano $\gamma(t) = P \cosh t + V \sinh t$ e $\eta(t) = Q \cosh t + W \sinh t$ due raggi geodetici parametrizzati per lunghezza d'arco da $t \in [0, \infty)$ (quindi $P, Q \in \mathcal{I}^n$ e $V \in P^\perp, W \in Q^\perp$ unitari).

Allora $[\gamma] = [\eta] \in \partial\mathbb{H}^n$ se e solo se

$$Q + W = -\frac{P + V}{\langle P + V, Q \rangle}.$$

Dimostrazione. Il punto all'infinito di γ è determinato dalla retta luce per $P + V$, quello di η da quella per $Q + W$. Affinché coincidano deve esistere $c \neq 0$ tale che

$$Q + W = c(P + V).$$

Ponendo $X = P + V$, si ha dunque $W = cX - Q$.

$$0 = \langle W, Q \rangle = \langle cX - Q, Q \rangle = c\langle X, Q \rangle - \langle Q, Q \rangle = c\langle X, Q \rangle + 1$$

Da cui $c = -1/\langle X, Q \rangle$ e quindi

$$Q + W = -\frac{P + V}{\langle P + V, Q \rangle}.$$

Si osservi che

$$\langle W, W \rangle = \langle cX - Q, cX - Q \rangle = c^2\|X\|^2 - 2c\langle X, Q \rangle + \|Q\|^2 = 2 - 1 = 1$$

come doveva essere. \square

Teorema 5.54 (Orosfere nell'iperboloide). Sia $0 \neq x \in \mathbb{R}^{2,1}$ tale che $\langle x, x \rangle = 0$. Le orosfere centrate in x sono le intersezioni di \mathcal{I}^2 con i piani affini di giacitura x^\perp .

Dimostrazione. Sia $\pi_0 = x^\perp$ (è normale che $x \in x^\perp$ e $\pi_0 \cap \mathcal{I}^2 = \emptyset$). Dobbiamo dimostrare che p e q stanno sulla stessa orosfera, cioè $B_x(p, q) = 0$, se e solo se $\langle x, p \rangle = \langle x, q \rangle$.

La tesi non cambia se sostituiamo x con λx . Ora, x non lo possiamo normalizzare perchè ha norma quadra nulla. Usiamo p per fissare un multiplo di x . Sia $\gamma(t) = p \cosh t + v \sinh t$ il raggio geodetico che parte da p e sta nella classe data da x ; sappiamo che $p + v$ è un multiplo di x : scegliamo proprio quello, cioè

$$x = p + v.$$

In tal caso $\langle x, p \rangle = -1$. Ci siamo ridotti a dimostrare che q sta nella stessa orosfera di p centrata in x , cioè $B_x(p, q) = 0$, se e solo se $\langle x, q \rangle = -1$.

Sia $\eta = q \cosh t + w \sinh t$ il raggio nella stessa classe di γ che parte da q . Per il Lemma 5.53 $w = cx - q$ con $c = -1/\langle x, q \rangle$.

Usiamo il Lemma 5.42 per calcolare $B_x(p, q)$:

$$|B_x(p, q)| = \lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma(t), \eta(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \cosh^{-1}(-\langle \gamma(t), \eta(t) \rangle).$$

Quindi $B_x(p, q) = 0$ sse $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \gamma(t), \eta(t) \rangle = -1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t), \eta(t) \rangle &= \langle p \cosh t + v \sinh t, q \cosh t + w \sinh t \rangle \\ &= \langle p, q \rangle \cosh^2 t + \langle v, w \rangle \sinh^2 t + (\langle p, w \rangle + \langle q, v \rangle) \cosh t \sinh t \\ &= \langle p, q \rangle \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} + \langle v, w \rangle \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4} + (\langle p, w \rangle + \langle q, v \rangle) \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{4} \\ &= \frac{e^{2t}}{4} (\langle p, q \rangle + \langle v, w \rangle + \langle p, w \rangle + \langle v, q \rangle) + e^{-2t} (\text{termini limitati}) + \frac{1}{2} (\langle p, q \rangle - \langle v, w \rangle) \\ &= \frac{e^{2t}}{4} (\langle p + v, q + w \rangle) + e^{-2t} (\text{termini limitati}) + \frac{1}{2} (\langle p, q \rangle - \langle v, w \rangle). \end{aligned}$$

Siccome $q + w = c(p + v)$ e $p + v$ è di tipo luce, il coefficiente del termine in e^{2t} è nullo. Il termine $e^{-2t} \rightarrow 0$ dunque

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \gamma(t), \eta(t) \rangle &= \frac{1}{2} (\langle p, q \rangle - \langle v, w \rangle) = \frac{1}{2} (\langle x, q \rangle - \langle v, q + w \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle x, q \rangle - c \langle v, p + v \rangle) = \frac{1}{2} (\langle x, q \rangle + \frac{1}{\langle x, q \rangle}) \end{aligned}$$

che vale -1 se e solo se $\langle x, q \rangle = -1$. □

Esercizio 5.55. Dimostrare che se x è di tipo luce, allora esiste un altro vettore y di tipo luce tale che $\langle x, y \rangle = 1$. Verificare che che il piano di equazione $\langle x, v \rangle = k$ è il piano $x^\perp + ky$.

5.4.2. Sfere e orosfere in \mathbb{H}^n . In questo caso tutto funziona esattamente come in \mathbb{H}^2 : nell'iperboloide abbiamo intersezioni con gli iperpiani opportuni, negli altri modelli abbiamo sfere, sfere tangenti e piani orizzontali.

Esercizio 5.56. Riscrivere nel caso generale di \mathbb{H}^n tutti gli enunciati e le dimostrazioni per sfere e orosfere dati nel caso \mathbb{H}^2 .

5.4.3. Banane, iperbanane e banane intermedie in \mathbb{H}^n . Qui le cose sono un po' diverse.

Per le iperbanane, o conchiglie che dir si voglia, valgono gli enunciati analoghi, e le dimostrazioni, del caso \mathbb{H}^2 . Nel modello del semispazio le conchiglie verticali sono intorni regolari di iperpiani verticali e sono delimitate da iperpiani non perpendicolari al bordo. Quindi in generale in \mathbb{D}^n e \mathbb{III}^n sono intorni di sfere ortogonali al bordo, e sono delimitati da sfere non ortogonali al bordo. Nel proiettivo son comunque robi determinati da equazioni di secondo grado ma non descrivibili in mezza riga.

Similmente, nell'iperboloide abbiamo

Lemma 5.57 (Iperbanane nell'iperboloide). *Sia $\gamma = x^\perp \cap \mathcal{I}^n$ un iperpiano totalmente geodetico in \mathbb{I}^n . Le bucce di iperbanana $S_r(\gamma)$ sono le intersezioni di \mathcal{I}^n con i piani affini di giacitura x^\perp .*

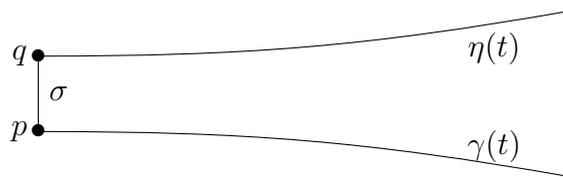
Dimostrazione. La dimostrazione è identica a quella del caso bidimensionale. Lasciamo per esercizio la verifica di quest'ultima affermazione. \square

L'unica differenza sono le banane e le banane intermedie, cioè gli intorno di sottospazi geodetici di codimensione maggiore di 1.

Se γ è sottospazio totalmente geodetico di \mathbb{H}^n di dimensione k , allora possiamo scegliere un qualsiasi $H \sim \mathbb{H}^{k+1}$, totalmente geodetico che contiene γ . In H , γ è un iperpiano e dunque le iperbanane le conosciamo. L'intero intorno $I_r(\gamma)$ in \mathbb{H}^n è ottenuto dalla iperbanana di γ in H , attraverso l'azione delle isometrie di \mathbb{H}^n che fissano puntualmente γ . In altre parole, se $x \in I_r(\gamma)$ allora esiste un'isometria f , che fissa γ e tale che $f(x) \in H$, dunque $f(x)$ sta nell'iperbanana di γ in H .

Esercizio 5.58. Dare un enunciato e una dimostrazione precisa del fatto appena esposto (si deve usare che il sottogruppo di $O(n, 1)$ che fissa γ agisce transitivamente sul fascio di piani passanti per γ).

5.5. Un paio di stime di distanze che sono utili. Queste cose sono manifestazioni della curvatura negativa. Ci mettiamo nella seguente situazione: abbiamo due punti $p, q \in \mathbb{H}^n$ e due geodetiche γ, η per lunghezza d'arto uscenti da p, q rispettivamente, e ortogonali alla geodetica σ tra p e q . Ci chiediamo che relazione c'è tra $d(p, q)$ e $d(\gamma(t), \eta(t))$ quando t è grande.



Spoiler1: Fissati p, q la distanza tra $\gamma(t)$ e $\eta(t)$ è praticamente $2t$.

Spoiler2: Fissata $d(\gamma(t), \eta(t)) = L$, allora $d(p, q)$ decresce esponenzialmente in t .

Spoiler3: I cammini tra p, q nella buccia di banana centrata in σ son lunghi almeno $d(p, q) \cosh t$.

Vediamo tutto per benino.

Teorema 5.59. *Si ha*

$$d(\gamma(t), \eta(t)) > 2t + \log\left(\frac{c+b}{4}\right)$$

con $c = \cosh(d(p, q)) - 1$, $0 \leq b \leq 2$ e $c + b = 0$ se e solo se $\gamma = \eta$.

Dimostrazione. Ci mettiamo nel modello dell'iperboloide. A meno di isometrie $p, q \in \text{span}(e_n, e_{n+1})$. I vettori $v = \dot{\gamma}(0)$ e $w = \dot{\eta}(0)$ sono

unitari e vivono in $\text{span}(e_1, \dots, e_{n-1})$, dunque entrambi ortogonali a p, q . Esplicitamente abbiamo

$$\gamma(t) = p \cosh t + v \sinh t \quad \eta(t) = q \cosh t + w \sinh t.$$

Definiamo ora le costanti c, b :

$$\cosh(d(p, q)) = -\langle p, q \rangle = 1 + c \quad \text{con } c \geq 0 \quad c = 0 \Leftrightarrow p = q$$

$$\langle v, w \rangle = 1 - b \quad \text{con } 0 \leq b \leq 2 \quad b = 0 \Leftrightarrow v = w.$$

Si osservi che $c + b = 0$ se e solo se $\gamma = \eta$. Via coi calcoli. Poniamo $d = d(\gamma(t), \eta(t))$.

$$\begin{aligned} e^d &\geq \cosh(d) = -\langle p \cosh t + v \sinh t, q \cosh t + w \sinh t \rangle \\ &= -\langle p, q \rangle \cosh^2 t - \langle v, w \rangle \sinh^2 t = (1 + c) \cosh^2 t + (b - 1) \sinh^2 t \\ &= 1 + c \cosh^2 t + b \sinh^2 t = 1 + c \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} + b \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4} \\ &= \left(1 + \frac{c - b}{2} + e^{-2t} \frac{b + c}{4}\right) + e^{2t} \frac{c + b}{4} > e^{2t} \frac{c + b}{4}. \end{aligned}$$

(l'ultima disuguaglianza è stretta perché $1 + (c - b)/2 \geq 0$ ed è 0 solo se $c = 0, b = 2$, nel qual caso $b + c > 0$.) \square

Teorema 5.60.

$$d(p, q) < \frac{\sqrt{2 \cosh d(\gamma(t), \eta(t))}}{\cosh t} < \frac{\sqrt{8 \cosh d(\gamma(t), \eta(t))}}{e^t}.$$

Dimostrazione. La seconda disuguaglianza è ovvia. Poniamo

$$d_0 = d(p, q) \quad d = d(\gamma(t), \eta(t)).$$

Con le stesse notazioni di poco fa, e tenendo conto che $\langle v, w \rangle \leq 1$, abbiamo

$$\cosh d = \cosh(d_0) \cosh^2 t - \langle v, w \rangle \sinh^2 t$$

da cui

$$\cosh d_0 = \frac{\cosh d + \langle v, w \rangle \sinh^2 t}{\cosh^2 t} = \frac{\cosh d}{\cosh^2 t} + \langle v, w \rangle \tanh^2 t < 1 + \frac{\cosh d}{\cosh^2 t}$$

Ora uno si può calcolare a mano la formula dell'arcocoseno iperbolico e trova che $\cosh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ e dunque

$$\begin{aligned} d_0 &< \log \left(1 + \frac{\cosh d}{\cosh^2 t} + \sqrt{\left(1 + \frac{\cosh d}{\cosh^2 t}\right)^2 - 1} \right) \\ &< \frac{\cosh d}{\cosh^2 t} + \sqrt{\left(1 + \frac{\cosh d}{\cosh^2 t}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{\cosh d}{\cosh^2 t} + \frac{\sqrt{2 \cosh d}}{\cosh t} \sqrt{1 + \frac{\cosh d}{2 \cosh^2 t}} < \frac{\sqrt{2 \cosh d}}{\cosh t}. \end{aligned}$$

\square

Esercizio 5.61. Fabbricare una dimostrazione del teorema precedente basandosi sulle stime della dimostrazione del Lemma 5.27.

Teorema 5.62. *Se α è un cammino tra $\gamma(t)$ e $\eta(t)$ nella buccia di banana $S_t(\sigma)$, allora la lunghezza di α è almeno $d(p, q) \cosh t$.*

Dimostrazione. Facciamo qui il calcolo in \mathbb{H}^2 . Il caso generale si riduce al caso bidimensionale con la stessa idea del Teorema 4.3: se $\alpha(s)$ è un cammino nella banana, lo si può proiettare con elementi di $\text{stab}(\sigma)$ su un cammino che vive in un piano passante per σ , senza accrescerne la lunghezza.

Pronti, via! Nella dimostrazione del Teorema 5.50 abbiamo visto che α si scrive come

$$\alpha(s) = \beta(s) \cosh t + x \sinh t$$

ove x è tale che x^\perp è il piano che individua σ e $\beta(s)$ è la proiezione di $\alpha(s)$ su σ . In particolare β è un cammino su σ tra p e q . Quindi

$$\dot{\alpha}(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \dot{\beta}(s) \cosh t$$

e dunque

$$L(\alpha) = L(\beta) \cosh t.$$

Siccome β è un cammino tra p e q in σ , allora $L(\beta) \geq d(p, q)$. \square

6. COMPORTAMENTO DELLE ISOMETRIE

6.1. Azione delle isometrie sul bordo all'infinito. Ogni isometria $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ si estende naturalmente a un omeomorfismo di $\overline{\mathbb{H}^n}$. Nel modello del proiettivo ciò è evidente, le isometrie sono restrizioni al disco di proiettività, che sono definite su tutto \mathbb{R}^n e dunque anche sul disco chiuso.

In modo più intrinseco si può estendere f al bordo definendo

$$f([\gamma]) = [f(\gamma)]$$

e controllando che è ben definita e un omeomorfismo. Oppure, si considera l'azione di f sull'insieme dei raggi identificato con $T^1\mathbb{H}^n$ tramite $f(x, v) = (f(x), d_x f(v))$, si controlla che commuta con la relazione d'equivalenza sui raggi ergo f passa al quoziente.

Esercizio 6.1. Dimostrare che i punti di vista appena esposti sono equivalenti tra loro.

Proposizione 6.2 (Tre punti in tre punti). *L'azione di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sull'insieme delle triple di punti distinti in $\partial\mathbb{H}^n$ è transitiva, cioè per ogni $x, y, z \in \partial\mathbb{H}^n$ distinti tra loro e per ogni $x', y', z' \in \partial\mathbb{H}^n$ distinti tra loro, esiste isometria f tale che*

$$f(x) = x' \quad f(y) = y' \quad f(z) = z'.$$

In particolare l'azione di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ su $\partial\mathbb{H}^n$ è transitiva.

Dimostrazione. Siano p la proiezione di z sulla geodetica γ per x, y . Cioè p è il piede dell'unica geodetica η per z e perpendicolare alla geodetica per x, y . Sia p' la proiezione di z' sulla geodetica per x', y' . Siccome $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ agisce transitivamente su \mathbb{H}^n , allora esiste un'isometria f tale che $f(p) = p'$. I vettori unitari tangenti γ e η in p sono perpendicolari, e così succede in p' . La tesi segue ora dal fatto che $O(n)$ agisce in modo transitivo sulle coppie di vettori unitari ortogonali tra loro. \square

Questo fatto si usa spessissimo in geometria iperbolica: le triple di punti all'infinito sono tutte uguali a meno di isometrie. Per esempio, se abbiamo in mano tre punti al bordo, nel modello del semispazio possiamo sempre supporre che siano $0, \infty$ e un altro punto a piacere. A tre però ci si ferma:

Proposizione 6.3. *L'unica isometria che fissa tre punti in $\partial\mathbb{H}^2$ è l'identità. In particolare $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ agisce in modo libero e transitivo sulle triple di punti. Cioè per ogni $x, y, z \in \partial\mathbb{H}^2$ distinti e per ogni $x', y', z' \in \partial\mathbb{H}^2$ distinti, esiste un'unica isometria f tale che $f(x) = x', f(y) = y', f(z) = z'$.*

Se un'isometria di \mathbb{H}^n fissa tre punti in $\partial\mathbb{H}^n$, allora fissa puntualmente la copia di \mathbb{H}^2 che passa per tali punti.

Dimostrazione. La dimostrazione è uguale alla precedente, osservando che in dimensione due, se un elemento di $O(2)$ fissa due punti allora è l'identità.

La seconda tesi segue dal fatto che se f fissa tre punti allora l' \mathbb{H}^2 per tali punti è f -invariante e per la prima tesi, la restrizione di f a tale piano è l'identità. \square

In particolare esistono sempre quadruple di punti che non sono l'una l'immagine dell'altra per isometrie.

Esercizio 6.4. Dimostrare che se $n + 1$ punti di \mathbb{H}^n sono tali da non essere contenuti in un \mathbb{H}^k con $k < n$, allora l'unica isometria che fissa tali punti è l'identità.

6.2. Classificazione delle isometrie.

Teorema 6.5. *Le isometrie di \mathbb{H}^n si dividono in tre classi:*

- (1) *Ellittiche: C'è un punto fisso in \mathbb{H}^n .*
- (2) *Paraboliche: Nessun punto di \mathbb{H}^n è fissato ed esiste un unico punto fisso nel bordo.*
- (3) *Iperboliche (o loxodromiche o lossodromiche): Nessun punto di \mathbb{H}^n è fissato ed esistono esattamente due punti fissi nel bordo.*
- (4) *Nessun punto di \mathbb{H}^n è fisso ed esistono almeno tre punti fissi del bordo. Questo caso non esiste.*

Dimostrazione. Sia f un'isometria di \mathbb{H}^n . Nel modello del disco essa è rappresentata da un omeomorfismo del disco chiuso. Per il Teorema del punto fisso di Brouwer, esiste $x \in \overline{\mathbb{H}^n}$ tale che $f(x) = x$.

I casi 1), 2), 3) sono mutuamente esclusivi, il caso 4) non esiste per la Proposizione 6.3. \square

Osservazione 6.6. L'identità è ellittica. Ma chi se ne frega, può essere considerata anche iperbolica o parabolica alla bisogna. È come quando uno si chiede se 0 è un numero naturale o no: lo è per definizione ma a volte fa comodo non considerarlo. O quando uno si chiede se 1 è primo. O quando uno si chiede . . . , ok, avete capito.

Definizione 6.7. Se f è iperbolica, allora la geodetica che congiunge i due punti fissi è f -invariante: essa si chiama asse dell'isometria f .

6.3. Classificazione delle Isometrie in $O(n,1)$. Le isometrie di \mathcal{I}^n son lineari, quindi sostanzialmente la loro forma di Jordan ci dice come son fatte. I punti fissi corrispondono ad autovettori. Funziona più o meno come in $O(n)$: se c'è un punto fisso allora l'ortogonale è preservato e lì si legge un elemento di $O(n-1)$. Se non ci son punti fissi, usando la forma di Jordan complessa, almeno un piano invariante si trova e lui e il suo ortogonale sono invarianti. Così si capisce come agiscono gli elementi di $O(n)$ su S^{n-1} .

Ricordiamo che $O^+(n,1)$ denota il sottogruppo di $O(n,1)$ che non scambia le falde, che altro non è che $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

Teorema 6.8. Sia $A \in O^+(n,1)$ e sia v un autovettore di A relativo all'autovalore λ .

- $\det A = \pm 1$;
- se $\langle v, v \rangle > 0$ allora $\lambda = \pm 1$;
- se $\langle v, v \rangle < 0$, allora $\lambda = 1$;
- se $\langle v, v \rangle = 0$ allora $\lambda > 0$.

Dimostrazione. Da $A^t J A = J$ segue $\det A^2 = 1$. Siccome A preserva il prodotto di Lorentz,

$$\langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$$

dunque se $\langle v, v \rangle \neq 0$ allora $\lambda^2 = 1$. Se $\langle v, v \rangle < 0$ allora in $\text{span}(v)$ c'è un elemento di \mathcal{I}^n . Siccome A non scambia le falde non può essere $Av = -v$ (Lemma 3.15). Similmente se A inverte la direzione di un vettore luce allora per continuità manda la falda superiore nella falda inferiore, e questo è vietato in $O^+(n,1)$. \square

Si noti anche che gli autovalori di autovettori di tipo luce possono essere quello che vogliono. Si noti anche che se A ha un autovalore di modulo diverso da 1 allora ne ha anche uno maggiore di 1; entrambi devono essere relativi ad autovettori luce.

Lemma 6.9. $O^+(1, 1)$ è fatto di matrici della forma:

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} -\cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso gli autovalori sono $e^{\pm t}$ e gli autovettori sono $e_2 \pm e_1$. Nel secondo caso gli autovalori sono ± 1 e gli autovettori hanno una norma quadrata positiva (quello relativo a -1) e l'altro negativa (quello relativo a 1).

Dimostrazione. Il conto si fa a mano imponendo $A^t J A = J$ ed è lasciato per esercizio. \square

Lemma 6.10. Ogni $A \in O^+(n, 1)$ ha almeno un autovettore. Equivale, ogni A ha un autovalore reale.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n . Il caso $n = 1$ è $O^+(1, 1)$ che è stato appena discusso.

Facciamo il passo induttivo. Sia λ un autovalore di A su \mathbb{C} . Se λ è reale allora abbiamo finito. Se λ non è reale, allora la forma reale della forma di Jordan complessa ci fornisce un sottospazio invariante V di dimensione 2. L'ortogonale di V è anch'esso invariante. Se $V \cap V^\perp \neq \emptyset$ allora esso ha dimensione uno, è invariante, e quindi abbiamo trovato un autovettore. Altrimenti $R^{n,1} = V \oplus V^\perp$ e la restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a uno tra V e V^\perp non è definita positiva. La restrizione di A al tale sottospazio fornisce un elemento di $\text{Isom}(\mathbb{H}^k)$ con $k < n$ e scatta l'induzione. \square

Osserviamo che in $O(n)$ questa cosa non è vera: gli autovalori reali sono garantiti solo in dimensione dispari.

La classificazione delle isometrie, letta in $O^+(n, 1)$ in termini di autovalori/autovettori, si legge così:

Teorema 6.11. Sia $A \in O^+(n, 1)$. O c'è un autovettore v con $\langle v, v \rangle < 0$ (ellittica) oppure esistono necessariamente autovettori luce e:

- (1) Ce n'è solo uno (a meno di multipli), e in tal caso il suo autovalore è 1. (Parabolica)
- (2) Ce ne sono esattamente due (a meno di multipli) linearmente indipendenti tra loro, e in tal caso i loro autovalori sono $\lambda^{\pm 1}$ con $\lambda > 1$. A è coniugata a una matrice della forma $A = \begin{pmatrix} B & & \\ & \cosh t & \sinh t \\ & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$ con $B \in O(n-1)$. (Iperbolica)

Dimostrazione. Cominciamo con dimostrare che A o è ellittica o ha autovettori luce. Supponiamo A non ellittica e sia λ un autovalore reale di A relativo all'autovettore v . Se $\langle v, v \rangle = 0$ abbiamo trovato l'autovettore luce. Altrimenti $\langle v, v \rangle > 0$, v^\perp è A -invariante e si ragiona per induzione.

Dimostriamo poi che se A ha tre autovettori luce v_1, v_2, v_3 linearmente indipendenti tra loro allora è l'identità su $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$. La

restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a V ha segnatura $(2, 1)$ perché V contiene vettori luce, quindi basta fare il calcolo per $n = 2$. In tal caso, scegliendo v_1, v_2, v_3 come base, si ha che

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \neq 0$ (perché?) e da $A^t J A = J$ si deduce $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1$, dunque $A = \pm I$ ma siccome siamo in $O^+(2, 1)$, $A = I$.

Completiamo il caso (1): non ci sono autovettori di norma quadra negativa e c'è un solo autovettore v di tipo luce a meno di multipli. L'autovalore λ deve essere 1 perché se fosse diverso, siccome $\det A = \pm 1$, allora ce ne sarebbe almeno un altro di modulo diverso da 1, ergo avremmo almeno due autovettori luce.

Finiamo il caso (2). Abbiamo v_1, v_2 autovettori luce linearmente indipendenti tra loro. $V = \text{span}(v_1, v_2)$ è A -invariante (è l'asse di A) e la restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a V ha segnatura $(1, 1)$. Dunque $\mathbb{R}^{n,1} = V \oplus V^\perp$ e tale decomposizione è A -invariante. In oltre la segnatura della restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a V^\perp è $(n - 1, 0)$ Quindi A è coniugata a $\begin{pmatrix} B & \\ & A' \end{pmatrix}$ con $B \in O(n-1)$ e $A' \in O(1, 1)$ che conosciamo (la matrice $\begin{pmatrix} -\cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$ è ellittica). \square

Esercizio 6.12. Dimostrare che i parabolici di $O^+(2, 1)$ hanno tutti un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 1.

Esercizio 6.13. Dimostrare che i parabolici di $O^+(n, 1)$ sono tutti coniugati a matrici del tipo $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ con A blocco di Jordan di ordine tre, relativo a 1, e $B \in O(n - 2)$. (Se serve, dare un'occhiata alla Proposizione 6.18).

Definizione 6.14. Il raggio spettrale di una matrice è il massimo dei moduli dei suoi autovalori (incluso quelli complessi).

Esercizio 6.15. Dimostrare che $A \in O^+(n, 1)$ è iperbolica se e solo se ha raggio spettrale maggiore di 1.

6.4. Stabilizzatori. In sostanza, le isometrie son di tre tipi: quelle che stanno in $\text{stab}(x)$, quelle che stanno in $\text{stab}(x)$ e quelle che stanno in $\text{stab}(x)$ ove x è rispettivamente un punto di \mathbb{H}^n , un punto di $\partial\mathbb{H}^n$, una geodetica in \mathbb{H}^n .

Se $x \in \mathbb{H}^n$ allora $\text{stab}(x) \simeq O(n)$ e di questo si è già parlato a sufficienza.

Se f è parabolica, allora $f \in \text{stab}(x)$ con $x \in \partial\mathbb{H}^n$. L'intero $\text{stab}(x)$ contiene anche iperbolici ed ellittici, quindi non è fatto di soli parabolici, ma ogni parabolico può esser letto in uno stabilizzatore. Siccome le isometrie agiscono transitivamente, gli stabilizzatori sono tutti coniugati.

Teorema 6.16. *Nel modello del semispazio di \mathbb{H}^n , $\text{stab}(\infty)$ è fatto da elementi del tipo*

$$f(X) = \lambda \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $\lambda > 0$, $A \in O(n-1)$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Dimostrazione. Innanzitutto dimostriamo che quelle sono isometrie che preservano ∞ . Siccome la metrica del modello è quella Euclidea riscalata per l'altezza, si verifica immediatamente che le traslazioni orizzontali e le omotetie di ragione $\lambda > 0$ sono isometrie, così come lo sono le isometrie Euclidee orizzontali, cioè le funzioni del tipo $f(X) = \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix} X$. Dunque anche le loro composizioni lo sono. Che preservino ∞ è immediato.

Mostriamo il viceversa. Sia f un'isometria che preserva ∞ e sia $p = (0, \dots, 0, 1)$.

A meno di comporre con traslazioni orizzontali possiamo supporre che $f(p)$ sia del tipo $(0, \dots, 0, \lambda)$ e a meno di comporre con omotetie possiamo supporre che $f(p) = p$ in altre parole f è del tipo $f(x) = \lambda g(x) + \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ con $g \in \text{stab}(p)$. In oltre, la geodetica per p e ∞ è

fissata da g . A meno di comporre con elementi del tipo $\begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix}$ con $A \in O(n-1)$ possiamo supporre che g fissi tutto T_p , ma allora è l'identità. Dunque g è del tipo $\begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix}$ con $A \in O(n-1)$. \square

Teorema 6.17. *Nel modello del semispazio di \mathbb{H}^n , i parabolici di $\text{stab}(\infty)$ sono elementi del tipo*

$$f \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + b \\ y \end{pmatrix}$$

con $A \in O(n-1)$ che ha 1 come autovalore e $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $b \notin \text{Imm}(A - I)$.

In oltre, a meno di coniugare f per una traslazione di \mathbb{R}^{n-1} , ci si può sempre ricondurre al caso in cui $Ab = b$.

Dimostrazione. Sia $f \in \text{stab}(\infty)$. Al bordo essa induce la trasformazione $f(X) = \lambda AX + b$. L'equazione

$$\lambda AX + b = X \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda A - I)X = -b$$

ha sempre soluzione se $\lambda \neq 1$ perché $A \in O(n-1)$ non ha autovalori di modulo diverso da 1, quindi $\lambda A - I$ è sempre invertibile. Ma tale equazione ha soluzione se e solo se f ha un altro punto fisso al bordo, cosa proibita ai parabolici. Dunque f è parabolica se e solo se $\lambda = 1$ e l'equazione

$$AX + b = X$$

non ha soluzione, quindi $A - I$ non è invertibile (ergo A ha 1 come autovalore) e la sua immagine non contiene b .

Vediamo ora la seconda affermazione. Sia V l'autospazio di A relativo a 1. Siccome A è ortogonale rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^{n-1} l'ortogonale di V è anch'esso A -invariante. Dunque $\mathbb{R}^{n-1} = V \oplus V^\perp$ e rispetto a tale decomposizione A si scrive come $A = \begin{pmatrix} I & \\ & M \end{pmatrix}$. Siccome V è l'autospazio relativo a 1, allora $M - I$ è invertibile, dunque $V^\perp = \text{Imm}(A - I)$.

Scriviamo $b = b_0 + b_1$ con $b_0 \in V$ e $b_1 \in V^\perp$ e scegliamo X_0 tale che

$$AX_0 - X_0 = b_1$$

(tale X_0 esiste perché $b_1 \in \text{Imm}(A - I)$). Coniugando $f(X) = AX + b$ per la traslazione di X_0 otteniamo

$$f(X - X_0) + X_0 =$$

$$A(X - X_0) + b + X_0 = AX - AX_0 + b_0 + b_1 + X_0 = AX + b_0$$

Dunque nel sistema di riferimento con l'origine in X_0 , il termine di traslazione è b_0 che è un autovettore di A relativo all'autovalore 1. \square

Proposizione 6.18. *I parabolici di \mathbb{H}^n esibiscono sempre almeno un \mathbb{H}^2 invariante. Ogni \mathbb{H}^2 invariante contiene al bordo il punto fisso del parabolico.*

Dimostrazione. Per il Teorema 6.17 possiamo supporre che nel modello del semispazio f sia del tipo

$$f(X, y) = (AX + b, y)$$

con $Ab = b$. Dunque il piano verticale passante per b è f invariante.

La chiusura di un piano in $\overline{\mathbb{H}^n}$ è un disco: se è invariante deve contenere un punto fisso e i parabolici hanno un unico punto fisso. \square

Corollario 6.19. *I parabolici di $O^+(n, 1)$ son coniugati a matrici della forma $\begin{pmatrix} B & \\ & A \end{pmatrix}$ con $A \in O(2, 1)$ parabolico e $B \in O(n-2)$.*

Dimostrazione. Un \mathbb{H}^2 invariante è un V tridimensionale in $\mathbb{R}^{n,1}$, la decomposizione $\mathbb{R}^{n,1} = V \oplus V^\perp$ è invariante e le restrizioni di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hanno segnatura $(2, 1)$ e $(n-2, 0)$. \square

Esercizio 6.20. Dimostrare il precedente corollario direttamente in $O^+(n, 1)$ usando solo autovettori, forme di Jordan, ortogonalità etc...

Esercizio 6.21. Dimostrare che se un'isometria di \mathbb{H}^n stabilizza una copia di \mathbb{H}^k in \mathbb{H}^n , allora nel modello dell'iperboloide a meno di isometrie è una roba del tipo $\begin{pmatrix} B & \\ & A \end{pmatrix}$ con $A \in O(k, 1)$ e $B \in O(n - k)$. L'isometria di partenza è parabolica se e solo se A lo è.

La matrice A del Teorema 6.17 deve avere un autovettore relativo a 1. In dimensione $n = 2, 3$ non c'è molto spazio, quindi i parabolici in dimensione 2, 3 son sostanzialmente traslazioni orizzontali.

Esercizio 6.22. Dimostrare che i parabolici di \mathbb{H}^2 che fissano infinito son tutti del tipo $f(x, y) = (x + b, y)$.

Esercizio 6.23. I parabolici di \mathbb{H}^3 che fissano infinito e preservano l'orientazione son tutti del tipo $f \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + b \\ y \end{pmatrix}$.

Esercizio 6.24. Esibire un parabolico di \mathbb{H}^4 che fissa infinito, preserva l'orientazione e non è del tipo $f \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + b \\ y \end{pmatrix}$.

Passiamo agli iperbolici: essi stabilizzano una geodetica. Gli stabilizzatori di una geodetica contengono anche altre robe, ma non molte:

Teorema 6.25. *Nel modello del semispazio di \mathbb{H}^n , le isometrie che fissano 0 e ∞ sono del tipo*

$$f(X) = \lambda \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix} X$$

con $\lambda > 0$, $A \in O(n - 1)$. In oltre tali elementi son iperbolici se e solo se $\lambda \neq 1$.

Dimostrazione. Si vede facilmente che quelle descritte sono isometrie che fissano 0 e ∞ . Sia γ la geodetica verticale per 0 e sia $p = (0, \dots, 0, 1)$. Se $\lambda = 1$ allora γ è fissata puntualmente e troviamo ellittici. Mentre se $\lambda \neq 1$ non ci sono punti fissi perché la coordinata verticale cambia.

Sia ora f un'isometria che fissa 0 e ∞ . Allora f preserva γ e $f(p) \in \gamma$. A meno di omotetie possiamo supporre che $f(p) = p$ e la dimostrazione si conclude come quella del Teorema 6.16. \square

Proposizione 6.26. *Se f stabilizza una geodetica ma scambia i suoi punti al bordo allora è un ellittico.*

Dimostrazione. La restrizione di f a tale geodetica è un'isometria di \mathbb{R} che inverte l'orientazione, dunque del tipo $f(x) = -x + b$ e l'equazione $-x + b = x$ ha sempre soluzione. \square

Osservazione 6.27. Se $n = 2$ allora $A \in O(1)$ non può essere molte cose. Ne segue che nel modello del semipiano di \mathbb{H}^2 , un'iperbolica che fissa 0 e ∞ è necessariamente della forma

$$f(X) = \lambda X$$

con $\lambda > 0$.

Esercizio 6.28. Se parametrizziamo \mathbb{H}^3 con $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, dimostrare che le isometrie che fissano 0 e ∞ e preservano l'orientazione sono tutte del tipo $f(z, t) = (\lambda z, |\lambda|t)$ con $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

6.5. Sottogruppi (a un parametro) di isometrie.

Definizione 6.29. Sia $G = \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Un sottogruppo a un parametro di G è un insieme di elementi $id \neq f_t \in G$ con $t \in \mathbb{R}$ tali che $f_t \circ f_s = f_{t+s}$ e $f_0 = Id$. La dipendenza da t è richiesta liscia. In altre parole si tratta dell'immagine di un morfismo localmente iniettivo $\mathbb{R} \rightarrow G$. Un sottogruppo a k parametri è definito alla stessa maniera solo che $t \in \mathbb{R}^k$.

Tipo, le rotazioni di \mathbb{R}^3 attorno ad un asse fissato sono un sottogruppo a un parametro di $SO(3)$. I sottogruppi a un parametro di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ che fissano un punto sono i sottogruppi a un parametro di $O(n)$.

Per continuità, siccome l'identità preserva l'orientazione, f_t preserva sempre l'orientazione. I sottogruppi a uno o più parametri sono fatti di elementi che commutano tra loro.

Lemma 6.30. *Se f, g commutano, allora l'insieme dei punti fissi di f è g -invariante.*

Dimostrazione. Se $f(x) = x$ allora

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$$

quindi anche $g(x)$ è fisso per f . □

Corollario 6.31. *Siano f, g isometrie di \mathbb{H}^n che commutano. Se f è parabolica con punto fisso x , allora $g(x) = x$.*

Dimostrazione. L'insieme dei punti fissi di f è un solo punto. Siccome è g -invariante allora è fisso anche per g . □

Proposizione 6.32. *Siano f, g sono isometrie non ellittiche di \mathbb{H}^n che commutano. Allora o sono entrambe paraboliche o entrambe iperboliche.*

Dimostrazione. Se f è parabolica con $f(x) = x$ allora sappiamo che $g(x) = x$. Se g fosse iperbolica allora l'altro punto fisso di g dovrebbe essere fisso anche per f , cosa che non può avvenire. □

Esercizio 6.33. Sia f parabolica del tipo

$$f \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + b \\ y \end{pmatrix}.$$

Determinare il commutatore di f .

Esercizio 6.34. Dimostrare che in $\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^3$ i sottogruppi a un parametro di elementi parabolici (a meno di coniugio) sono del tipo

$$f_t \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + tb \\ y \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.35. Esibire un sottogruppo parabolico a un parametro di \mathbb{H}^4 che non sia del tipo $f_t(X, y) = (X + tb, y)$.

Esercizio 6.36. Le funzioni

$$f_{t,s} \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + tb_1 + sb_2 \\ y \end{pmatrix}$$

formano un sottogruppo parabolico a due parametri di $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$, a patto che b_1, b_2 siano linearmente indipendenti. Ce ne sono altri?

Proposizione 6.37. *Sia f iperbolica con γ come asse. Se g commuta con f allora $g(\gamma) = \gamma$.*

Dimostrazione. Abbiamo $f(g(\gamma)) = g(f(\gamma)) = g(\gamma)$ dunque $g(\gamma)$ è f -invariante. Se f invertisse gli estremi di $g(\gamma)$ sarebbe ellittica, quindi non li inverte, ergo li fissa. Indi, se $g(\gamma) \neq \gamma$ ci sarebbero almeno 3 punti fissi per f , che sarebbe dunque ellittica. \square

Esercizio 6.38. Dimostrare che il commutatore di un elemento iperbolico del tipo $f(X) = \lambda \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix} X$ è fatto da tutti e soli gli elementi del tipo del tipo

$$g(X) = \mu \begin{pmatrix} B & \\ & 1 \end{pmatrix} X$$

con B che commuta con A .

Esempio 6.39. I sottogruppi iperbolici a un parametro di \mathbb{H}^2 sono coniugati a

$$f_t(X) = tX.$$

Esempio 6.40. Le funzioni

$$f_{\alpha,t}(X) = t \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & \\ \sin \alpha & \cos \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix} X$$

formano un sottogruppo iperbolico a due parametri di $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$. Ce ne sono altri?

6.6. Lunghezze di traslazione.

Definizione 6.41. Sia f un'isometria di \mathbb{H}^n . La lunghezza di traslazione di f è definita come

$$\ell(f) = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} d(x, \gamma x).$$

Teorema 6.42. *Sia f un'isometria di \mathbb{H}^n allora:*

- (1) f è ellittica se e solo se $\ell(f) = 0$ e $\exists x \in \mathbb{H}^n : d(x, f(x)) = \ell(f)$.
- (2) f è parabolica se solo se $\ell(f) = 0$ e l'inf non è raggiunto.
- (3) f è iperbolica se e solo se $\ell(f) > 0$ e in questo caso l'inf è realizzato dai punti dell'asse di f .

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che i tre casi sono mutuamente esclusivi, quindi dimostriamo solo le frecce in una direzione. Il primo punto è ovvio. Sia ora f parabolica. Nel modello del semispazio in cui ∞ è fisso, f si scriva come $f(X, y) = (Ax + b, y)$ (Teorema 6.17) per cui $\lim_{y \rightarrow \infty} d((0, y), f(0, y)) = 0$. Dunque $\ell(f) = 0$ e siccome f non ellittica, l'inf non è raggiunto.

Rimane il caso di f iperbolica. Nel modello del semispazio in cui $0, \infty$ sono fissi f è del tipo $f(X) = \lambda \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix} X$ (Teorema 6.25) e un calcolo esplicito usando le stime del Teorema 5.62 mostra che i punti che realizzano $\ell(f)$ sono quelli dell'asse. \square

6.7. Dinamica Nord-Sud e compattificazione di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Consideriamo un'isometria iperbolica che nel modello del semispazio si scrive come $f(X) = \lambda \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix} X$ con $\lambda > 1$. Allora

$$f^n(X) \rightarrow \infty$$

per ogni $X \neq 0$, viceversa

$$f^{-n}(X) \rightarrow 0$$

per ogni $X \neq \infty$. Si dice che f ha una dinamica Nord-Sud.

Similmente se consideriamo una parabolica $f(X, y) = (AX + b, y)$ allora $f^{\pm n}(X, y) \rightarrow \infty$. Verrebbe da dire che ha una dinamica Sud-Sud.

Queste sono manifestazioni di un fatto più generale.

Definizione 6.43. Dati $a, b \in \partial\mathbb{H}^n$, la quasi-costante C_a^b è la funzione $C_a^b : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ definita da

$$C_a^b(x) = b \quad \forall x \neq a$$

e su $x = a$ fa un po' quello che gli pare, anche essere indefinita⁴. Il caso $a = b$ è ammesso.

Questa roba è definita così perché $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ si compattifica con le quasi-costanti.

Teorema 6.44. *Sia f_n una successione di isometrie di \mathbb{H}^n . Allora a meno di sottosuccessioni f_n converge o a un'isometria o a una quasi-costante. La convergenza a isometrie è metricamente uniforme sui compatti di \mathbb{H}^n ; la convergenza alla quasi costante C_a^b è topologicamente uniforme sui compatti di $\overline{\mathbb{H}^n}$ non contenenti a .*

⁴Lo so che basterebbe dire " C_a^b è la funzione costante $\overline{\mathbb{H}^n} \setminus \{a\} \rightarrow b$ " ma secondo me rende meglio così.

Dimostrazione. Sia $p \in \mathbb{H}^n$ siccome $\overline{\mathbb{H}^n}$ è compatto, a meno di sotto-successioni possiamo supporre che $f_n(p) \rightarrow b \in \overline{\mathbb{H}^n}$. Se $b \in \mathbb{H}^n$ allora, siccome $O(n)$ è compatto, a meno di sottosuccessioni f_n converge a un'isometria. Lasciamo per esercizio la verifica che tale convergenza è uniforme sui compatti.

Supponiamo quindi che $b \in \partial\mathbb{H}^n$. Sia $c \neq b$ un punto qualsiasi di $\partial\mathbb{H}^n$ e sia $x_n = f_n^{-1}(c)$. Per compattezza di $\partial\mathbb{H}^n$, a meno di successioni possiamo supporre che $x_n \rightarrow a$ per qualche $a \in \partial\mathbb{H}^n$.

Mostriamo che $f_n \rightarrow C_a^b$ uniformemente sui compatti non contenenti a . Sia $K \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$ un compatto che non contiene a e sia V un intorno di b in $\overline{\mathbb{H}^n}$. Dobbiamo mostrare che $f_n(K) \subset V$ definitivamente in n .

Sia U un intorno di a in $\overline{\mathbb{H}^n}$ disgiunto da K . Sia γ_n la geodetica per p e x_n . Fissato $R > 0$, sia y_n il punto di γ_n a distanza R da p e sia H_n l'iperpiano ortogonale a γ_n passante per y_n . A patto di prendere R sufficientemente grande, $H_n \subseteq U$ definitivamente in n . (Quanto grande debba essere R dipende solo da U .)

Per costruzione, $f_n(\gamma_n)$ tende alla geodetica per b e c e $f_n(H_n)$ è l'iperpiano ortogonale a $f_n(\gamma_n)$ passante per $f(y_n)$. Siccome $d(y_n, p) = R$, allora $f_n(y_n) \rightarrow b$; dunque per ogni intorno V di b in $\overline{\mathbb{H}^n}$ si ha che $f_n(H_n) \subset V$ definitivamente in n . (Esercizio: formalizzare quest'ultima affermazione).

Per costruzione, e definitivamente in n , K sta nel semispazio delimitato da H_n che non contiene x_n , ergo $f_n(K)$ sta nel semispazio delimitato da $f_n(H_n)$ che non contiene c . Quindi $f_n(K) \subseteq V$, definitivamente in n . \square

Esercizio 6.45. Dimostrare che se $f_n \rightarrow C_a^b$ allora $f_n^{-1} \rightarrow C_b^a$.

6.8. La traccia al bordo determina. Questa è una cosa importante e la scriviam così in una sezione separata per dargli il giusto risalto.

Teorema 6.46. *Se f e g coincidono al bordo allora sono uguali.*

Dimostrazione. $f \circ g^{-1}$ è l'identità al bordo. Per il Teorema 6.5, fissa tutto. \square

Proposizione 6.47. *Le estensioni di isometrie al bordo nei modelli del disco e del semispazio sono applicazioni conformi.*

Dimostrazione. Le isometrie son composizioni di inversioni rispetto a sfere, che son conformi e son definite su tutto $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. \square

6.9. Casi particolari $n = 2, 3$ (e 4, 5).

Fatto 6.48. *Le applicazioni conformi di $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ che preservano l'orientazione sono esattamente i suoi biolomorfismi. Fissati tre punti $0, 1, \infty \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, ossia un'identificazione di $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, il gruppo dei biolomorfismi è identificato con $PSL(2, \mathbb{C})$, che agisce su $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$*

via trasformazioni di Moebius

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

L'azione deriva semplicemente dalla proiettivizzazione: se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nel proiettivo $(z, w) \sim (Z, 1)$ con $Z = \frac{z}{w}$ e

$$A \begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix} = (aZ + b, cZ + d) \sim \left(\frac{aZ + b}{cZ + d}, 1 \right).$$

Per le applicazioni che invertono l'orientazione basta tirarne in mezzo una che la inverte, tipo il coniugio.

Fatto 6.49. *L'inclusione $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ al bordo si legge come un'inclusione $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$. Se da un punto di \mathbb{H}^2 si fa partire la geodetica ortogonale, essa interseca $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}P^1$ in un punto (per ognuna delle due componenti connesse di $\mathbb{C}P^1 \setminus \mathbb{R}P^1$). Tale corrispondenza è un isomorfismo conforme tra \mathbb{H}^2 e $D^2 \subset \mathbb{C}P^1$.*

Questa cosa qua sembra solo un cambio di punti di vista: in \mathbb{H}^3 si può vedere \mathbb{H}^2 dentro \mathbb{H}^3 o dentro $\partial\mathbb{H}^3$. Ma le cose non son sempre così ovvie e la corrispondenza tra quello che si vede al bordo e quello che succede dentro è uno dei capitoli più eleganti, e per certi versi ancora non pienamente compresi, della storia delle varietà iperboliche tridimensionali.

Corollario 6.50. *Sussistono i seguenti isomorfismi*

$$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \simeq PSL(2, \mathbb{R}) \quad \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \simeq PSL(2, \mathbb{C}).$$

Si noti che $O(2, 1)$ è fatto di matrici 3×3 a coefficienti reali e $PSL(2, \mathbb{R})$ è fatto di (classi di) matrici 2×2 a coefficienti reali. Similmente si noti che $O(3, 1)$ è fatto di matrici 4×4 a coefficienti reali, ma $PSL(2, \mathbb{C})$ è fatto di (classi di) matrici 2×2 a coefficienti complessi.

L'azione di $PSL(2, \mathbb{R})$ è, nel modello del semipiano $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ quella data dalle applicazioni di Moebius.

Esercizio 6.51. Dimostrare che $PSL(2, \mathbb{R})$ agisce per isometrie su $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$. Dimostrare che è l'intero gruppo $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

Esercizio 6.52. Dimostrare la tricotomia ellittica, parabolica, iperbolica per $PSL(2, \mathbb{R})$ e $PSL(2, \mathbb{C})$.

Esercizio 6.53. Dimostrare che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ rappresenta un'isometria:

- (1) ellittica se e solo se $-2 < \text{tr}(A) < 2$ e in tal caso A è coniugata a una matrice del tipo $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$;

- (2) parabolica se e solo se $tr(A) = \pm 2$ e in tal caso A è coniugata a una matrice del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (3) iperbolica se e solo se $|tr(A)| > 2$ e in tal caso A è coniugata a una matrice del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$.

Esercizio 6.54. Dimostrare che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ rappresenta un'isometria:

- (1) ellittica se e solo se $tr(A) \in \mathbb{R} \cap (-2, 2)$, e in tal caso A è coniugata a una matrice del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ con $|a| = 1$;
- (2) parabolica se e solo se $tr(A) = \pm 2$, e in tal caso A è coniugata a una matrice del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (3) iperbolica altrimenti, e in tal caso A è coniugata a una matrice del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ con $|a| \neq 1$.

L'azione di $PSL(2, \mathbb{C})$ è chiara su $\partial\mathbb{H}^3$. Per visualizzare algebricamente l'azione su tutto \mathbb{H}^3 basta tirare in ballo i quaternioni.

$$\mathcal{H} = \{\xi = x + iy + jt + ks : x, y, t, s \in \mathbb{R}\}$$

con la moltiplicazione polinomiale con le regole

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik.$$

Il coniugio, modulo e inverso sono i soliti

$$\bar{\xi} = x - iy - jt - ks, \quad |\xi|^2 = \xi\bar{\xi} = x^2 + y^2 + t^2 + s^2, \quad \xi^{-1} = \bar{\xi}/|\xi|^2$$

L'unica cosa a cui stare attenti è

$$\overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\bar{\xi}.$$

I quaternioni si possono scrivere anche usando i complessi come

$$\xi = z + kw \quad z, w \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy, w = s + it.$$

Così come $\partial\mathbb{H}^3 \simeq S^2$ si può vedere come $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ e dentro ci sta $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \simeq \partial\mathbb{H}^2$, anche $\partial\mathbb{H}^5 \simeq S^4$ si può vedere come il proiettivo quaternionico $\mathcal{H}\mathbb{P}^1$ e le sue applicazioni conformi, le moebius, sono le "razionali fratte":

$$\xi \mapsto (a\xi + b)(c\xi + d)^{-1} \quad a, b, c, d \in \mathcal{H}.$$

OCCHIO! I quaternioni non sono commutativi quindi bisogna scrivere le operazioni sempre tenendo conto dell'ordine. Per questo si deve scrivere $(a\xi + b)(c\xi + d)^{-1}$ e non $\frac{a\xi+b}{c\xi+d}$.

Dentro S^4 ci stanno $S^3 \simeq \partial\mathbb{H}^4$ e $S^2 \simeq \partial\mathbb{H}^3$; in particolare $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \subset \mathcal{H}\mathbb{P}^1$ e le moebius che lo preservano sono quelle a coefficienti complessi.

Esattamente come succede con $PSL(2, \mathbb{C})$ e $PSL(2, \mathbb{R})$. Nel modello del semipiano possiamo vedere \mathbb{H}^3 come il sottoinsieme insieme di \mathcal{H} senza componente k e con componente j positiva.

$$\mathbb{H}^3 = \{z + jt, z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}^+\}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ agisce su \mathbb{H}^3 come

$$\xi \rightarrow (a\xi + b)(c\xi + d)^{-1}.$$

(Le isometrie di \mathbb{H}^4 e di \mathbb{H}^5 sono anch'esse visibili algebricamente coi quaternioni). Giusto per avere un'idea di cosa vien fuori facciamo il calcolo esplicito:

$$\begin{aligned} & (a(z + jt) + b)(c(z + jt) + d)^{-1} = \\ (az + ajt + b)(cz + cjt + d)^{-1} &= \frac{(az + ajt + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{j}\bar{c}t + \bar{d})}{|cz + cjt + d|^2} \\ &= \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) - (az + b)\bar{j}\bar{c}t + at(cz + d)\bar{j} + a\bar{c}t^2}{|\dots|^2} \\ &= \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) - aczjt - bcjt + atczj + adtj + a\bar{c}t^2}{|\dots|^2} \\ &= \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + jt + a\bar{c}t^2}{|\dots|^2} \\ &= \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + jt + a\bar{c}t^2}{(cz + cjt + d)(\bar{c}\bar{z} + \bar{j}\bar{c}t + \bar{d})} \\ &= \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + jt + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + (cz + d)\bar{j}\bar{c}t + cjt(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + cjt\bar{j}\bar{c}t} \\ &= \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + jt + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 - (cz + d)cjt + c(cz + d)jt + |c|^2t^2} \\ &= \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + jt + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2} \end{aligned}$$

Si noti che per $t = 0$ si ritrova l'azione su $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ e che per $b = c = 0$, ponendo $\lambda = a^2$, si trova $f(z, t) = (\lambda z, |\lambda|t)$ (Esercizio 6.28).

Esercizio 6.55. Dimostrare che le Moebius quaternioniche sono davvero $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$. Ossia, definendo

$$\Phi : PLS(2, \mathbb{C}) \rightarrow \{f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\} \quad \Phi(A) = \xi \mapsto (a\xi + b)(c\xi + d)^{-1}$$

ove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc = 1$, e identificando \mathbb{H}^3 col sottoinsieme di \mathcal{H}

$$\mathbb{H}^3 = \{x + iy + jt\}$$

dimostrare che:

$$(1) \Phi(A)(\mathbb{H}^3) = \mathbb{H}^3;$$

- (2) $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$ e $\Phi(I) = Id$;
- (3) è sufficiente controllare che $\Phi(A)$ sia un'isometria per matrici con $dc = 0$, e controllarlo;
- (4) $\Phi : PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ è iniettiva e suriettiva.

6.10. **Ancora birapporti.** Occhio che andremo a fare qualcosa di leggermente diverso dal birapporto usato nel modello proiettivo.

In dimensione bassa la geometria iperbolica esibisce quindi alcune caratteristiche della geometria di $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{H}$. Per esempio la transitività sulle triple di punti al bordo si può leggere in questo modo: in $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ le proiettività agiscono in modo transitivo sulle triple di punti. Un'invariante chiave della geometria proiettiva è il birapporto. Dati quattro punti distinti $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ si definisce il loro birapporto come

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x_2 - x_4}{x_3 - x_4}$$

Quando c'è di mezzo l'infinito si usa esattamente come dovrebbe venirvi in mente di fare, per esempio

$$\frac{\lambda}{0} = \infty \quad \frac{\lambda}{\infty} = 0 \quad \frac{\lambda\infty}{\mu\infty} = \frac{\lambda}{\mu} \quad [0 : 1 : \lambda : \infty] = \lambda$$

Proposizione 6.56. *Siano x_1, x_2, x_3, x_4 e y_1, y_2, y_3, y_4 due quadruple di punti in $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ o $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Allora esiste $f \in \text{Isom}^+$ che manda x_i in y_i se e solo se i birapporti delle due quadruple coincidono, cioè se e solo se*

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = [y_1 : y_2 : y_3 : y_4].$$

In oltre tale f se esiste è unica.

Dimostrazione. Questo è un fatto standard di geometria proiettiva: l'unica moebius che manda

$$x_1 \rightarrow 1 \quad x_2 \rightarrow 0 \quad x_3 \rightarrow \infty$$

è

$$f(z) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x_2 - z}{x_3 - z} = [x_1 : x_2 : x_3 : z].$$

□

Ridiciamolo: il birapporto di quattro punti è proprio l'immagine del quarto punto tramite la moebius che sistema i primi tre in $1, 0, \infty$.

Esercizio 6.57. Il birapporto di 4 punti distinti in \mathbb{C} è reale se e solo se giacciono su una circonferenza (le rette son considerate circonferenze per l'infinito)

Esercizio 6.58. Dimostrare che se si permutano quattro punti il loro birapporto cambia nell'insieme

$$z, 1 - \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}, \frac{1}{z}, 1 - z, \frac{z}{z-1}$$

e i primi tre casi sono quelli corrispondenti a permutazioni pari.

Oltre che a capire quali siano le quadruple di punti isometriche tra loro, il birapporto serve anche ad altre cose, per esempio a calcolare lunghezze di traslazione e angoli.

Proposizione 6.59. *Sia $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ iperbolica con punti fissi x_0, x_∞ e lunghezza di traslazione λ . Allora per ogni x si ha*

$$\lambda = \log([x_0 : x : g(x) : x_\infty])$$

ove il birapporto è calcolato nel modello del disco o in quello del semispazio.

Dimostrazione. Noi abbiamo usato l'inversione φ rispetto al cerchio di centro $-i$ e raggio $\sqrt{2}$ come isometria tra il modello del disco e quello del semipiano, ma essa inverte l'orientazione. Poco male: una che preserva l'orientazione è data da

$$f(z) = \varphi(\bar{z}) = 2\frac{1}{\bar{z} + i} - i = \frac{2 - iz - 1}{z - i} = \frac{-iz + 1}{z - i} = \frac{z + i}{iz + 1}$$

essa è moebius e quindi preserva il birapporto.

Ne segue che basta controllare cosa succede nel modello del semispazio. A meno di moebius possiamo supporre che $x_0 = 0$ e $x_\infty = \infty$. Dunque in questo modello

$$g(z) = e^\lambda z$$

e

$$[0 : z : g(z) : \infty] = \frac{e^\lambda z - 0}{z - 0} \frac{z - \infty}{e^\lambda z - \infty} = e^\lambda$$

□

Si noti che questo birapporto è diverso da quello usato per calcolare la distanza nel modello del proiettivo: lì infatti servivano quattro punti che fossero allineati nel modello proiettivo, qui i punti $x_0, x, g(x), x_\infty$ non sono necessariamente allineati in quel modello (lo sono solo se x sta sull'asse di g). In oltre il birapporto qui si sta facendo come numeri complessi, non usando il modulo delle differenze.

Lemma 6.60. *Due geodetiche in \mathbb{H}^n vivono sempre in un \mathbb{H}^3 e, se si intersecano, in un \mathbb{H}^2 . (E in un \mathbb{H}^1 se sono uguali).*

Dimostrazione. Nel modello dell'iperboloide esse vivono nello spazio generato da due piani, che ha dimensione 4 se sono in posizione generica e dimensione 3 se hanno una retta in comune. (E dimensione due se i due piani coincidono). □

Lemma 6.61. *(distanza complessa tra geodetiche) Siano η, γ due geodetiche orientate in \mathbb{H}^3 con punti al bordo η_\pm, γ_\pm distinti tra loro. Sia r l'unica perpendicolare comune orientata da η a γ . Allora esiste un'unica $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ (ellittica o iperbolica) con asse r tale che $f(\eta) = \gamma$.*

Nel modello del semispazio in cui r è la retta verticale per 0, la f si legge al bordo come $f(z) = \lambda z$, ove il numero complesso λ soddisfa:

- (1) $\log(|\lambda|) = d(\eta, \gamma)$
- (2) l'argomento di λ è l'angolo tra $|\lambda|\eta$ e γ (queste due geodetiche si intersecano).

Dimostrazione. Nel modello del semispazio $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, in cui r è la retta verticale da 0 a ∞ , i punti all'infinito di γ e η sono simmetrici rispetto a 0. Cioè $\eta_- = -\eta_+$ e $\gamma_- = -\gamma_+$. In questo modello le isometrie che preservano l'orientazione e hanno asse r son tutte con traccia al bordo del tipo $f(z) = az$. A meno di omotetie (che lasciano r invariante) possiamo supporre che $\eta_{\pm} = \pm 1$. Sia $\lambda = \gamma_+$ (dunque $\gamma_- = -\lambda$). Chiaramente l'isometria che al bordo è $f(z) = \lambda z$ fa quello che è richiesto nell'enunciato ed è l'unica che lo fa.

Le intersezioni di η e γ con r sono $i, |\lambda|i$ rispettivamente, dunque $d(\eta, \gamma) = \log |\lambda|$. La geodetica $|\lambda|\eta$ passa anch'essa per $|\lambda|i$. Se $\lambda = e^{t+i\theta}$ allora f si può scomporre come prodotto $g_2 \circ g_1$ con g_1, g_2 che hanno traccia al bordo rispettivamente $z \mapsto |\lambda|z$ e $z \mapsto e^{i\theta}z$.

$g_1(\eta) = |\lambda|\eta$ e $g_2(|\lambda|\eta) = \gamma$. Siccome g_2 è una rotazione di angolo θ , allora l'angolo tra $|\lambda|\eta$ e γ è proprio θ . \square

Definizione 6.62. Date due geodetiche η, γ orientate in \mathbb{H}^n con estremi al bordo distinti, la distanza complessa η e γ è quel numero $t+i\theta$ tale che, se guardiamo all' \mathbb{H}^3 che contiene entrambe, il λ del Lemma 6.61 è $\lambda = e^{t+i\theta}$.

Proposizione 6.63. Siano γ, η due geodetiche in \mathbb{H}^n con estremi al bordo γ_{\pm} e η_{\pm} disgiunti tra loro. Allora

$$[\gamma_- : \gamma_+ : \eta_+ : \eta_-] = \frac{(\lambda + 1)^2}{4\lambda}$$

ove $\lambda = e^{t+i\theta}$ è l'esponenziale della distanza complessa tra η e γ .

Dimostrazione. Nel modello del semispazio in cui la perpendicolare comune è la retta verticale per 0 e $\eta_{\pm} = \pm 1$, abbiamo $\gamma_{\pm} = \pm\lambda$. Il birapporto $[\gamma_- : \gamma_+ : \eta_+ : \eta_-]$ si calcola esplicitamente:

$$[\gamma_- : \gamma_+ : \eta_+ : \eta_-] = \frac{1 + \lambda}{\lambda + 1} \frac{\lambda + 1}{1 + 1} = \frac{(\lambda + 1)^2}{4\lambda}$$

\square

Corollario 6.64. Siano γ, η due geodetiche in \mathbb{H}^2 disgiunte e con estremi al bordo γ_{\pm} e η_{\pm} disgiunti tra loro. Allora il birapporto tra i punti al bordo ci dice chi è la distanza tra η e γ . In particolare

$$[\gamma_- : \gamma_+ : \eta_+ : \eta_-] = \cosh^2 \left(\frac{d(\eta, \gamma)}{2} \right)$$

ovvero

$$d(\eta, \gamma) = 2 \cosh^{-1} \left(\sqrt{[\gamma_- : \gamma_+ : \eta_+ : \eta_-]} \right).$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 6.63, sappiamo che

$$[\gamma_- : \gamma_+ : \eta_+ : \eta_-] = \frac{(\lambda + 1)^2}{4\lambda}$$

e nel nostro caso $\lambda = e^t$ è reale, con $|t| = d(\eta, \gamma)$. Per ottenere la formula richiesta dobbiamo ricordare che

$$\cosh(2\alpha) = \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha = \cosh^2 \alpha + (\cosh^2 \alpha - 1) = 2 \cosh^2 \alpha - 1$$

da cui

$$\cosh^2(\theta/2) = (\cosh \theta + 1)/2.$$

$$\frac{(\lambda + 1)^2}{4\lambda} = \frac{1}{4}(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} + 1 \right) = \frac{\cosh t + 1}{2} = \cosh^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

□

Corollario 6.65. *Siano γ, η due geodetiche in \mathbb{H}^2 intersecanti e con estremi al bordo γ_{\pm} e η_{\pm} . Allora il birapporto tra i punti al bordo ci dice chi è l'angolo tra η e γ . In particolare*

$$[\gamma_- : \gamma_+ : \eta_+ : \eta_-] = \cos^2 \left(\frac{\angle(\eta, \gamma)}{2} \right)$$

ovvero

$$\angle(\eta, \gamma) = 2 \arccos^{-1} \left(\sqrt{[\gamma_- : \gamma_+ : \eta_+ : \eta_-]} \right).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è un copia e incolla della precedente:

Per la Proposizione 6.63, sappiamo che

$$[\gamma_- : \gamma_+ : \eta_+ : \eta_-] = \frac{(\lambda + 1)^2}{4\lambda}$$

e in questo caso $\lambda = e^{i\theta}$ ha modulo 1. Per ottenere la formula richiesta dobbiamo ricordare che

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

da cui

$$\cos^2(\theta/2) = (\cos \theta + 1)/2.$$

$$\frac{(\lambda + 1)^2}{4\lambda} = \frac{1}{4}(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} + 1 \right) = \frac{\cos \theta + 1}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

□

7. (X, G) -STRUTTURE

7.1. **Contesto:** X spazio modello, tipicamente una varietà semplicemente connessa. G gruppo di trasformazioni di X , tipicamente diffeomorfismi, con la seguente proprietà di rigidità locale: se due elementi di G coincidono su un aperto, allora sono uguali sempre

$$f, g \in G \quad f|_U = g|_U \Rightarrow f = g.$$

Se X è Riemanniana, il gruppo di isometrie di X va bene. Se vogliamo che tutto preservi l'orientazione lo richiediamo.

Esempio 7.1. Per $X = \mathbb{R}^n$: $G = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ va bene; $G = \text{Aff}(\mathbb{R}^n) = \{AX + b; A \in GL(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n\}$ va bene; $G = \text{difeo}(\mathbb{R}^n)$ non va bene; tutte i gruppi di robe analitiche vanno bene.

Esempio 7.2. $X = \mathbb{H}^n$, $G = \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ va bene; $X = \mathbb{H}^n$, $G = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ va bene. In particolare $X = \mathbb{H}^2$, $G = PLS(2, \mathbb{R})$ e $X = \mathbb{H}^3$, $G = PSL(2, \mathbb{C})$ van bene.

7.2. Atlanti.

Definizione 7.3. Un atlante per una (X, G) -struttura su M è un atlante con carte locali in X e cambi di carta in G . Cioè un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$, diffeomorfismi $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ ove V_i è aperto di X e su ogni componente connessa C di $U_i \cap U_j$ si richiede che

$$\varphi_{ji}^C = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(C) \rightarrow \varphi_j(C)$$

sia la restrizione di un elemento di G . (Tale elemento sarà unico per la proprietà di rigidità locale).

Osservazione 7.4. In tutti gli aggeggi definiti così i cambi di carta soddisfano la condizione di cociclo: se C è una componente connessa di $U_i \cap U_j \cap U_k$ allora

$$\varphi_{ki}^C = \varphi_k \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_k \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_{kj}^C \circ \varphi_{ji}^C$$

Come si fa con le cose definite con atlanti, si introducono gli atlanti massimali e le equivalenze.

Definizione 7.5. Due atlanti si dicono equivalenti se esiste una $f : M \rightarrow M$ tale che nelle carte locali f si legga come un elemento di G .

Definizione 7.6. Due atlanti sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante, cioè se l'identità di M in carte locali è un elemento di G . L'atlante massimale per una (X, G) -struttura è l'unione di tutti gli atlanti compatibili con un atlante dato.

Definizione 7.7. Una (X, G) -struttura su M è una classe di equivalenza di atlanti. Se non specificato si considera l'atlante massimale.

Definizione 7.8. Una struttura Euclidea, Sferica, Iperbolica su M è una (X, G) -struttura ove $X = \mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n$ rispettivamente e $G = Isom(X)$. Due strutture equivalenti si dicono isometriche.

Esempio 7.9. Su $S^1 = \{|z| = 1\}$ si può mettere una struttura Euclidea come segue. $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ con

$$U_1 = S^1 \setminus \{1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in (0, 2\pi)\} \quad U_2 = S^1 \setminus \{-1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in (\pi, 3\pi)\}$$

$$\varphi_1(e^{i\theta}) = \theta \quad \varphi_2(e^{i\theta}) = \theta.$$

$U_1 \cap U_2$ ha due componenti connesse, sulla prima $f_{2,1}(x) = x$, sulla seconda $f_{2,1}(x) = x + 2\pi$, entrambe isometrie di \mathbb{R} .

Esercizio 7.10. Dimostrare che tutte le strutture Euclidee su S^1 sono isometriche a meno di riscalamenti.

Esercizio 7.11. Il toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ possiede una struttura Euclidea data dal quoziente. Esercizio: scrivere esplicitamente un atlante e i cambi di carta. Esibire due strutture Euclidee sul toro che son diverse anche ammettendo riscalamenti.

Esempio 7.12. Consideriamo in \mathbb{R}^2 il seguente settore annulare

$$D = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [1, 2], \theta \in [0, \pi/3]\}$$

e identifichiamo i lati opposti di D in modo da ottenere un toro. Tali identificazioni inducono sul toro una $(\mathbb{R}^2, Aff(\mathbb{R}^2))$ -struttura che non è Euclidea (perchè?). Tale toro si può vedere come il quoziente di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ per il sottogruppo di $GL(2, \mathbb{R})$ generato dall'omotetia di ragione 2 e dalla rotazione di $\pi/3$.

Esempio 7.13. Consideriamo in \mathbb{R}^2 il seguente settore annulare

$$D = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [1, 2], \theta \in [0, 1]\}$$

e identifichiamo i lati opposti di D in modo da ottenere un toro. Tali identificazioni inducono sul toro una $(\mathbb{R}^2, Aff(\mathbb{R}^2))$ -struttura che non è Euclidea (perchè?). Tale struttura non si può vedere come quoziente di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ per un sottogruppo di $GL(2, \mathbb{R})$.

Esempio 7.14 (Cilindro iperbolico parabolico). In $\mathbb{H}^2 = \{\Im(z) > 0\}$ consideriamo la striscia $\{\Re(z) \in [1, 2]\}$ identificando $\{\Re(z) = 1\}$ e $\{\Re(z) = 2\}$ attraverso la traslazione

$$z \mapsto z + 1.$$

Il risultato è topologicamente un cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ ove $\mathbb{S}^1 \times \{t\}$ è lungo e^{-t} . Una specie di imbutone infinito da ambo i lati.

Esercizio 7.15. Dimostrare che il cilindro iperbolico 1 è metricamente completo.

Esempio 7.16 (Cilindro iperbolico incompleto). In $\mathbb{H}^2 = \{\Im(z) > 0\}$ consideriamo la striscia $\{\Re(z) \in [1, 2]\}$ identificando $\{\Re(z) = 1\}$ e $\{\Re(z) = 2\}$ attraverso l'omotetia

$$z \mapsto 2z.$$

Il risultato è topologicamente un cilindro, ma esso non è metricamente completo: i segmenti orizzontali a livello 2^n

$$\{x + 2^n i : x \in [1, 2]\}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$ si incollano a formare una curva lunga 2 il cui punto finale manca.

Esempio 7.17 (Cilindro iperbolico loxodromico). In $\mathbb{H}^2 = \{\Im(z) > 0\}$ consideriamo il settore circolare $\{|z| \in [1, 2]\}$ identificando $\{|z| = 1\}$ e $\{|z| = 2\}$ attraverso l'omotetia

$$z \mapsto 2z.$$

Il risultato è topologicamente un cilindro. I raggi per l'origine formano circonferenze la cui lunghezza va come $\cosh t$ ove t è la distanza iperbolica dall'asse immaginario (vedasi Teorema 5.62).

Esercizio 7.18. Dimostrare che il cilindro iperbolico loxodromico è metricamente completo. Dimostrare che il cilindro iperbolico incompleto non è altro che mezzo cilindro iperbolico 3.

7.3. Sviluppante e olonomia. In questa sezione non daremo dimostrazioni, per le quali si rimanda al [BP] (Capitolo B).

In tutti questi esempi è chiaro che succede qualcosa tutte le volte che si fa un giro lungo un elemento non banale del gruppo fondamentale. Non è un caso. Le (X, G) -strutture possono essere descritte tramite la coppia sviluppante-olonomia (che andremo a definire). La cosa non è molto diversa dalla costruzione di gruppo fondamentale e rivestimento universale, che sembrano due cose diverse ma son molto simili: Il rivestimento universale di M si può definire come l'insieme cammini che partono da un punto x_0 a meno di omotopia a estremi fissi, il gruppo fondamentale di M come i cammini che partono e finiscono da x_0 a meno di omotopia a estremi fissi.

Il procedimento per definire la mappa sviluppante a partire da un atlante è come quando si fa un puzzle: si parte da un pezzo, tipo un angolo, e si attaccano via via i pezzi combacianti, ma a volte si fa un gruppetto di pezzi e poi quando si trova un elemento che si attacca al bordo, esso si porta dietro tutto il gruppetto di pezzi.

Alternativamente, la sviluppante si può vedere come il proseguimento analitico di una singola carta.

Mettiamo un po' d'ordine matematico. Denotiamo con \widetilde{M} il rivestimento universale di M e $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ la proiezione. Con $\pi_1(M)$

indichiamo il gruppo delle trasformazioni deck di \widetilde{M} ; esso è isomorfo al gruppo fondamentale di M .

1) Si solleva la struttura di M al suo rivestimento universale: ogni carta (U, φ) dell'atlante massimale con U semplicemente connesso si solleva a \widetilde{M} e come diffeomorfismo locale con un aperto di X si usa la composizione $\varphi \circ \pi$.

2) Si sceglie un aperto base U_0 dell'atlante su \widetilde{M} e si definisce $F|_{U_0}$ come φ_0 .

3) Per ogni cammino liscio $\gamma : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$ con $\gamma(0) \in U_0$ si definisce un elemento $\rho(\gamma) \in G$ come segue: Si ricopre γ con aperti U_0, \dots, U_k dell'atlante massimale con la proprietà che le intersezioni tra essi siano connesse e tali che U_i intersechi solo il precedente e il successivo. Si pone

$$\rho(\gamma) = \varphi_{0,1} \circ \dots \circ \varphi_{k-1,k}.$$

Si osservi che ciò è possibile e ben definito per la condizione di rigidità locale degli elementi di G .

4) Si verifica che $\rho(\gamma)$ non dipende dalla classe di omotopia di γ a estremi fissi (vedasi [BP, Capitolo B, Sezione B.1] per una dimostrazione). La mappa ρ si comporta bene per concatenazione di cammini e sui cammini chiusi induce un una rappresentazione (cioè un morfismo di gruppi)

$$\rho : \pi_1(M) \rightarrow G.$$

Tale rappresentazione si chiama **olonomia** della (X, G) -struttura.

5) Si definisce $F : \widetilde{M} \rightarrow X$ e $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$ come

$$F|_{U_x} = \rho(\gamma)(\varphi_x)$$

ove γ è un cammino che inizia da U_0 e finisce in U_x .

La F si chiama mappa **sviluppante**. Per come si è definita la coppia sviluppante-olonomia, la sviluppante F è ρ -equivariante, cioè

$$F(\gamma x) = \rho(\gamma)(F(x)) \quad \forall x \in \widetilde{M}, \forall \gamma \in \pi_1(M).$$

Tale costruzione è unica una volta fissato U_0 (una volta piazzato un pezzo, tutti gli altri pezzi del puzzle hanno una posizione univocamente determinata).

In oltre due sviluppanti differiscono sempre per un elemento di G : se (F, ρ) e (F', ρ') sono due coppie sviluppante-olonomia allora esiste $g \in G$ tale che

$$F' = g \circ F \quad \rho'(\gamma) = g \circ \rho(\gamma) \circ g^{-1}.$$

Esercizio 7.19. Determinare sviluppanti e olonomie degli esempi visti prima.

Definizione 7.20. Una (X, G) -struttura si dice completa se la sviluppante è un omeomorfismo tra \widetilde{M} e X .

Esercizio 7.21. Determinare quali delle strutture viste sin ora sono complete.

Il nome completezza non è un caso. Se X è una varietà Riemanniana e $G < \text{Isom}(X)$ allora ogni (X, G) -struttura su M induce su M una metrica Riemanniana definita dal pull-back di quella di X tramite le carte locali (o se volete la sviluppante). A questo punto è lecito farsi domande di tipo metrico su M .

Prima ricordiamo un po' di terminologia e fatti sulle azioni di gruppi (vedasi [F, Sezione 6.6] per approfondimenti).

7.4. Azioni libere e propriamente discontinue.

Definizione 7.22. Un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X è una rappresentazione $\rho : G \rightarrow \text{Omeo}(X)$. (Rappresentazione = morfismo di gruppi). Se X è metrico, di solito l'azione è per isometrie, cioè $\rho : G \rightarrow \text{Isom}(X)$. Se non ci sono ambiguità si usa la notazione $\gamma(x)$ o γx per indicare $\rho(\gamma)(x)$.

Definizione 7.23. Un gruppo Γ agisce su uno spazio topologico X in modo libero se gli stabilizzatori son banali, cioè se $\gamma(x) \neq x$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\gamma \in \Gamma$ diverso dall'identità.

Definizione 7.24. Un gruppo numerabile Γ agisce su uno spazio topologico X in modo propriamente discontinuo se per ogni compatto K l'insieme $\{g \in \Gamma : K \cap g(K) \neq \emptyset\}$ è finito.

$\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ è un gruppo di Lie (è isomorfo a $O(n, 1)$) quindi i suoi sottogruppi sono anche sottospazi topologici.

Lemma 7.25. *Un sottogruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ è discreto se e solo se per ogni x l'orbita Γx non ha punti di accumulazione in \mathbb{H}^n .*

Dimostrazione. Usiamo le contrappositive. Se Γ non è discreto allora esiste $Id \neq \gamma_n \rightarrow Id$, dunque $\gamma_n(x) \rightarrow x$ per ogni x . Siccome $\text{Fix}(\gamma_n)$ è contenuto in un iperpiano, possiamo scegliere x che non sia fisso per nessuna γ_n e nessuna $\gamma_n \circ \gamma_m^{-1}$. Dunque i punti $\gamma_n(x)$ son tutti distinti tra loro e da x . Da $\gamma_n(x) \rightarrow x$ si deduce che l'orbita di x si accumula su x .

Viceversa, supponiamo che esistano $x, y \in \mathbb{H}^n$ e $\gamma_n \in \Gamma$ tali che $\gamma_n(x) \rightarrow y$ con $\gamma_n(x)$ tutti distinti tra loro. In particolare le γ_n son tutte distinte tra loro. Per il Teorema 6.44 a meno di sottosuccessioni γ_n converge a un'isometria γ . Per cui $\gamma_m^{-1} \circ \gamma_n$ sono elementi di Γ , diversi tra loro, che per $m, n \rightarrow \infty$ convergono all'identità (che sta in Γ). Dunque Γ non è discreto. \square

Lemma 7.26. *Sia $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. L'azione di Γ su \mathbb{H}^n è propriamente discontinua se e solo se Γ è un sottogruppo discreto di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.*

Dimostrazione. Se Γ non è discreto allora esiste $\gamma_n \in \Gamma \rightarrow Id$ con i γ_n tutti diversi tra loro. Ne segue che per ogni x il compatto $K = \overline{B(x, 1)}$

è uno per cui $K \cap \gamma_n(K) \neq \emptyset$ per infiniti γ_n . Dunque l'azione non è propriamente discontinua.

Viceversa, se l'azione non è propriamente discontinua allora esiste un compatto K tale che $K \cap \gamma_n(K) \neq \emptyset$ per un numero infinito di γ_n . Siano $x_n, y_n \in K$ tali che $\gamma_n(x_n) = y_n$. Per compattezza, a meno di passare a sottosuccessioni esistono x, y tali che $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Ne segue che $\gamma_n(x) \rightarrow y$. Quindi Γ non è discreto. \square

Lemma 7.27. $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ agisce su \mathbb{H}^n in modo libero e propriamente discontinuo se e solo se per ogni $x \in \mathbb{H}^n$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \cap \gamma(B(x, \varepsilon)) = \emptyset$ per ogni $\gamma \in \Gamma$ diverso dall'identità.

Dimostrazione. Supponiamo che esista x tale che per ogni n esiste $\gamma_n \in \Gamma$ tale che $B(x, 1/n) \cap \gamma_n(B(x, 1/n)) \neq \emptyset$. Allora o $\gamma_m(x) = \gamma_n(x)$ per qualche n, m , e allora l'azione non è libera, oppure $\gamma_n(x) \rightarrow x$ mostra che Γ non è discreto.

Vediamo il viceversa. Osserviamo che $B(\gamma(x), R) = \gamma(B(x, R))$ perchè stiamo aggeggiando con isometrie. Gli elementi $\gamma \in \text{stab}(x)$ soddisfano $B(x, \varepsilon) = \gamma(B(x, \varepsilon))$ quindi se l'azione non è libera siamo a posto. Se l'azione non è propriamente discontinua allora Γ non è discreto ed esistono x e γ_n tali che $\gamma_n(x) \rightarrow x$ e in tal caso per ogni $\varepsilon > 0$ le palle $B(\gamma_n(x), \varepsilon)$ e $B(x, \varepsilon)$ si intersecano per ogni n sufficientemente grande. \square

(Questo è un lemma in \mathbb{H}^n ma una delle due implicazioni è vera in generale, l'altra no. Vedasi [F, Teorema 6.6.17] ed esempi seguenti.)

Corollario 7.28. Γ agisce in modo libero e propriamente discontinuo se e solo se la proiezione $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$ è un rivestimento.

Dimostrazione. Per esercizio. \square

Sostanzialmente nel nostro caso “azione libera e propriamente discontinua” è come dire “orbite discrete e niente stabilizzatori”.

Lemma 7.29. Sia $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

- (1) Se l'azione di Γ su \mathbb{H}^n è libera allora Γ non ha torsione.
- (2) L'azione di Γ su \mathbb{H}^n è libera e propriamente discontinua se e solo se Γ è un sottogruppo discreto di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ senza torsione.

Dimostrazione. Gli elementi parabolici e iperbolici di \mathbb{H}^n non hanno torsione. Quindi se c'è torsione allora Γ contiene degli ellittici diversi dall'identità; essi per definizione fissano un punto e dunque l'azione non è libera.

Ne segue che se l'azione è libera e propriamente discontinua allora per i lemmi precedenti Γ è discreto e senza torsione.

Viceversa se Γ non agisce in modo libero e propriamente discontinuo allora o l'azione non è propriamente discontinua, e dunque Γ non è discreto, oppure Γ è discreto ma l'azione non è libera. In tal caso esiste

x tale che $\text{stab}(x) \cap \Gamma$ è un sottogruppo non banale. Siccome $\text{stab}(x)$ è compatto e Γ è discreto, $\text{stab}(x) \cap \Gamma$ è un gruppo finito, ergo ha torsione. \square

Fatto 7.30. *Sia X è una varietà Riemanniana metricamente completa e sia $G < \text{Isom}(X)$. Una (X, G) -struttura su M induce su M una metrica completa se e solo se essa è completa secondo la Definizione 7.20.*

In tal caso l'azione di ologonia è libera e propriamente discontinua e, detto $\Gamma = \text{Imm}(\rho)$, si ha che M è isometrica a X/Γ . In altre parole esiste un'isometria $f : M \rightarrow X/\Gamma$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{F} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{mappa quoziente} \\ M & \xrightarrow{f} & X/\Gamma \end{array}$$

Siccome X è semplicemente connessa e $X \rightarrow X/\Gamma$ è un rivestimento, esso è il rivestimento universale. Dunque $\pi_1(X/\Gamma) = \Gamma$. Si noti che ρ non è altro che $f_* : \pi_1(M) \rightarrow \Gamma = \pi_1(X/\Gamma)$.

Esercizio 7.31. Dimostrare che se la sviluppante è un omeomorfismo allora la metrica è completa. Dimostrare che il viceversa deriva dal fatto che se la metrica è completa allora la sviluppante ha la proprietà del sollevamento dei cammini (vedasi [BP, Teorema B.1.5]).

In generale se sappiamo solo che l'ologonia agisce in modo libero e propriamente discontinuo allora possiamo solo dire che M è un aperto di X/Γ .

Definizione 7.32. Una varietà iperbolica è una varietà dotata di una $(\mathbb{H}^n, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ -struttura. Se non specificato si sottintende che la struttura sia completa.

Osservazione 7.33. Dire che una varietà è una varietà iperbolica è la stessa cosa che dire che è una varietà Riemanniana (completa) localmente isometrica ad \mathbb{H}^n , che è la stessa cosa che dire che ha curvatura costante -1 .

Osservazione 7.34. Una varietà Riemanniana compatta è sempre metricamente completa, quindi questa storia della completezza viene in ballo solo per varietà non compatte. In particolare se una varietà compatta ammette una $(\mathbb{H}^n, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ -struttura, essa sarà sempre completa.

7.5. Domini fondamentali. Come abbiamo visto, una varietà iperbolica è il quoziente di \mathbb{H}^n per l'azione di un sottogruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su \mathbb{H}^n .

Definizione 7.35. Sia $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Un dominio fondamentale per Γ è un chiuso D che sia la chiusura della sua parte interna, tale che ∂D sia regolare a pezzi, tale che

$$\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D) = \mathbb{H}^n$$

e tale che

$$\gamma(D) \cap D \subset \partial D$$

ed è diverso dal vuoto solo per un numero finito di $\gamma \in \Gamma$.

Sostanzialmente D fa le veci del quadratino di quando si dice $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. (Le condizioni di regolarità e quella di intersecare un numero finito di traslati si possono indebolire).

Proposizione 7.36. *Se \mathbb{H}^n/Γ è una varietà iperbolica completa, allora per ogni $x_0 \in \mathbb{H}^n$ l'insieme*

$$D = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, x_0) \leq d(x, \gamma x_0) \forall \gamma \in \Gamma\}$$

è un dominio fondamentale per Γ omeomorfo a una palla. La frontiera di D è fatta da un numero finito di iperpiani totalmente geodetici.

Dimostrazione. Vedasi [BP, Proposizione C.1.3]. (Più in generale si tratta di domini alla Voronoi.) \square

I traslati $\gamma(D)$ di un dominio fondamentale tassellano \mathbb{H}^n esattamente come le mattonelle del nostro soggiorno, solo che il nostro soggiorno è Euclideo.

8. PRIME CONSEGUENZE DELL'IPERBOLICITÀ

8.1. Una superficie iperbolica in ogni genere $g \geq 2$. Siamo in grado di esibire una superficie iperbolica in ogni genere almeno 2.

Consideriamo S_g ottenuta come quoziente del $4g$ -agono regolare con le identificazioni usuali. In \mathbb{H}^2 , modello del disco consideriamo $4g$ raggi geodetici r_1, \dots, r_{4g} raggi uscenti dall'origine con angolo tra r_i e r_{i+1} uguale a $\frac{2\pi}{4g}$. Adesso consideriamo su ognuno di essi i punti x_i^L a distanza iperbolica L dall'origine. Costruiamo il $4g$ -agono regolare con lati sui X_i^L . L'angolo tra il lati tende a quello Euclideo per $L \rightarrow 0$ e tende a 0 per $L \rightarrow \infty$. Per continuità esiste L_0 tale che l'angolo tra due lati successivi è $2\pi/4g$. Ne segue che le identificazioni che forniscono S_g possono essere fatte su quel $4g$ -agono usando isometrie in modo da ottenere una struttura iperbolica su S_g . Il $4g$ -agono è un dominio fondamentale per l'olonomia della struttura.

8.2. Nulla da fare per sfere e tori.

Proposizione 8.1. *S^2 non ammette una struttura iperbolica.*

Dimostrazione. Se l'avesse, essa sarebbe completa perché S^2 è compatta, ergo la sviluppante da $S^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ sarebbe un omeomorfismo, ma S^2 non è omeomorfa a \mathbb{R}^2 , mentre \mathbb{H}^2 lo è. \square

Proposizione 8.2. *Il gruppo fondamentale di una varietà iperbolica completa non ha torsione. Né contiene ellittici.*

Dimostrazione. Il suo gruppo fondamentale agisce in modo libero e propriamente discontinuo su \mathbb{H}^n . Azione libera \rightarrow niente ellittici. Equivalentemente il gruppo fondamentale è un gruppo discreto senza torsione. \square

Proposizione 8.3. *T^2 non ammette una struttura iperbolica.*

Dimostrazione. Se l'avesse esso sarebbe il quoziente di \mathbb{H}^2 per un gruppo abeliano isomorfo a \mathbb{Z}^2 . I sottogruppi abeliani di $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ senza ellittici sono o completamente iperbolici o parabolici con gli stessi punti fissi. In entrambi i casi sono isomorfi a sottogruppi di $\text{Isom}^+(\mathbb{R})$ (guardando l'azione sull'asse nel primo caso e sulle orosfere nel secondo). Ma $\text{Isom}^+(\mathbb{R})$ non contiene sottogruppi discreti che non siano isomorfi a \mathbb{Z} . \square

Esercizio 8.4. Dimostrare che T^n non ammette una struttura iperbolica.

Esercizio 8.5. Dimostrare che i sottogruppi abeliani di gruppi fondamentali di varietà iperboliche complete sono o loxodromici isomorfi a \mathbb{Z} o completamente parabolici isomorfi a \mathbb{Z}^n con n minore della dimensione della varietà.

8.3. Geodetiche e gruppo fondamentale. Prendiamo una varietà iperbolica M e una curva chiusa γ in M . Vorremmo vedere γ come elemento di $\pi_1(M)$ (ricordiamo che esso è il gruppo delle trasformazioni di rivestimento del rivestimento universale $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$).

Ripassiamo come si fa (vedasi [F, Capitolo 7]). Parametizziamo $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ con $\gamma(0) = \gamma(1)$. Scegliamo il punto $\widetilde{\gamma(0)}$. L'azione di γ su $\pi^{-1}(\gamma(0))$ è la solita: per ogni sollevamento $\widetilde{\gamma(0)} \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ l'immagine di $\widetilde{\gamma(0)}$ è il punto finale dell'unico sollevamento di γ che parte da $\widetilde{\gamma(0)}$. A questo punto si dimostra che esiste un unico elemento di $\pi_1(M)$ che estende l'azione di γ sulla fibra di $\gamma(0)$.

Se vogliamo adottare questo punto di vista dobbiamo sistemare l'ambiguità della scelta punto base. Tale ambiguità si trasforma in coniugio in $\pi_1(M)$, in altre parole l'elemento di $\pi_1(M)$ associato a γ è ben definito a meno di coniugio. Ci va comunque di lusso, perché varie cose sono invarianti per coniugio.

Per esempio il tipo di un'isometria è invariante per coniugio (è determinato la sua forma di Jordan in $O(n, 1)$) quindi è ben definito per una curva chiusa. Similmente la sua lunghezza di traslazione lo è.

Osserviamo anche che, nella costruzione di poco fa, la distanza $\widetilde{\gamma(0)}$ e la sua immagine è sempre minore o uguale alla lunghezza di γ in quanto il sollevamento di γ è lungo quanto γ . In particolare la lunghezza metrica di γ sarà sempre maggiore o uguale della sua lunghezza di traslazione (esercizio: è uguale se e solo se γ è geodetica).

Teorema 8.6. *Sia M una varietà iperbolica completa e sia γ una curva chiusa omotopicamente non banale. Allora si danno i seguenti due casi, mutuamente esclusivi:*

- (1) γ è un elemento loxodromico, nella classe di omotopia libera di γ esiste un unico rappresentante geodetico, che coincide con l'unico rappresentante di lunghezza minima, la cui lunghezza altro non è che la lunghezza di traslazione di γ come elemento di $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.
- (2) γ è parabolico ed esistono curve liberamente omotope a γ arbitrariamente corte.

Dimostrazione. Scegliamo un punto base $x_0 \in M$, un suo sollevamento in \widetilde{M} , un arco σ che collega x_0 a γ e associamo a γ la curva chiusa con punto base x_0 data da $\sigma\gamma\sigma^{-1}$. Così abbiamo sistemato i punti base e associato a γ un elemento di $\pi_1(M)$. Sia \hat{M} il rivestimento di M associato a γ , che altro non è che $\mathbb{H}^n/\langle\gamma\rangle$. Esso è fatto come una versione n -dimensionale di un cilindro iperbolico di tipo loxodromico o parabolico (si vedano gli Esempi 7.14 e 7.17 in dimensione due, e si usi il Teorema 6.11 e il Corollario 6.19 per fabbricare le versioni n -dimensionali). In entrambi i casi γ si solleva a una curva $\hat{\gamma}$ e in \hat{M} si trova facilmente o l'unico rappresentante geodetico liberamente omotopo a $\hat{\gamma}$, oppure una famiglia di curve arbitrariamente corte, tutte liberamente omotope a $\hat{\gamma}$. Tali curve si proiettano su M fornendo o un rappresentante geodetico omotopo a γ o curve corte.

Manca da dimostrare l'unicità nelle affermazioni del punto (1). Il sollevamento a $\widetilde{M} = \mathbb{H}^n$ della geodetica trovata per γ è l'asse $\tilde{\gamma}$ dell'isometria rappresentata da γ . Se η è liberamente omotopa a γ , esse in $\pi_1(M)$ sono coniugate. Se $\eta = g\gamma g^{-1}$ allora l'asse di η è $\tilde{\eta} = g\tilde{\gamma}$. Quindi in M si ha $\pi(\tilde{\eta}) = \pi(\tilde{\gamma})$. Dunque la geodetica trovata in M è sempre la stessa.

Il fatto che la geodetica sia più corta delle altre curve nella stessa classe di omotopia libera dipende dal fatto che se una curva non è geodetica si può accorciare con omotopie locali. Il fatto che la lunghezza della geodetica nella classe di γ coincida con la sua lunghezza di traslazione come isometria è a questo punto pressoché tautologico. \square

Lemma 8.7. *Se M è una varietà iperbolica compatta allora tutti gli elementi non banali del suo gruppo fondamentale sono iperbolici.*

Dimostrazione. Che non ci sono ellittici è già stato dimostrato. Che non ci sono parabolici dipende dal fatto che se uno ha una successione di curve corte in una varietà compatta, a meno di sottosuccessioni esse tendono a un punto e dunque sono omotopicamente banali. \square

Corollario 8.8. *Il gruppo fondamentale di una varietà iperbolica compatta non contiene sottogruppi abeliani diversi da \mathbb{Z} . Essi son tutti del tipo $\langle\gamma\rangle$ con γ loxodromica.*

Lemma 8.9. *Sia M una varietà iperbolica e sia γ una curva chiusa in M . Allora il sollevamento di γ a $\widetilde{M} = \mathbb{H}^n$ è una curva contenuta in un intorno a banana il cui asse è il sollevamento del rappresentante geodetico di γ . In particolare si accumula all'infinito negli stessi due punti.*

Dimostrazione. Parametizziamo sia γ che il suo rappresentante geodetico γ_{geod} con S^1 . L'omotopia libera $S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ si solleva a un'omotopia $\mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$ che sia equivariante per l'azione di $\langle \gamma \rangle$. Dunque la distanza tra il sollevato di γ e di γ_{geod} è limitata (basta controllare cosa succede su un dominio fondamentale). Cioè γ_{geod} sta nella banana centrata in γ per un certo raggio. Ne segue che $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \widetilde{\gamma}(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \widetilde{\gamma_{geod}}(t)$. (Equivalentemente si poteva ragionare nel rivestimento di M relativo a γ e calcolare lì la distanza tra γ e γ_{geod}). \square

Teorema 8.10. *Sia S una superficie iperbolica e siano η, γ due curve chiuse in S omotopicamente non banali nè liberamente omotope tra loro. Se η e γ sono disgiunte allora il loro rappresentanti geodetici lo sono.*

Dimostrazione. Qui serve che siamo in dimensione due. Se η e γ sono disgiunte allora lo sono anche i loro sollevamenti a $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2$: se infatti essi si intersecassero allora la proiezione del punto di intersezione sarebbe un punto di intersezione in M . Ne segue che i punti al bordo η^\pm del sollevamento di η stanno nella stessa componente connessa di $\partial\mathbb{H}^2 \setminus \{\gamma^\pm\}$. Dunque nel modello del proiettivo i segmenti tra tali punti son disgiunti. Tali segmenti altro non sono che i sollevamenti dei rappresentanti geodetici di η e γ . \square

Teorema 8.11. *Sia M una varietà iperbolica e siano $\gamma, \eta \in \pi_1(M)$ diversi e tali che $\gamma^m \neq \eta^k$ per ogni k, m . Se uno di essi è loxodromico, allora γ, η non possono avere un punto fisso comune all'infinito.*

Dimostrazione. Se entrambi sono loxodromici allora se avessero i due punti fissi comuni uguali avrebbero lo stesso asse, la restrizione della loro azione all'asse sarebbe un sottogruppo discreto di $\text{Isom}^+(\mathbb{R})$ e dunque ciclico per cui $\gamma^m = \eta^k$ per qualche m, k . Se ne hanno uno solo in comune, allora per equivarianza si vede che in M la geodetica γ sta nell' ε -intorno di η per ogni $\varepsilon > 0$ dunque coincidono e i punti fissi comuni eran due.

Se uno è loxodromico e uno iperbolico allora, mettendoci nel modello in cui il punto fisso comune è ∞ e l'altro è zero, avremmo:

$$\gamma(X) = X + b \quad \eta(X) = \lambda A(X)$$

ove A sta in $\begin{pmatrix} O(n-1) & \\ & 1 \end{pmatrix}$. Dunque l'orbita di X contiene $\eta^{-n}(\gamma(\eta^n(X))) = X + A^{-n}(b)/\lambda^n$ che si accumula su X , quindi $\pi_1(M)$ non sarebbe discreto. \square

Si noti che di elementi parabolici con lo stesso punto all'infinito ce ne può essere uno \mathbb{Z}^k intero con $k < \dim(M)$.

9. POLIEDRI GEODETICI

Dati $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{H}^n$ si può considerare il loro inviluppo convesso. È immediato verificare che esso, nel modello del proiettivo coincide con l'inviluppo convesso Euclideo e che è determinato dall'intersezione di un numero finito di semispazi. Nel modello dell'iperboloide è l'intersezione con \mathcal{I}^n del cono positivo sull'inviluppo convesso di p_1, \dots, p_k .

La stessa cosa vale se qualche punto sta al bordo: definiamo l'inviluppo convesso di $p_1, \dots, p_k \in \overline{\mathbb{H}^n}$ come il suo inviluppo convesso nel modello del proiettivo o, equivalentemente con l'intersezione di \mathcal{I}^n col cono positivo sull'inviluppo convesso di p_1, \dots, p_k (ove qualcuno dei p_i sarà un vettore luce). Esso continua a essere intersezione finita di semispazi.

Definizione 9.1. Un poliedro totalmente geodetico è l'inviluppo convesso di un numero finito di punti in $\overline{\mathbb{H}^n}$. I punti estremali si chiamano vertici, se stanno in $\partial\mathbb{H}^n$ si chiamano vertici ideali. Una cuspidi di un poliedro è un intorno connesso di un vertice ideale che non contiene altri vertici.

Lemma 9.2 (Le cuspidi han volume finito). *Nel modello del semispazio di \mathbb{H}^n , sia $A \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \partial\mathbb{H}^n$ e sia $P = A \times [t_0, \infty)$. Allora*

$$\text{vol}(P) = \frac{\mathcal{A}}{n-1}$$

ove $\mathcal{A} = \text{Area}(A)/t_0^{n-1}$ è il volume iperbolico $(n-1)$ -dimensionale di $A \times \{t_0\}$ e $\text{Area}(A)$ è il volume Euclideo di A in \mathbb{R}^{n-1} .

Dimostrazione.

$$\text{vol}(P) = \int_{t_0}^{\infty} \int_A \frac{1}{t^n} dt dx_1 \dots dx_{n-1} = \text{Area}(A) \int_{t_0}^{\infty} t^{-n} dt = \frac{\text{Area}(A)}{(n-1)t_0^{n-1}}$$

\square

Corollario 9.3. *Il volume di un poliedro ideale è finito.*

Dimostrazione. Basta dividere il poliedro in un po' di cuspidi e una parte compatta: tutti i pezzi han volume finito. \square

Lemma 9.4. *Ogni poliedro è contenuto in un poliedro ideale.*

Dimostrazione. Nel modello del proiettivo questo diventa un enunciato Euclideo di facile dimostrazione. \square

Corollario 9.5. *Per ogni poliedro esiste un poliedro ideale di volume non minore.*

Teorema 9.6. *Il volume dei triangoli iperbolici totalmente geodetici è: π meno la somma degli angoli interni. Il triangolo di area massima è quello ideale (a meno di isometria ce n'è uno solo) che ha area esattamente π .*

Dimostrazione. Si fa il calcolo diretto in stile 9.2 ma un po' più accuratamente. Vedasi [BP, Lemma A.6.5]. \square

Teorema 9.7. *Per ogni n esiste v_n tale che ogni simplesso geodetico ha volume al massimo v_n . In oltre, tale massimo è raggiunto e il simplesso massimale è il simplesso ideale regolare (a meno di isometrie ce n'è uno solo).*

Dimostrazione. La filosofia è sempre quella del calcolo diretto (per induzione sulla dimensione) ma bisogna lavorare un po' di cesello. L'esistenza del limite v_n si riesce a farla senza soffrire troppo, il calcolo esatto del valore di v_n non è semplice. Vedasi [BP, Teorema C.2.1, Lemma C.2.3, Lemma C.2.4]. \square

Teorema 9.8 (à la Gauss-Bonnet). *Sia S una superficie iperbolica compatta. Allora*

$$\text{vol}(S) = -2\pi\chi(S) = 2\pi(2g - 2).$$

Dimostrazione. Si considera una triangolazione di S fatta di triangoli geodetici. (Esercizio: dimostrare che esiste) con T triangoli T_1, \dots, T_T — ognuno dei quali ha angoli interni $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — L lati e V vertici. Si ha

$$A(S) = \sum_i A(T_i) = \pi T - \sum_i (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)$$

Intorno a ogni vertice abbiamo un totale di 2π quindi $\sum_i (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = 2\pi V$. In oltre, siccome $3T = 2L$ si ha $T = 2L - 2T$ dunque

$$A(S) = \pi(2L - 2T) - 2\pi V = -2\pi(V - L + T) = -2\pi\chi(S).$$

\square

Esercizio 9.9. Dare un enunciato analogo, e una dimostrazione, per superfici compatte a bordo geodetico o per superfici complete ottenute incollando i lati di un poligono geodetico con qualche vertice ideale (anche tutti).

10. SPAZIO DI TEICHMULLER

Questa sezione è praticamente come in [BP, Sezione B.4] quindi la lasciam vuota. C'è solo per tener traccia del programma svolto.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [BP] R. Benedetti, C. Petronio. Lectures on Hyperbolic Geometry.
- [F] S. Francaviglia. Topologia, seconda edizione.
- [M] B. Martelli. An Introduction to Geometric Topology.
- [R] J. Ratcliffe . Foundations of Hyperbolic Manifolds.