Preliminari

0.1 Esercizi svolti

(1) Data l'applicazione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ cosí definita:

$$f(n) = n + 1, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

dire se é iniettiva, suriettiva, biettiva.

(1) Affinché f sia iniettiva, deve verificarsi che se le immagini di due qualsiasi elementi del dominio sono uguali, anche quegli stessi elementi devono essere uguali. Infatti

$$\forall\ n_1,\ n_2 \in \mathbb{N},\ f(n_1) = f(n_2) \Longleftrightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Longleftrightarrow n_1 = n_2,$$

quindi f é un'applicazione iniettiva. Affinché sia suriettiva, invece, l'insieme immagine della funzione deve coincidere con tutto il suo codominio. Peró é evidente che $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, quindi $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{N}$, e allora f non é suriettiva. Di conseguenza, non é nemmeno biettiva, e quindi non puó essere nemmeno invertibile.

♡

(2) Provare che l'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dotato dell'usuale operazione di prodotto é un gruppo moltiplicativo.

(2) Affinché una qualsiasi struttura algebrica sia un gruppo, essa deve avere un'operazione che goda della proprietá associativa, uno ed un solo elemento neutro, ed ogni suo elemento deve avere il suo simmetrico (opposto o inverso a seconda dell'operazione di cui l'insieme é dotato). Verifichiamo queste proprietá nel nostro caso, ricordando che ogni elemento di $\mathbb{C}$ é del tipo $a + ib$, con $a,\ b \in \mathbb{R}$, e $i = \sqrt{-1}$:

(I) $\forall\ a + ib,\ c + id,\ e + if \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha:

$$((a + ib) \cdot (c + id)) \cdot (e + if) = (ac - bd + i(bc + ad)) \cdot (e + if) =$$

$$= ace - bde - bcf - adf + i(bce + ade + acf - bdf) =$$
$$= a(ce - df) + ib(ce - df) + ia(de + cf) - b(de + cf) =$$
$$= (a + ib) \cdot (ce - df) + i(a + ib) \cdot (de + cf) =$$
$$= (a + ib)[ce - df + i(de + cf)] = (a + ib) \cdot ((c + id) \cdot (e + if)),$$

quindi la proprietá associativa é soddisfatta;

(II) l'elemento neutro della moltiplicazione é $1 = 1 + i \cdot 0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(III) verifichiamo l'esistenza di un inverso moltiplicativo per ogni numero complesso non nullo:

$$\forall\ a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ (a + ib) \cdot (c + id) = 1 \Longrightarrow ac - bd + i(bc + ad) = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \begin{cases} d = -\frac{b}{a^2+b^2} \\ c = \frac{a}{a^2+b^2} \end{cases},$$

quindi l'elemento $\dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$, che ovviamente é non nullo, é l'unico inverso moltiplicativo dell'elemento $a + ib$.

♢

(3) Trovare i simmetrici di tutti gli elementi dell'anello delle classi di resto modulo 11, $\mathbb{Z}_{11}$, rispetto all'addizione ed alla moltiplicazione.

(3) Tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_{11}$ tranne lo 0 hanno il loro simmetrico, sia additivo che moltiplicativo, in quanto l'anello delle classi di resto $\mathbb{Z}_k$ é sempre un campo se k é un numero primo. Indichiamo per semplicitá ogni elemento col proprio rappresentante di classe: $[0] = 0,\ [1] = 1,\ [2] = 2, \ldots [10] = 10$; i simmetrici additivi sono molto semplici: basta prendere, a coppie, tutti gli elementi la cui somma sia 11, cioé 0 in $\mathbb{Z}_{11}$:

$$1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 11 = 0,$$

dunque 1 é l'opposto di 10, 2 é l'opposto di 9, e cosí via. Per quanto riguarda invece gli inversi, bisogna trovare le coppie di numeri il cui prodotto sia un valore del tipo $11k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}_+$, per la ciclicitá degli anelli delle classi di resto:

$$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 11 + 1 = 1;\ 5 \cdot 9 = 44 + 1 = 1;\ 10 \cdot 10 = 99 + 1 = 1,$$

quindi in $\mathbb{Z}_{11}$ l'inverso di 2 é 6, l'inverso di 3 é 4, e cosí via.

♠

(4) Dato l'insieme $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali, del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ con } a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},$$

e definito il prodotto tra matrici come segue:

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ac' + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix},$$

provare che ogni matrice ha un inverso moltiplicativo se e solo se $ad - bc \neq 0$, e trovarlo esplicitamente.

(4) Si prova facilmente che l'operazione di prodotto righe per colonne cosí definita é associativa, e che l'elemento neutro di questa struttura algebrica é la cosiddetta matrice identitá:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

infatti si vede immediatamente che $\forall\ A \in M_2(\mathbb{R}),\ A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$. Ora, presa una generica matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, cerchiamo la sua eventuale inversa, nella forma:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Dovrebbe valere:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} aa' + bc' = 1 \\ ab' + bd' = 0 \\ a'c + c'd = 0 \\ b'c + dd' = 1 \end{cases} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \begin{cases} a' = \frac{d}{ad-bc} \\ b' = -\frac{b}{ad-bc} \\ c' = -\frac{c}{ad-bc} \\ d' = \frac{a}{ad-bc} \end{cases},$$

dopo aver svolto i calcoli in questo sistema di equazioni. Ognuno di questi quattro coefficienti esiste finito se e solo se il suo denominatore $ad - bc$ (che in seguito chiameremo determinante della matrice A) é non nullo. Quindi la matrice inversa avrá la forma:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

♣

(5) Provare che l'insieme delle radici cubiche dell'unitá:

$$C_3 = \{a \in \mathbb{C} \mid a^3 = 1\}$$

é un gruppo rispetto alla normale moltiplicazione, e trovare gli inversi di tutti gli elementi.

(5) Si puó provare che tutti gli insiemi C_n delle radici n-esime dell'unitá siano dei gruppi con l'usuale operazione di prodotto; i loro elementi, che possiamo facilmente trovare grazie alle formule di De Moivre (cfr. E. Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri 1985, pagg. 44-45), sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza centrata nell'origine del piano cartesiano e di raggio unitario. Nel caso di C_3, i suoi elementi sono:

$$a_1 = 1;\ a_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2};\ a_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

La struttura é un gruppo, perché il prodotto é associativo, infatti

$$(a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3))^n = a_1^n \cdot (a_2 \cdot a_3)^n = 1 \cdot 1 = (a_1 \cdot a_2)^n \cdot a_3^n = ((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3)^n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)) = ((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3.$$

Inoltre, C_3 contiene l'elemento neutro, cioé $a_1 = 1$, e infine ogni elemento ha il suo inverso: ovviamente $a_1 \cdot a_1 = 1$, e inoltre:

$$a_2 \cdot a_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{2\pi i} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = 1,$$

ricordando la formula di Eulero. Quindi, a_1 é l'inverso di se stesso, mentre a_2 é l'inverso di a_3 e viceversa.

$\heartsuit$

0.2 Esercizi proposti

(1) Data l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definita da:

$$f(a) = 2a + 1, \quad \forall\ a \in \mathbb{Z},$$

dire se é iniettiva, suriettiva, biettiva.

*

(2) Trovare gli inversi di tutti gli elementi del campo $\mathbb{Z}_{13}$ rispetto all'addizione

e alla moltiplicazione.

$*$

(3) Provare che la struttura algebrica $(\mathbb{A},\ \cdot)$, con

$$\mathbb{A} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \ :\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$$

e il prodotto righe per colonne $\cdot$ é un gruppo se e solo se $a,\ b,\ c \neq 0$; trovare l'inversa di ogni matrice di $\mathbb{A}$.

$*$

(4) Dato il gruppo di matrici definito nell'esercizio (4):

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0 \right\},$$

trovare le inverse delle matrici seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$*$

(5) Trovare nel gruppo C_4 delle radici quarte dell'unitá l'inverso moltiplicativo di ogni elemento.

Capitolo 1

Vettori liberi

1.1 Esercizi svolti

(1) Provare che, se $\mathbf{v_1}$=$(B-A)$ e $\mathbf{v_2}$=$(C-A)$ sono vettori che formano un angolo retto, vale $|\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}| = |\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}|$.

(1) Geometricamente, possiamo interpretare questa affermazione come le diagonali di un rettangolo hanno la stessa lunghezza. Ricordando la relazione tra modulo di un vettore e prodotto scalare di un vettore con se stesso, abbiamo:

$$|\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}| = \sqrt{<\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}>} = \sqrt{<\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}> - <\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2}>} =$$

$$= \sqrt{<\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}> - <\mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}> - <\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}> + <\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2}>} = \sqrt{|\mathbf{v_1}|^2 + |\mathbf{v_2}|^2},$$

perché i prodotti scalari tra vettori ortogonali si annullano. Analogamente,

$$|\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}| = \sqrt{<\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}>} = \sqrt{<\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}> + <\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2}>} =$$

$$= \sqrt{<\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}> + <\mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}> + <\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}> + <\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2}>} = \sqrt{|\mathbf{v_1}|^2 + |\mathbf{v_2}|^2},$$

di conseguenza $|\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}| = |\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}|$.

$\diamondsuit$

(2) Dati tre vettori non nulli $\mathbf{v_1}, \ \mathbf{v_2}, \ \mathbf{v_3} \in V$, con $\mathbf{v_3}$ linearmente dipendente dagli altri due, e dato un ulteriore vettore qualsiasi non nullo $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$, provare che se $\mathbf{w}$ é parallelo a $\mathbf{v_3}$, allora $\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{w}$ e $\mathbf{v_2} \wedge \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti.

(2) Se $\mathbf{v_1}, \ \mathbf{v_2}, \ \mathbf{v_3}$ sono linearmente dipendenti, esisteranno tre scalari $a_1, \ a_2, \ a_3 \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che $a_1\mathbf{v_1}+a_2\mathbf{v_2}=a_3\mathbf{v_3}$. Perció considerando i prodotti vettoriali avremo:

$$(a_1\mathbf{v_1}+a_2\mathbf{v_2}) \wedge \mathbf{w} = (a_3\mathbf{v_3}) \wedge \mathbf{w} \Longrightarrow a_1(\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{w}) + a_2(\mathbf{v_2} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{0},$$

e poiché a_1 ed a_2 non sono entrambi nulli, ne consegue che $\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{w}$ e $\mathbf{v_2} \wedge \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti.

♠

(3) Dato il triangolo isoscele ABC, con i due lati uguali $\mathbf{v_1}$=$(B-A)$ e $\mathbf{v_2}$=$(C-B)$, che misurano $|\mathbf{v_1}| = |\mathbf{v_2}|$=2, ed ognuno dei due angoli uguali $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \dfrac{\pi}{6}$, calcolarne l'area.

(3) Usiamo la formula con il prodotto vettoriale: poiché l'angolo compreso tra i due lati uguali misura $\pi - \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$, avremo:

$$\text{AREA}_{ABC} = \frac{1}{2}|\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2}| = \frac{1}{2}|\mathbf{v_1}| \cdot |\mathbf{v_2}| \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

♣

(4) Sfruttando la seguente relazione, valida per qualsiasi $\mathbf{u}\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in V$:

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} =< \mathbf{u}, \mathbf{w} > \mathbf{v} - < \mathbf{v}, \mathbf{w} > \mathbf{u},$$

provare la formula nota come **identitá di Jacobi**:

$$\mathbf{w} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = 0.$$

(4) Utilizzando la proprietá di anticommutativitá del prodotto vettoriale, cioé $\forall\ \mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2} \in V,\ \ \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} = -\mathbf{v_2} \wedge \mathbf{v_2}$, si ha:

$$\mathbf{w} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) =$$

$$= -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} - (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} - (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} =$$

$$- < \mathbf{u}, \mathbf{w} > \mathbf{v} + < \mathbf{v}, \mathbf{w} > \mathbf{u} - < \mathbf{w}, \mathbf{v} > \mathbf{u} + < \mathbf{u}, \mathbf{v} > \mathbf{w} -$$

$$- < \mathbf{v}, \mathbf{u} > \mathbf{w} + < \mathbf{w}, \mathbf{u} > \mathbf{v} = 0,$$

perché se V é un qualsiasi spazio vettoriale reale, $< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} >=< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} >$ $\forall\ \mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2} \in V$.

♡

(5) Provare che per qualsiasi terna di vettori $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \mathbf{v_3} \in \mathbf{V}$, vale la relazione:

$$< (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2}) \wedge \mathbf{v_3}, (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_3}) \wedge \mathbf{v_2} >=$$

$$= < \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} > (< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} > |\mathbf{v_1}|^2 - < \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} >< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} >).$$

(5) Usiamo la relazione dell'esercizio precedente e le proprietá del prodotto scalare:

$$< (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2}) \wedge \mathbf{v_3}, (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_3}) \wedge \mathbf{v_2} >=$$

$$=<< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} > \mathbf{v_2} - < \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} > \mathbf{v_1}, < \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} > \mathbf{v_3} - < \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} > \mathbf{v_1} >=$$

$$=< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} >< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} >< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} > - < \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} >< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} >< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} > -$$

$$- < \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} >< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} >< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} > + < \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} >^2 < \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} >=$$

$$= < \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} > (< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} > |\mathbf{v_1}|^2 - < \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} >< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} >).$$

$\diamondsuit$

1.2 Esercizi proposti

(1) Dire quale deve essere la lunghezza del lato di un triangolo equilatero affinché la sua area sia $16\sqrt{3}$.

$*$

(2) Calcolare il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ di lunghezze $|\mathbf{v_1}|$=2, $|\mathbf{v_2}|$=3, $|\mathbf{v_3}|$=5, con $\mathbf{v_1}$ ortogonale a $\mathbf{v_2}$ e l'angolo tra $\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$ di ampiezza $\dfrac{\pi}{4}$.

$*$

(3) Provare che $\forall$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ vale la relazione:

$$< (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}, \mathbf{w} > = 0.$$

$*$

(4) Provare che $\forall$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$ si ha:

$$< \mathbf{w} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}), \mathbf{v} >= |\mathbf{v}|^2 < \mathbf{w}, \mathbf{u} > - < \mathbf{v}, \mathbf{u} >< \mathbf{w}, \mathbf{v} > .$$

$*$

(5) Provare che se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori di norma 1, vale sempre l'identitá:

$$(< \mathbf{v}, \mathbf{w} >)^2 + |\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|^2 = 1.$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Esercizi svolti

(1) Dati i vettori $(-3,0,1),\ (1,2,0),\ (7,-4,-3) \in \mathbb{R}^3$, dire se sono linearmente indipendenti.

(1) Applichiamo la definizione di lineare indipendenza: prendiamo tanti coefficienti reali quanti sono i vettori considerati, e scriviamo una combinazione lineare che imponiamo uguale a zero:

$$\alpha(-3,0,1) + \beta(1,2,0) + \gamma(7,-4,-3) = (0,0,0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (-3\alpha, 0, \alpha) + (\beta, 2\beta, 0) + (7\gamma, -4\gamma, -3\gamma) = (0,0,0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (-3\alpha + \beta + 7\gamma, 2\beta - 4\gamma, \alpha - 3\gamma) = (0,0,0),$$

e si genera cosí un sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + 7\gamma = 0 \\ 2\beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha - 3\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 3\gamma \\ \beta = 2\gamma \\ \gamma = \gamma \end{cases}.$$

Questo sistema ha infinite soluzioni, ossia per qualsiasi scelta del coefficiente γ, avremo un valore di α ed uno di β per cui il sistema sará verificato; scegliendo ad esempio $\gamma = 1$, avremo la relazione

$$(7,-4,-3) = (-3) \cdot (-3,0,1) - 2 \cdot (1,2,0),$$

ossia i tre vettori sono linearmente dipendenti perché esistono scalari non nulli tali che una combinazione lineare con questi scalari sia uguale a zero. Alternativamente, si puó pensare che uno qualsiasi di questi vettori si puó esprimere come combinazione lineare a coefficienti non nulli degli altri due. E' da notare, infine, che la scelta del valore di γ é completamente arbitraria: infatti, considerare un diverso valore di γ, comunque diverso da 0, sarebbe stato come moltiplicare per uno scalare non nullo entrambi i membri della relazione vettoriale.

♠

(2) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori

$$(k+1, 0, -1),\ (k, -k, 2k),\ (-4, 0, 2k)$$

formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(2) Affinché questi tre vettori formino una base di $\mathbb{R}^3$, essendo essi in numero uguale alla dimensione dello spazio, é sufficiente che siano linearmente indipendenti. Si nota immediatamente che per $k = 0$ il secondo vettore si annulla, ed il vettore 0_V in qualsiasi spazio vettoriale V é sempre linearmente dipendente. Quindi, usiamo il procedimento descritto precedentemente, considerando $k \neq 0$:

$$\alpha(k+1, 0, -1) + \beta(k, -k, 2k) + \gamma(-4, 0, 2k) = (0, 0, 0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (k+1)\alpha + k\beta - 4\gamma = 0 \\ -k\beta = 0 \\ -\alpha + 2k\beta + 2k\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\gamma \\ \beta = 0 \\ 2(k^2 + k - 2)\gamma = 0 \end{cases} ;$$

la terza equazione si annulla per $k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -2,\ 1$, ed in questi casi i tre vettori non formano una base. Ricapitolando, per $k = 0$, i vettori $(1, 0, -1)$ e $(-4, 0, 0)$ sono linearmente indipendenti, ma $(0, 0, 0)$ non lo é. Per $k = 1$, vale la relazione $2(2, 0, -1) + (-4, 0, 2) = (0, 0, 0)$, e quindi ci sono solo due vettori linearmente indipendenti, ad esempio $(2, 0, -1)$ e $(1, -1, 2)$ oppure $(-4, 0, 2)$ e $(1, -1, 2)$. Per $k = -2$, vale $(-4)\cdot(-1, 0, 1) + (-4, 0, 4) = (0, 0, 0)$ ed il discorso é analogo. Perció se $k = -2,\ 0,\ 1$ il sottospazio vettoriale generato dai tre vettori dati ha sempre dimensione 2. Invece, per $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$ i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.

♣

(3) Scrivere in equazioni parametriche e cartesiane il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori linearmente indipendenti dell'insieme:

$$\{(1, 2, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, -1, 0), (0, 2, 0, 2, 0)\}.$$

(3) Nel modo usuale, cerchiamo quali tra questi quattro vettori sono tra loro linearmente indipendenti:

$$\alpha(1, 2, 0, 0, 0) + \beta(0, -1, 0, 0, 1) + \gamma(1, 1, 0, -1, 0) + \delta(0, 2, 0, 2, 0) = (0, 0, 0, 0, 0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ 2\alpha-\beta+\gamma+2\delta=0 \\ 0=0 \\ -\gamma+2\delta=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=-\gamma \\ \beta=0 \\ \gamma=\gamma \\ \delta=\gamma/2 \end{cases} ;$$

quindi, poiché vale la relazione

$$-(1,2,0,0,0)+(1,1,0,-1,0)+\frac{1}{2}(0,2,0,2,0)=(0,0,0,0,0),$$

possiamo scartare dall'insieme di partenza uno a nostra scelta dei tre vettori implicati in questa relazione. Ne rimarranno tre, e quindi ad esempio

$$W=\mathbb{L}\{(1,2,0,0,0),(0,-1,0,0,1),(1,1,0,-1,0)\},$$

$\dim(W)=3$. Le equazioni parametriche di W avranno questa forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} v \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1=t+v \\ x_2=2t-u+v \\ x_3=0 \\ x_4=-v \\ x_5=u \end{cases}, \ t,u,v\in\mathbb{R}.$$

Le equazioni cartesiane del sottospazio W si ricavano da quelle parametriche eliminando i parametri t,u,v:

$$\begin{cases} t=x_1-v \\ x_2=2t-u+v \\ x_3=0 \\ v=-x_4 \\ u=x_5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2+x_4-x_5=0 \\ x_3=0 \end{cases}.$$

In generale, i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ rappresentano luoghi di punti nello spazio n-dimensionale che possiamo vedere come varietá lineari, identificando $\mathbb{R}^n$ con lo spazio affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Ad esempio un sottospazio vettoriale di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$ é una retta passante per l'origine $(0,0)$, un sottospazio vettoriale di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$ é un piano passante per l'origine $(0,0,0)$.

♡

(4) Provare che l'insieme delle matrici 2×2 simmetriche in $M_2(\mathbb{R})$ é un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

(4) Scriviamo la generica matrice quadrata di ordine 2 a coefficienti reali come:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R};$$

possiamo identificare A con il vettore $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, quindi $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$; A si dice una matrice simmetrica se $A = A^t$, ossia se é del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \ a, \ b, \ d \in \mathbb{R};$$

allora si puó identificare ogni matrice simmetrica con il vettore $(a, b, b, d) \in \mathbb{R}^4$; verifichiamo ora le proprietá dei sottospazi vettoriali:

$$(I)\ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & d + d' \end{pmatrix},$$

che é ancora una matrice simmetrica;

$$(II)\ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \ \forall k \in \mathbb{R}, \qquad k \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix},$$

che é ancora una matrice simmetrica. Quindi, poiché ogni matrice simmetrica 2×2 é una combinazione lineare del tipo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} =$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

l'insieme delle matrici simmetriche é un sottospazio vettoriale di dimensione 3, una cui base é data dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

(5) Dato lo spazio vettoriale di polinomi

$$\mathbb{R}_3[x] = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

calcolare la dimensione del suo sottospazio vettoriale W generato dai polinomi

$$2x, \ x^2 + x + 1, \ -3x + 2, \ 1.$$

(5) $\mathbb{R}_3[x]$ puó essere identificato con $\mathbb{R}^4$, e allora $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$; una base per $\mathbb{R}_3[x]$ é data da $\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\}$, perché é evidente che ogni polinomio di grado al piú tre é una combinazione lineare a coefficienti reali di questi monomi. Ora cerchiamo di vedere se i quattro polinomi dati sono linearmente indipendenti:

$$\alpha(2x)+\beta(x^2+x+1)+\gamma(-3x+2)+\delta = \beta x^2+(2\alpha+\beta-3\gamma)x+\beta+2\gamma+\delta = 0 \iff$$

$$\iff \alpha = \frac{3}{2}\gamma,\ \beta = 0,\ \gamma = \gamma,\ \delta = -2\gamma,$$

quindi per formare una base di W dobbiamo scartare un polinomio tra $2x,\ -3x+2,\ 1$, ad esempio $-3x+2$ quindi rimarranno $x^2+x+1,\ 2x, 1$:

$$\alpha(x^2+x+1)+\beta(2x)+\gamma = \alpha x^2+(\alpha+2\beta)x+\alpha+\gamma = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Perció $\dim(W) = 3$, e $W = \mathbb{L}\{x^2+x+1, 2x, 1\}$.

♠

(6) Dati i vettori $(1,-1,0,0,0),\ (0,2,0,-1,1),\ (0,0,0,0,2i) \in \mathbb{C}^5$, costruire un completamento ad una base di $\mathbb{C}^5$.

(6) Anzitutto, verifichiamo che questi tre vettori siano linearmente indipendenti:

$$\alpha(1,-1,0,0,0)+\beta(0,2,0,-1,1)+\gamma(0,0,0,0,2i) =$$
$$= (0,0,0,0,0) \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Quindi per completare una base, abbiamo bisogno di altri due vettori linearmente indipendenti. In generale, per comoditá, li sceglieremo prendendoli dalla base canonica (per gli spazi $\mathbb{C}^n$ possiamo utilizzare quelle standard degli spazi $\mathbb{R}^n$): prendiamo $(1,0,0,0,0)$ e verifichiamone la lineare indipendenza rispetto agli altri:

$$\alpha(1,0,0,0,0)+\beta(1,-1,0,0,0)+\gamma(0,2,0,-1,1)+\delta(0,0,0,0,2i) =$$
$$= (\alpha+\beta, -\beta+2\gamma, 0, -\gamma, \gamma+2i\delta) = (0,0,0,0,0) \iff \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Andando in ordine sulla base canonica, dovremmo prendere $(0,1,0,0,0)$, peró si puó notare immediatamente che $(1,0,0,0,0)-(1,-1,0,0,0) = (0,1,0,0,0)$, e allora questo vettore é linearmente dipendente da altri due giá presenti nella base, per cui non puó andare bene. Quindi prendiamo il successivo, cioé $(0,0,1,0,0)$:

$$\alpha(1,0,0,0,0)+\beta(1,-1,0,0,0)+\gamma(0,0,1,0,0)+\delta(0,2,0,-1,1)+\epsilon(0,0,0,0,2i) =$$
$$= (0,0,0,0,0) \iff \alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = 0,$$

di conseguenza la base completata sará:

$$\{(1,-1,0,0,0),(0,2,0,-1,1),(0,0,0,0,2i),(1,0,0,0,0),(0,0,1,0,0)\}.$$

♣

2.2 Esercizi proposti

(1) Dire se il seguente sistema di vettori é una base per $\mathbb{R}^4$:

$$\{(1,0,-1,0),\ (0,1,0,0),\ (3,1,0,0),\ (0,0,0,-4)\}.$$

*

(2) Dire se il seguente sistema di vettori é una base per $\mathbb{R}^3$:

$$\{(4,0,1),(-1,0,1),(3,0,2)\};$$

nel caso in cui non lo sia, costruirne un completamento ad una base di $\mathbb{R}^3$.

*

(3) Dire se i seguenti polinomi sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}_2[x]$:

$$p_1(x) = x^2 - 2ix - i,\ p_2(x) = 2ix - 4i,\ p_3(x) = -ix^2 + 3,$$

e nel caso in cui non lo siano, completare una base di $\mathbb{C}_2[x]$.

*

(4) Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale W di $M_3(\mathbb{R})$ dato dalle matrici antisimmetriche, cioé quelle tali che $A = -A^t$.

*

(5) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema di vettori

$$\{(k,0,1,0),\ (0,k+1,0,0),\ (3,2k,0,0),\ (0,0,0,-k)\}$$

é una base per $\mathbb{R}^4$.

*

(6) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio vettoriale S di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(2,0,1,0),\ (0,3,0,5)$.

*

(7) Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^5$ generato dai

vettori $(1,0,2,1,0)$, $(0,3,-2,2,0)$, $(1,3,0,3,0)$, e poi scriverne le equazioni parametriche e cartesiane.

$*$

(8) Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$, tale che $W = U + V$, con

$$U = \mathbb{L}\{(1,0,2,-1),\ (0,1,0,0)\},\quad V = \mathbb{L}\{(-1,0,3,0),\ (-1,4,-2,1)\},$$

e scriverne le equazioni parametriche.

$*$

(9) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sottospazi di $\mathbb{C}^3$:

$$V_k = \mathbb{L}\{(i,0,k+1)\},\quad W_k = \mathbb{L}\{(1,k,2),\ (3,2ki,0)\},$$

hanno intersezione uguale a $(0,0,0)$.

Capitolo 3

Applicazioni lineari e matrici

3.1 Esercizi svolti

(1) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definita:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 10x_2 + 3x_3, 4x_1 + 9x_2, 6x_1 - x_2 + 3x_3),$$

trovare $\ker(F)$ ed $\mathrm{Im}(F)$.

(1) La matrice che rappresenta F rispetto alle basi canoniche é

$$M_E^E(F) = A = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$\ker(F)$ é lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -10 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che dopo aver effettuato la riduzione per righe diventa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & -6/29 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -27t/58 \\ x_2 = 6t/29, \ t \in \mathbb{R}, \\ x_3 = t \end{cases}$$

e ponendo $t = 58$ otteniamo un vettore a coordinate intere che genera il nucleo di F, perció $\ker(F) = \mathbb{L}\{(-27, 12, 58)\}$. Essendo dim(ker($F$))=1, dim(Im($F$))=dim($\mathbb{R}^3$)$-$

dim(ker(F))=3-1=2. Per trovare una base di Im(F), consideriamo i tre vettori-colonna di A:

$$\alpha(2,4,6)+\beta(-10,9,1)+\gamma(3,0,3)=(0,0,0)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(2\alpha-10\beta+3\gamma,4\alpha+9\beta,6\alpha-\beta+3\gamma)=(0,0,0)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\alpha=-\frac{9}{4}\beta,\ \beta=\beta,\ \gamma=-\frac{29}{6}\beta,$$

$$\text{cioé}-\frac{9}{4}(2,4,6)+(-10,9,-1)-\frac{29}{6}(3,0,3)=(0,0,0),$$

ed essendo tutti e tre linearmente dipendenti l'uno dagli altri possiamo scartarne uno a nostra scelta, e ad esempio potremo scrivere:

$$\mathrm{Im}(F)=\mathbb{L}\{(-10,9,-1),(3,0,3)\}.$$

♡

(2) Consideriamo l'applicazione lineare $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ data da:

$$F(2,1,0)=(1,4,0),\ F(1,0,1)=(0,0,-1),\ F(0,0,-2)=(-2,0,3);$$

(a) dire se é ben definita;

(b) scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche;

(c) determinare ker(F) ed Im(F).

(2) (a) Affinche' F sia ben definita, i tre vettori $(2,1,0),\ (1,0,1),\ (0,0,-2)$ devono formare una base di $\mathbb{R}^3$, e per questo devono essere linearmente indipendenti. Collocati in una matrice 3×3 come righe o come colonne, é sufficiente che questa matrice abbia rango massimo:

$$\det\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix}=0+0+0-0-0+2\neq0,$$

quindi F é ben definita sulla base $\mathbb{B}=\{(2,1,0),(1,0,1),(0,0,-2)\}$.

(b) Per scrivere la matrice $M_E^E(F)$, ricordiamo la formula di cambiamento di base:

$$M_E^E(F)=M_{\mathbb{B}}^E(\mathrm{Id})\cdot M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(F)\cdot(M_E^{\mathbb{B}}(\mathrm{Id})).$$

$M_{\mathbb{B}}^E(\mathrm{Id})$ é la matrice le cui colonne sono i vettori di $\mathbb{B}$:

$$M_{\mathbb{B}}^E(\mathrm{Id})=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix};$$

la sua inversa é facilmente calcolabile con uno dei metodi conosciuti:

$$M_E^{\mathbb{B}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathbb{B}}^E(\mathrm{Id}))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix};$$

invece, la matrice $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(F)$ ha come colonne i vettori dell'immagine di F scritti peró nelle coordinate relative alla base $\mathbb{B}$:

$$\alpha(2,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,0,-2) = (1,4,0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -7, \\ \gamma = -7/2 \end{cases} \Longrightarrow (1,4,0)_E = (4,-7,-7/2)_{\mathbb{B}};$$

analogamente,

$$\frac{1}{2}(0,0,-2) = (0,0,-1) \Longrightarrow (0,0,-1)_E = (0,0,1/2)_{\mathbb{B}};$$

$$\alpha(2,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,0,-2) = (-2,0,3) \Longrightarrow \alpha = 0, \ \beta = -2, \ \gamma = -5/2,$$

da cui $(-2,0,3)_E = (0,-2,-5/2)_{\mathbb{B}}$. Allora avremo:

$$M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -2 \\ -7/2 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix},$$

e di conseguenza

$$M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -2 \\ -7/2 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1/2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Allo stesso risultato si poteva peró giungere scrivendo le immagini dei vettori della base canonica sfruttando la linearitá dell'endomorfismo F:

$$F(0,0,1) = -\frac{1}{2}F(0,0,-2) = -\frac{1}{2}(-2,0,3) = (1,0,-3/2),$$

$$F(1,0,0) = F(1,0,1) - F(0,0,1) = (0,0,-1) - (1,0,-3/2) = (-1,0,-1/2),$$

$$F(0,1,0) = F(2,1,0) - 2F(1,0,0) = (1,4,0) - 2(-1,0,1/2) = (3,4,-1), \text{ da cui:}$$

$$M_E^E(F) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1/2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Poiché si vede immediatamente che

$$\det(M_E^E(F)) = 4\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0,$$

allora $\ker(F)=\{0\}$, ed $\mathrm{Im}(F)=\mathbb{L}\{(-1,0,1/2),(3,4,-1),(1,0,-3/2)\} = \mathbb{R}^3$.

♢

(3) Data l'applicazione lineare $F_k : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, cosí definita:

$$F_k(k+1,-2,3,1) = (2,3,0,-1),$$
$$F_k(0,1,k^2-1,0) = (0,1,2k,0),$$
$$F_k(1,0,0,3k) = (0,-2,0,k),$$
$$F_k(0,k-2,0,0) = (1,2,3,k),$$

(a) dire per quali k reali F_k é ben definita;

(b) fissato $k=0$, trovare $\mathrm{Im}(F_0)$ e $\ker(F_0)$.

(3) (a) Affinché F_k sia ben definita, non deve annullarsi il determinante della matrice

$$C_k := \begin{pmatrix} k+1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k^2-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3k \\ 0 & k-2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

sviluppando il determinante sull'ultima riga, si ha:

$$\det(C_k) = (k-2)\det\begin{pmatrix} k+1 & 3 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 0 \\ 1 & 0 & 3k \end{pmatrix} = (k-2)(k^2-1)(3k^2+3k-1);$$

si trova quindi facilmente che $\det(C_k) = 0$ se $k = 2,\ \pm 1,\ \dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$, e allora F_k é ben definita $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-3-\sqrt{21}}{6}, -1, \dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}, 1, 2\right\}$.

(b) Fissato $k=0$, avremo:

$$F_0(1,-2,3,1) = (2,3,0,-1),$$
$$F_0(0,1,-1,0) = (0,1,0,0),$$
$$F_0(1,0,0,0) = (0,-2,0,0),$$

$$F_0(0,-2,0,0) = (1,2,3,0).$$

Troviamo le immagini dei vettori della base canonica per scrivere $M_E^E(F_0)$:

$$F_0(1,0,0,0) = (0,-2,0,0);$$

$$F_0(0,1,0,0) = \frac{1}{2}F_0(0,-2,0,0) = (-1/2,-1,-3/2,0);$$

$$F_0(0,0,1,0) = F_0(0,1,0,0) - F_0(0,1,-1,0) = (-1/2,-2,-3/2,0);$$

$$F_0(0,0,0,1) = F_0(1,-2,3,1) - F_0(1,0,0,0) + 2F_0(0,1,0,0) - 3F_0(0,0,1,0) =$$

$$= (5/2,9,3/2,-1), \text{ per cui :}$$

$$M_E^E(F_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 & 5/2 \\ -2 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

troviamo prima $\ker(F_0)$ risolvendo il sistema lineare omogeneo:

$$M_E^E(F_0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{t}{2} \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

e allora $\ker(F_0)$=$\mathbb{L}\{(-1,-2,2,0)\}$; poiché $\dim(\ker(F_0))$=1, $\dim(\mathrm{Im}(F_0))$=3; quindi dovremo scartare una colonna dalla matrice $M_E^E(F_0)$ per avere avere una base di $\mathrm{Im}(F_0)$. Poiché si vede immediatamente che la sottomatrice 4×3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, perché il determinante della sua sottomatrice 3×3 ottenuta sopprimendo l'ultima riga é nullo, scarteremo arbitrariamente una di queste colonne, per cui ad esempio:

$$\mathrm{Im}(F) = \mathbb{L}\{(0,-2,0,0), (-1/2,-1,-3/2,0), (5/2,9,3/2,-1)\}.$$

♠

(4) Data l'applicazione lineare $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2,3}(\mathbb{R})$ definita da:

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & a-b & 0 \\ c+d & b+c-d & a \end{pmatrix},$$

trovarne nucleo ed immagine.

(4) Poiché lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ é isomorfo allo spazio $\mathbb{R}^4$, mentre lo spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbb{R})$ é isomorfo ad $\mathbb{R}^6$, possiamo considerare l'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ tale che:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_2, x_1 - x_2, 0, x_3 + x_4, x_2 + x_3 - x_4, x_1),$$

la cui matrice rispetto alle basi canoniche é:

$$M_E^E(G) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\ker(G)$ é lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$M_E^E(G) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\ker(G)=\{0\}$, e ne consegue che $\dim(\mathrm{Im}(G))=4$, perció una base per $\mathrm{Im}(G)$ sará automaticamente composta dalle quattro colonne della matrice $M_E^E(G)$:

$$\mathrm{Im}(G) = \mathbb{L}\{(0,1,0,0,0,1), (2,-1,0,0,1,0), (0,0,0,1,1,0), (0,0,0,1,-1,0)\}.$$

Riportando il tutto in termini degli spazi di partenza, avremo:

$$\ker(F) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathrm{Im}(F) = \mathbb{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

♣

(5) Data l'applicazione lineare $F_k : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^5$ cosí definita:

$$F_k \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = ((k+2)(x_1 - x_3), (k^2-4)x_2, x_1 + x_3, 0, x_3 + (k+2)x_4)$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, dire per quali k il sottospazio T delle matrici di $M_2(\mathbb{R})$ strettamente triangolari superiori, cioé:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

é contenuto in $\ker(F_k)$, oppure coincide con esso.

(5) Affinché $T \subseteq \ker(F_k)$, é sufficiente che l'immagine tramite F_k di un qualsiasi elemento di T sia nulla, ossia

$$F_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, k^2 - 4, 0, 0, 0),$$

quindi per $k = \pm 2$ si ha che $T \subset \ker(F_k)$. Distinguendo i casi, se $k = -2$,

$$F_{-2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = (0, 0, x_1 + x_3, 0, x_3),$$

e allora

$$\ker(F_{-2}) = \mathbb{L} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

se invece $k = 2$,

$$F_2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = (4(x_1 - x_3), 0, x_1 + x_3, 0, x_3 + 4x_4),$$

e allora

$$\ker(F_2) = \mathbb{L} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

♡

(6) Consideriamo le applicazioni lineari

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \text{ tale che } F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 4x_3, x_2 + x_3, 3x_1 - 5x_2, x_3),$$

$$G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tale che } G(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2 - 3y_4, 0, y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4),$$

e detta $H = G \circ F$, scrivere la matrice $M_E^E(H)$ e poi trovare $\ker(H)$ ed $\mathrm{Im}(H)$.

(6) L'applicazione lineare $H = G \circ F$ avrá $\mathbb{R}^3$ come spazio sia di partenza che di arrivo. Per scrivere la matrice di H relativa alle basi canoniche, basterá moltiplicare tra loro, nell'ordine giusto, le matrici di G e di F relative alle basi canoniche. Poiché

$$M_E^E(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_E^E(H) = M_E^E(G) \cdot M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Troviamo al solito modo $\ker(H)$ ed $\mathrm{Im}(H)$:

$$M_E^E(H) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \end{cases} \Longrightarrow \ker(H) = \mathbb{L}\{(1, 2, 1)\},$$

quindi dim(Im(H))=2. Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -4 \neq 0,$$

la sottomatrice data dalle prime due colonne di $M_E^E(H)$ ha rango 2, e allora

$$\mathrm{Im}(H) = \mathbb{L}\{(0, 0, 4), (1, 0, -3)\}.$$

$\diamondsuit$

3.2 Esercizi proposti

(1) Trovare nucleo ed immagine dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associata canonicamente alla matrice $A^2 - 4I_3$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*

(2) Data l'applicazione lineare $F : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ data da:

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-ib & a+ib \\ 2ic & 4ia-ic \end{pmatrix},$$

trovare $\ker(F)$ ed $\mathrm{Im}(F)$.

*

(3) Trovare nucleo ed immagine dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6x_1 + 2x_2, x_3 - 4x_5, 3x_5, x_2 + 3x_3).$$

*

(4) Data l'applicazione lineare $F_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definita:

$$F_k(1,0,2) = (1,1,0),\ F_k(1,2k,0) = (k,0,-2),\ F_k(k+1,2,-1) = (3,k,-1),$$

(a) dire per quali $k \in \mathbb{R}$ é ben definita;

(b) fissato $k = 0$, trovare $\ker(F_0 \circ F_0)$ ed $\mathrm{Im}(F_0 \circ F_0)$.

*

(5) Se $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, e $A, B \in M_n(\mathbb{R}^n)$, provare che se $\mathbf{v} \in \ker(A)$, $\mathbf{w} \in \ker(B)$,

$$\mathbf{v}+\mathbf{w} \in \ker(A^2 - B^2) \Longleftrightarrow A^2\ \mathbf{w}=B^2\ \mathbf{v}.$$

*

(6) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ cosí definita:

$$F(ax^2 + bx + c) = ax + a - c,$$

trovare $\ker(F)$ ed $\mathrm{Im}(F)$.

*

(7) Date le applicazioni lineari

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad \text{tale che } F(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 - x_2, 0, 4x_1),$$

$$G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad \text{tale che } G(y_1, y_2, y_3, y_4) = (2y_1 - y_4, 0, 2y_2 + y_3, y_1 + y_2 - 2y_3),$$

determinare nucleo ed immagine dell'applicazione composta $G \circ F$.

*

(8) Data la matrice di $M_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1-k \\ 2 & k-1 & -1 \\ 0 & -4 & k \end{pmatrix},$$

(a) trovare per quali $k \in \mathbb{R}$ é invertibile;

(b) fissato $k = 1$, trovare l'espressione dell'applicazione lineare $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ associata alla matrice A_1^{-1}.

*

(9) Date le applicazioni lineari

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{tale che } F(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 3x_1 + 4x_2),$$

$$G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{tale che } G(y_1, y_2) = (0, y_1 - 3y_2, y_1 + y_2),$$

determinare nucleo ed immagine dell'applicazione lineare composta $G \circ F^{-1}$.

Capitolo 4

Determinanti e sistemi lineari

4.1 Esercizi svolti

(1) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(1) Possiamo calcolare $\det(A)$ svolgendo lo sviluppo di Laplace rispetto ad una riga oppure ad una colonna a nostra scelta. Ad esempio, sviluppiamo secondo la seconda riga (é sempre conveniente scegliere una riga oppure una colonna con il maggior numero possibile di zeri per semplificare i calcoli):

$$\det(A) = 0 \cdot (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} +$$

$$+2 \cdot (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = -105 - 30 - 12 - 48 = -195.$$

Allo stesso risultato si poteva giungere tramite lo sviluppo di un'altra riga o di una colonna. Ad esempio, facendo lo sviluppo lungo la prima colonna:

$$\det(A) = 3 \cdot (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} +$$

$$+(-6) \cdot (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = -105 - 12 - 78 = -195.$$

♠

(2) Calcolare il determinante della matrice di $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e se é diverso da 0, trovare la matrice inversa A^{-1}.

(2) Calcoliamo $\det(A)$ in un modo alternativo allo sviluppo di Laplace; per le matrici 3×3 esiste la cosiddetta **regola di Sarrus:** si scrive la matrice e le si ricopiano accanto a destra le sue prime due colonne, dopodiché si svolgono i prodotti degli elementi lungo le tre diagonali da 3 elementi da sinistra a destra verso il basso e si sommano insieme, poi si svolgono i prodotti delle tre diagonali da destra a sinistra verso il basso e si sottraggono, ossia, se $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$, scriviamo in questo modo:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right),$$

da cui:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Nel nostro caso, $\det(A) = 2 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 0 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \cdot (-1) = 25 \neq 0$. Si verifica in modo elementare che facendo lo sviluppo di Laplace lungo qualsiasi riga o colonna il risultato é lo stesso (ad esempio, lungo la prima riga, $\det(A) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1)^3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 25$). Ora, poiché $\det(A) \neq 0$, A é nonsingolare, o invertibile, cioé esiste ed é unica la matrice A^{-1}, tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$. Per calcolare l'inversa di una matrice, esiste un algoritmo valido per matrici quadrate di qualsiasi ordine, che consiste nello svolgere una serie di operazioni vettoriali elementari ad hoc su una matrice per portarla gradualmente verso una forma che espliciti la matrice inversa. L'idea é questa: si costruisce una matrice di n righe e $2n$ colonne, affiancando alla matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice identitá I_n, dopodiché si effettuano queste operazioni elementari sulle righe dell'intera matrice (somme e differenze tra righe, prodotti di righe per scalari, scambi di righe) finché non si perviene ad una forma in cui la matrice I_n avrá preso il posto che la matrice A aveva all'inizio. La matrice che alla fine avrá preso il posto che aveva I_n sará l'inversa A^{-1}:

$$(A \mid I_n) \xrightarrow[\text{dopo operazioni elementari}]{} (I_n \mid A^{-1}).$$

Esaminiamo le operazioni da svolgere nel nostro caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(la prima operazione che ci conviene fare é la somma della prima riga con la terza moltiplicata per 2, da collocare al posto della terza riga, per ottenere uno 0 in basso a sinistra)

$$\xrightarrow[2R_{(3)}+R_{(1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

(al secondo passo, moltiplichiamo per tre la terza riga e sommiamola alla seconda, lasciandola nella terza riga, cosí da ottenere un altro 0 nell'ultima riga)

$$\xrightarrow[3R_{(3)}+R_{(2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

(al terzo passo, moltiplicando tutta la terza riga per $1/25$ troviamo nella metá sinistra della matrice la terza riga della matrice identitá I_3)

$$\xrightarrow[(1/25)\cdot R_{(3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/25 & 1/25 & 6/25 \end{array}\right)$$

(ora, andando dal basso verso l'alto, cerchiamo di far comparire nella metá sinistra la seconda riga di I_3; a questo scopo sottraiamo la terza riga dalla seconda)

$$\xrightarrow[R_{(2)}-R_{(3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3/25 & 24/25 & -6/25 \\ 0 & 0 & 1 & 3/25 & 1/25 & 6/25 \end{array}\right)$$

(per ultimare la seconda riga di I_3, ci basta semplicemente moltiplicare per $1/3$ tutta la seconda riga)

$$\xrightarrow[(1/3)\cdot R_{(2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/25 & 8/25 & -2/25 \\ 0 & 0 & 1 & 3/25 & 1/25 & 6/25 \end{array}\right)$$

(ci resta da aggiustare la prima riga: sommando la prima riga con la seconda otteniamo un ulteriore 0 nella prima riga)

$$\xrightarrow[R_{(1)}+R_{(2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 24/25 & 8/25 & -2/25 \\ 0 & 1 & 0 & -1/25 & 8/25 & -2/25 \\ 0 & 0 & 1 & 3/25 & 1/25 & 6/25 \end{array}\right)$$

(ed ora, dimezzando banalmente tutta la prima riga, otteniamo finalmente I_3 laddove all'inizio c'era la matrice A)

$$\xrightarrow[(1/2)\cdot R_{(1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12/25 & 4/25 & -1/25 \\ 0 & 1 & 0 & -1/25 & 8/25 & -2/25 \\ 0 & 0 & 1 & 3/25 & 1/25 & 6/25 \end{array}\right).$$

Quindi l'inversa di A sará:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 12/25 & 4/25 & -1/25 \\ -1/25 & 8/25 & -2/25 \\ 3/25 & 1/25 & 6/25 \end{pmatrix};$$

la verifica é immediata:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12/25 & 4/25 & -1/25 \\ -1/25 & 8/25 & -2/25 \\ 3/25 & 1/25 & 6/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

♣

(3) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 2 & -3 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 1 & 4\alpha+5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 5\alpha^2+1 & 2 & -1 & 4\alpha^2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

ha rango uguale a 4, e fissato $\alpha = -1$, trovare l'inversa di A_{-1}.

(3) Affinché $\mathrm{rk}(A_\alpha) = 4$, si deve avere che $\det(A_\alpha) \neq 0$. Calcoliamo perció A_α facendo lo sviluppo di Laplace piú veloce, cioé quello rispetto alla terza riga:

$$\det(A_\alpha) = \alpha \cdot (-1)^7 \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha+1 & 2 & -3 \\ 2\alpha & 0 & 1 \\ 5\alpha^2+1 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-\alpha)[-12\alpha + 10\alpha^2 + 2 - 2\alpha - 2 + 4\alpha] = (-\alpha)[10\alpha^2 - 10\alpha];$$

quindi $\det(A_\alpha) = 0 \iff \alpha = 0,\ \alpha = 1$, e di conseguenza

$$\mathrm{rk}(A_\alpha) = 4 \iff \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Calcoliamo ora l'inversa di

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}:$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(come primo passo, scambiamo di posto la terza e la quarta riga, moltiplicando poi per (-1) abbiamo giá ottenuto sulla sinistra l'ultima riga della matrice identitá I_4)

$$\xrightarrow[(-1)\cdot R_{(4)}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(sommando ora la terza riga con la seconda moltiplicata per tre riusciamo a far comparire uno 0 al posto del 6 nella terza riga)

$$\xrightarrow[R_{(3)}+3\cdot R_{(2)}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 7 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(ora, al posto della terza riga mettiamo la differenza tra la terza riga e la prima, in modo da far comparire un altro 0)

$$\xrightarrow[R_{(3)}-R_{(1)}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(ora sottraiamo alla terza riga la quarta moltiplicata per 7 e comparirá nella terza riga un altro 0)

$$\xrightarrow[R_{(3)}-7\cdot R_{(4)}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(dividendo per 5 la terza riga otteniamo la terza riga di I_4)

$$\xrightarrow[(1/5)\cdot R_{(3)}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(si puó notare che sottraendo alla seconda riga sia la terza che la quarta contemporaneamente compaiono due zeri nella seconda riga)

$$\xrightarrow[R_{(2)}-R_{(3)}-R_{(4)}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(scambiamo ora ovviamente la prima riga con la seconda, moltiplicata per -1/2, ed otteniamo sulla metá la prima riga di I_4)

$$\xrightarrow[(-1/2)\cdot R_{(2)}]{} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1/10 & -1/5 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1/5 & 3/5 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(per concludere, facciamo due operazioni in un colpo solo: sommiamo alla seconda riga la terza riga moltiplicata per 3, e dividiamo la riga ottenuta per 2, cosí otteniamo la riga mancante della matrice identitá)

$$\xrightarrow[(1/2)\cdot R_{(2)}+3\cdot R_{(3)}]{} \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1/10 & -1/5 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1/5 & 9/10 & 21/10 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1/5 & 3/5 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

quindi l'inversa é:

$$(A_{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} -1/10 & -1/5 & 1/5 & 1/10 \\ 1/5 & 9/10 & 21/10 & 3/10 \\ -1/5 & 3/5 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e lo si puó verificare facilmente:

$$(A_{-1})^{-1}\cdot A_{-1} = \begin{pmatrix} -1/10 & -1/5 & 1/5 & 1/10 \\ 1/5 & 9/10 & 21/10 & 3/10 \\ -1/5 & 3/5 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

♡

(4) Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$

(4) Poiché A ha tre righe e quattro colonne, il suo rango potrá essere al massimo 3. Possiamo procedere in vari modi, vediamone due differenti: consideriamo le tre righe e controlliamo se sono linearmente indipendenti come vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\alpha(4,0,3,-1)+\beta(1,1,2,3)+\gamma(3,-1,1,2)=(0,0,0,0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\alpha+\beta+3\gamma=0 \\ \beta-\gamma=0 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma=0 \\ -\alpha-3\beta+2\gamma=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha=-\gamma \\ \beta=\gamma \\ \gamma=\gamma \end{array} \right. ,$$

cioé, ad esempio scegliendo $\gamma = 1$, vale la relazione:

$$(1,1,2,-3)+(3,-1,1,2)-(4,0,3,-1)=(0,0,0,0),$$

e allora i tre vettori sono linearmente dipendenti e di conseguenza il rango di A non puó essere 3, ma al massimo 2. Infatti, prendendo a questo punto due dei tre vettori-riga, si nota immediatamente che, non essendo l'uno multiplo dell'altro, sono linearmente indipendenti, quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$. Esattamente lo stesso ragionamento si puó fare sui vettori-colonna di A, ovviamente come vettori di $\mathbb{R}^3$. Alternativamente, poiché il rango di una matrice é uguale al massimo ordine di una sua sottomatrice quadrata che ha determinante non nullo, possiamo trovare $\mathrm{rk}(A)$ soltanto calcolando i determinanti delle sottomatrici. In generale, cominciamo (se la matrice non é nulla, nel qual caso ha rango 0) considerando prima le sottomatrici 2×2; se ne troviamo almeno una con determinante non nullo, passiamo a considerare le sottomatrici 3×3; se ne troviamo almeno una con determinante non nullo, consideriamo le 4×4, e cosí via. Quando troveremo che tutte le sottomatrici $k \times k$ hanno determinante uguale a 0, saremo sicuri che il rango sará $k - 1$. Vediamo il nostro caso: consideriamo la sottomatrice 2×2 nell'angolo in alto a sinistra (nord-ovest):

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0,$$

e giá questo significa che $\mathrm{rk}(A)$ é almeno 2. Ora consideriamo peró tutte le possibili sottomatrici quadrate di ordine 3, che sono 4, e calcoliamone i determinanti:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4-3-9+8=0;$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 8+1+3-12=0;$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 16-1-27+6+12-6=0;$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -1+9-2-6=0.$$

Perció nessuna sottomatrice 3×3 di A ha rango massimo, e allora $\mathrm{rk}(A) = 2$.

$\diamondsuit$

(5) Date le matrici di $M_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2i \\ 0 & i-1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3i & 1-i \\ 0 & 0 & 2i \\ 1 & 1+i & -5 \end{pmatrix},$$

calcolare $\det(A^2B^2 - 3AB)$.

(5) Si puó procedere in due modi: o si ricava la matrice $A^2B^2 - 3AB$ e poi se ne calcola il determinante, ma i calcoli possono essere laboriosi, in particolare se si ha a che fare, cosa non infrequente negli algoritmi informatici, con matrici di ordine molto piú grande, oppure si cerca di sfruttare qualche proprietá delle matrici o dei determinanti che ci possa semplificare il lavoro. In particolare, qui puó esserci di aiuto il teorema di Binet. Infatti, raccogliendo:

$$A^2B^2 - 3AB = A \cdot (AB^2) - A \cdot (3I_3B) = A(AB^2 - 3I_3B) = A(AB - 3I_3)B,$$

visto che la matrice identitá commuta con qualsiasi matrice quadrata, da cui, per la formula di Binet,

$$\det(A^2B^2 - 3AB) = \det(A) \cdot \det(AB - 3I_3) \cdot \det(B).$$

Poiché

$$\det(A) = 6i + 2(i-1) - 2(i-1) = 6i, \text{ e } \det(B) = (-2i)(-3i) = -6,$$

e poiché

$$AB - 3I_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2i \\ 0 & i-1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3i & 1-i \\ 0 & 0 & 2i \\ 1 & 1+i & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4+i & -6-i \\ 2i & -2+8i & 2-6i \\ -2 & -2-2i & 8-2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4+i & -6-i \\ 2i & -5+8i & 2-6i \\ -2 & -2-2i & 5-2i \end{pmatrix},$$

si ha:

$$\det(AB - 3I_3) = (-2)[-25 + 10i + 16 + 40i + 4 - 12i + 4i + 12] -$$

$$-2i[20 + 5i - 8i + 2 - 12 - 2i - 12i + 2] - 2[8 + 6 + 2i - 24i - 30 + 48i - 5i - 8] =$$

$$= ... = -150i.$$

Quindi

$$\det(A^2B^2 - 3AB) = 6i \cdot (-6) \cdot (-150i) = -5400.$$

♠

(6) Trovare le eventuali soluzioni del seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} .$$

(6) Ogni sistema lineare di equazioni puó essere scritto in notazione matriciale: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; nel nostro caso, abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che $\det(A) = 8 + 6 + 4 \neq 0$, e allora $\mathrm{rk}(A) = 3$ e grazie al teorema di Rouché-Capelli, sappiamo che il sistema ha $\infty^{3-3} = 1$ sola soluzione. Il normale metodo per la risoluzione di tutti i sistemi lineari é l'algoritmo di riduzione a gradini di Gauss-Jordan, che consiste nello scrivere la matrice completa del sistema, ossia $A\mathbf{b}$, e poi effettuare le solite operazioni elementari sulle righe al fine di rendere la matrice triangolare superiore, cioé di formare il massimo numero di zeri possibile nell'angolo sud-ovest della matrice, per poi risolvere automaticamente il sistema. Vediamo come si puó svolgere l'algoritmo nel nostro caso (é da notare che un sistema cosí semplice si puó anche risolvere per sostituzione, ossia ricavando una variabile in funzione delle altre in un'equazione e poi sostituendola nelle altre due), scrivendo la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 5 \\ 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & -1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

(mettendo al posto della seconda riga la differenza tra la seconda riga moltiplicata per due e la prima, otteniamo un secondo zero sulla prima colonna)

$$\xrightarrow[2 \cdot R_{(2)} - R_{(1)}]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 3 & 6 & | & -3 \\ 0 & -1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

(successivamente ci conviene moltiplicare per 1/3 tutta la seconda riga)

$$\xrightarrow[(1/3) \cdot R_{(2)}]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

(ed ora mettendo al posto della terza riga la somma tra la terza riga e la seconda raggiungiamo la forma triangolare superiore per la matrice dei coefficienti, ed ora il sistema é a gradini).

$$\xrightarrow[R_{(3)} + R_{(2)}]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 6 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema di partenza é equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 6x_3 = -1 \end{cases},$$

che si risolve facilmente: $x_3 = -1/6,\ x_2 = -2/3,\ x_3 = 13/6.$
Essendo A quadrata ed invertibile, abbiamo un altra maniera di risolvere il sistema:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

quindi calcolando l'inversa di A, che con il metodo visto in precedenza risulterá

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/18 & 2/9 & -1/6 \\ -2/9 & 4/9 & -1/3 \\ -1/18 & 1/9 & 1/6 \end{pmatrix},$$

avremo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/18 & 2/9 & -1/6 \\ -2/9 & 4/9 & -1/3 \\ -1/18 & 1/9 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ -2/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}.$$

♣

(7) Risolvere il sistema di 4 equazioni lineari in 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}.$$

(7) Usiamo il metodo di Gauss-Jordan; la matrice completa del sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

(sottraiamo alla quarta riga la seconda e la terza riga contemporaneamente)

$$\xrightarrow[R_{(4)} - R_{(3)} - R_{(2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

(sottraiamo la prima riga alla terza per avere un altro 0 nella prima colonna)

$$\xrightarrow[R_{(3)} - R_{(1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

(ora sommiamo la terza riga alla seconda riga moltiplicata per due)

$$\xrightarrow{R_{(3)}+2\cdot R_{(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

(ed ora, sommando alla quarta riga la terza riga moltiplicata per 1/4, la matrice risultante corrisponde ad un sistema a gradini)

$$\xrightarrow{R_{(4)}+(1/4)\cdot R_{(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema corrispondente é:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=2 \\ x_2-2x_4=1 \\ 4x_3-6x_4=0 \\ -5x_4/2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é l'unica soluzione del sistema.

♡

(8) Discutere le soluzioni di questo sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$ e trovarne esplicitamente la soluzione, se esiste, per $k=2$:

$$\begin{cases} x_1+kx_2-3x_3=1 \\ 2kx_1+3x_2-5x_3=2 \\ (k-1)x_1+3x_3=-5 \end{cases}.$$

(8) Essendo la matrice incompleta A_k del sistema una matrice quadrata, sappiamo giá che per i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che $\det(A_k) \neq 0$, $\operatorname{rk}(A)=3$ e perció ci sará una sola soluzione.

$$\det(A_k) = \det \begin{pmatrix} 1 & k & -3 \\ 2k & 3 & -5 \\ k-1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 9-5k(k-1)+9(k-1)-6k^2 =$$

$$= -11k^2+14k=0 \Longleftrightarrow k_1=0,\ k_2=\frac{14}{11}.$$

Per $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{14}{11}\right\}$, il sistema ammette una sola soluzione. Calcoliamola esplicitamente per $k=2$, tramite la riduzione a gradini della matrice completta $A_2\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 4 & 3 & -5 & | & 2 \\ 1 & 0 & 3 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{(3)}-R_{(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 4 & 3 & -5 & | & 2 \\ 0 & -2 & 6 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{(2)}-4\cdot R_{(1)}}$$

$$\xrightarrow[R_{(2)}-4\cdot R_{(1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & -5 & 7 & | & -2 \\ 0 & -2 & 6 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{(3)}-(2/5)\cdot R_{(2)}]{}$$

$$\xrightarrow[R_{(3)}-(2/5)\cdot R_{(2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & -5 & 7 & | & -2 \\ 0 & 0 & 16/5 & | & -26/5 \end{pmatrix}$$

e il sistema risultante diventa:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -5x_2 + 7x_3 = -2 \\ 16x_3/5 = -26/5 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ -15/8 \\ -13/8 \end{pmatrix};$$

se $k = 0$, il sistema diventa:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 1 \\ 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_3 = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = (2 + 5x_3)/3 \\ -1 - 3x_3 + 3x_3 = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} ... \\ ... \\ -1 = -5 \end{cases},$$

condizione palesemente impossibile, dunque il sistema non é compatibile per $k = 0$. Se invece $k = 14/11$, il sistema assume la forma:

$$\begin{cases} x_1 + 14x_2/11 - 3x_3 = 1 \\ 28x_1/11 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1/11 + 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Invece di effettuare la riduzione a gradini, proviamo a capire se questo sistema é compatibile in un'altra maniera: per il teorema di Rouché-Capelli é necessario e sufficiente che i ranghi della matrice completa ed incompleta siano uguali. Sappiamo giá che $\det(A_{14/11})$=0, quindi $\mathrm{rk}(A_{14/11}) < 3$. Andiamo a vedere qual é il rango della matrice completa in questo caso, cioé andiamo a calcolare i determinanti delle sottomatrici 3×3 della matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 14/11 & -3 & | & 1 \\ 28/11 & 3 & -5 & | & 2 \\ 3/11 & 0 & 3 & | & -5 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, calcoliamo il determinante della sottomatrice data dalle ultime tre colonne:

$$\det \begin{pmatrix} 14/11 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = 350/11 + 9 - 45 - 84/11 = -130/11 \neq 0,$$

quindi é evidente che il rango della matrice completa é 3, perció i due ranghi sono diversi e il sistema é incompatibile. In definitiva, il sistema ammette una ed una sola soluzione per $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \dfrac{14}{11}\right\}$, nessuna soluzione altrimenti.

♢

4.2 Esercizi proposti

(1) Calcolare il determinante della matrice di $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

*

(2) Calcolare il determinante della matrice di $M_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*

(3) Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

é invertibile e in tal caso calcolarne l'inversa.

*

(4) Trovare per quali $k \in \mathbb{R}$ il determinante di

$$A_k = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & k^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & -k & 2 \end{pmatrix}$$

é uguale a 0.

*

(5) Calcolare il rango della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3k^2 \\ 1 & k & k \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

*

(6) Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
calcolare $\det(A^2 - 3I_3)$.

*

(7) Date le matrici di $M_3(\mathbb{C})$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 2 \\ i & 0 & 2 \\ i & -1/i & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & 1+i & -5 \end{pmatrix},$$
calcolare $\det(A^3B^3)$.

*

(8) Risolvere il seguente sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

*

(9) Dire se é compatibile il seguente sistema lineare di 4 equazioni in 3 incognite:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$
e se lo é, trovarne le soluzioni.

*

(10) Dire se é compatibile il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

e se lo é, trovarne le soluzioni.

$*$

(11) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema omogeneo di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 - 2kx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - kx_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ kx_3 = 0 \end{cases}$$

e risolverlo per $k = 0$.

$*$

(12) Trovare le eventuali soluzioni del sistema lineare di 5 equazioni in 5 incognite:

$$\begin{cases} x_1 - x_5 = 2 \\ x_2 + 3x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

Capitolo 5

Autovalori ed autovettori

5.1 Esercizi svolti

(1) Calcolare gli autovalori ed i relativi autovettori dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definita: $F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, -x_2 + 2x_3, -x_1 - 2x_2 + 4x_3)$ e dire se é diagonalizzabile.

(1) La matrice dell'applicazione F rispetto alle basi canoniche é:

$$M_E^E(F) = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

il suo polinomio caratteristico é:

$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = (3-\lambda)[(-1-\lambda)(4-\lambda)+4] = (3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = (-\lambda)(3-\lambda)^2.$

Le sue radici sono dunque: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, con $m_a(0) = 1$, $m_a(3) = 2$. Calcoliamo l'autospazio $V_0 = \ker(A)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3, \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

e allora $V_0 = \mathbb{L}\{(0, 2, 1)\}$. Invece $V_3 = \ker(A - 3I_3)$ é dato da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

e di conseguenza $V_3 = \mathbb{L}\{(0, 1, 2)\}$. Poiché $m_g(3) = \dim(V_3) = 1 < 2 = m_a(3)$, l'applicazione F non é diagonalizzabile.

♠

(2) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$F(x_1, x_2, x_3) = (-16x_1+30x_2-12x_3, -12x_1+26x_2-12x_3, -12x_1+30x_2-16x_3)$,

trovare autovalori ed autovettori di F e stabilire se é diagonalizzabile.

(2) Calcoliamo gli autovalori della matrice che rappresenta F rispetto alle basi canoniche:

$$M_E^E(F) = A = \begin{pmatrix} -16 & 30 & -12 \\ -12 & 26 & -12 \\ -12 & 30 & -16 \end{pmatrix};$$

il polinomio caratteristico é:

$$p_A(\lambda) = (-16-\lambda)[(26-\lambda)(-16-\lambda)+360] - 30[(-12)(-16-\lambda)-144]-$$

$$-12[-360+12(26-\lambda)] = (-16-\lambda)[\lambda^2-10\lambda-56]+360[-\lambda-4]+144[\lambda+4] =$$

$$= (\lambda+4)[(-16-\lambda)(\lambda-14)-360+144] = (\lambda+4)[-\lambda^2-2\lambda+8] = (\lambda+4)^2(2-\lambda);$$

gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = -4,\ m_a(-4) = 2$, e $\lambda_2 = 2,\ m_a(2) = 1$.
L'autospazio V_{-4} sará lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -12 & 30 & -12 \\ -12 & 30 & -12 \\ -12 & 30 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -t + \dfrac{5}{2}u \\ x_2 = u, \\ x_3 = t \end{cases}, \qquad t, u \in \mathbb{R},$$

e ponendo prima $t = 0,\ u = 2$ troviamo l'autovettore $(5, 2, 0)$, poi con $u = 0,\ t = 1$ troviamo $(-1, 0, 1)$, quindi $V_{-4} = \mathbb{L}\{(5, 2, 0), (-1, 0, 1)\}$.
Calcoliamo invece V_2:

$$\begin{pmatrix} -18 & 30 & -12 \\ -12 & 24 & -12 \\ -12 & 30 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

quindi ponendo $t = 1$, troviamo $V_2 = \mathbb{L}\{(1, 1, 1)\}$.
Siccome $\dim(V_2) = m_g(2) = m_a(2) = 1,\ \dim(V_{-4}) = m_g(-4) = m_a(-4) = 2$, F é diagonalizzabile ed una base di autovettori é $\mathbb{B} = \{(1, 1, 1), (5, 2, 0), (-1, 0, 1)\}$, rispetto alla quale si avrá:

$$M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

♣

(3) Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice **nilpotente di ordine** k se esiste $k \in \mathbb{Z}_+$ tale che $\forall\ h \geq k$, $A^k = 0$ (dove con 0 indichiamo la matrice quadrata nulla). Provare che ogni matrice nilpotente ha 0 come autovalore.

(3) Poiché l'appartenenza di 0 allo spettro di A equivale al fatto che l'autospazio relativo a 0, cioé il nucleo dell'applicazione lineare associata alla matrice A, sia nonbanale, supponiamo per assurdo che $\ker(A) = (0)$. Allora consideriamo il vettore non nullo $\mathbf{v_1} \in \mathbb{K}^\mathbf{n}$, e la successione di vettori $\{\mathbf{v_j}\}$:

$$A(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_2};\ A^2(\mathbf{v_1}) = A(A(\mathbf{v_1})) = A(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_3}; ...;\ A^{k-1}(\mathbf{v_1}) = A(\mathbf{v_{k-1}}) = \mathbf{v_k};$$

i $\mathbf{v_j}$ devono essere tutti diversi da 0, perché altrimenti il nucleo di A non sarebbe banale. Ma $A^k = 0$, perché A ha indice di nilpotenza k, e di conseguenza $0 = A^k(\mathbf{v_1}) = A(\mathbf{v_k})$, quindi $\mathbf{v_k} \in \ker(A)$, cioé $\mathbf{v_k}$ é un autovettore relativo all'autovalore 0 per A.

♡

(4) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ cosí definita:

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(iz_1 + \frac{i}{4}z_2, 7iz_1 + 4iz_2, -3z_3, 0\right),$$

trovare autovalori ed autovettori e, se é diagonalizzabile, scrivere una base di autovettori per F.

(4) Anche sugli spazi vettoriali complessi $\mathbb{C}^n$ possiamo utilizzare le normali basi canoniche degli spazi $\mathbb{R}^n$. La matrice A che rappresenta F rispetto alle basi canoniche standard é:

$$M_E^E(F) = A = \begin{pmatrix} i & i/4 & 0 & 0 \\ 7i & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)(-3-\lambda)\left[(i-\lambda)(4i-\lambda) + \frac{7}{4}\right] = \lambda(\lambda+3)\left[\lambda^2 - 5i\lambda - \frac{9}{4}\right],$$

le cui radici sono

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_{3,4} = \frac{5i \pm \sqrt{(5i)^2+9}}{2} = \frac{5i \pm 4i}{2};$$

giá si puó notare che la matrice é diagonalizzabile, perché $m_a(\lambda_j) = 1\ \forall j = 1, 2, 3, 4$, quindi anche $m_g(\lambda_j) = 1\ \forall j = 1, 2, 3, 4$.
Con il metodo usuale, si ricava che

$$V_0 = \mathbb{L}\{(0, 0, 0, 1)\},\ V_{-3} = \mathbb{L}\{(-0, 0, 1, 0)\},$$

$$V_{\frac{9i}{2}} = \mathbb{L}\{(1,14,0,0)\},\ V_{\frac{i}{2}} = \mathbb{L}\{(-1,2,0,0)\},$$

quindi una base di autovettori sará

$$\mathbb{B} = \{(1,14,0,0), (-1,2,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\},$$

e rispetto ad essa

$$M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(F) = \begin{pmatrix} 9i/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

(5) Consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(F) = \pi$, laddove π é il piano di equazione cartesiana $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$, e $F(0,0,1) = (1,2,0)$. Scrivere la matrice di F rispetto alle basi canoniche, trovarne autovalori ed autovettori, e dire se é diagonalizzabile.

(5) Il piano π puó essere scritto in coordinate parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}t - \dfrac{4}{3}u \\ x_2 = t \\ x_3 = u \end{cases},\ t, u \in \mathbb{R}$$

Quindi π coincide con il sottospazio vettoriale

$$W = \ker(F) = V_0 = \mathbb{L}\{(2,3,0), (-4,0,3)\}.$$

Allora $\dim(\ker(F)) = \dim(W) = \dim(V_0) = 2 = m_g(0)$. Essendo il polinomio caratteristico di grado 3, sará del tipo $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - \lambda_1)$, e sicuramente $m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)$, perció F sará diagonalizzabile. Scriviamo ora la matrice di F rispetto alle basi canoniche con la formula del cambiamento di base:

$$A = M_E^E(F) = M_{\mathbb{B}}^E(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(F) \cdot (M_{\mathbb{B}}^E(\mathrm{Id}))^{-1},$$

considerando $\mathbb{B} = \{(2,3,0), (-4,0,3), (0,0,1)\}$, si ha:

$$M_{\mathbb{B}}^E(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

la cui inversa si puó calcolare facilmente ed é

$$(M_{\mathbb{B}}^E(\mathrm{Id}))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/6 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix};$$

invece, siccome $(1,2,0)_E = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{4}\right)_{\mathbb{B}}$, allora:

$$M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/12 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix};$$

quindi, svolgendo il prodotto di matrici, avremo:

$$A = M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/12 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/6 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 1 \\ 3/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)\left[\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda\right] = \lambda^2\left(-\lambda - \frac{1}{4}\right),$$

quindi $\lambda_1 = -\dfrac{1}{4}$, e infine ricaviamo $V_{-\frac{1}{4}}$ al solito modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 3/2 & -3/4 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

quindi $V_{-\frac{1}{4}} = \mathbb{L}\{(1,2,0)\}$, ed una base di autovettori per F é allora

$$\mathbb{B}' = \{(2,3,0), (-4,0,3), (1,2,0)\}.$$

♠

(6) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, con $\det(B) \neq 0$, e vale la relazione $AB^2 = BA^2$, provare che se λ é un autovalore di A^2, allora λ é anche un autovalore di AB.

(6) Poiché $\lambda \in \sigma(A^2)$, esiste almeno un autovettore $\mathbf{v}$ relativo a λ : $A^2\mathbf{v}{=}\lambda\mathbf{v}$. Consideriamo la relazione nell'ipotesi, che implica:

$$AB^2\mathbf{v} = BA^2\mathbf{v} = B(\lambda\mathbf{v}) = \lambda B\ \mathbf{v};$$

se chiamiamo $B\ \mathbf{v}{=}\mathbf{w}$, necessariamente $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ perché $\det(B) \neq 0$ implica $\ker(B) = (0)$, dunque:

$$AB^2\mathbf{v} = AB(B\ \mathbf{v}) = \lambda B\ \mathbf{v} \Longrightarrow AB\ \mathbf{w} = \lambda\mathbf{w},$$

quindi evidentemente λ é autovalore anche di AB.

♣

(7) Data la famiglia di applicazioni lineari $F_k : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, tale che

$$F_k(ax^2 + bx + c) = kax^2 + 2k(a+b)x - 3a + c,$$

calcolarne autovalori ed autovettori, e dire per quali valori di k l'applicazione lineare F_k é diagonalizzabile.

(7) Ricordando che $\mathbb{R}_2[x] \cong \mathbb{R}^3$, e quindi che considerare il polinomio $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ equivale a considerare il vettore $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, scriviamo

$$F_k(a, b, c) = (ka, 2k(a+b), -3a + c),$$

e dunque la matrice che rappresenta F_k rispetto alle basi canoniche é:

$$M_E^E(F_k) = A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 2k & 2k & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$p_{A_k}(\lambda) = (k - \lambda)(2k - \lambda)(1 - \lambda)$ é il polinomio caratteristico, che ha radici $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = k,\ \lambda_3 = 2k$. Se $k \neq 0, \dfrac{1}{2}, 1$, le tre radici sono distinte e la matrice é diagonalizzabile, con autospazi

$$V_1 = \mathbb{L}\{(0,0,1)\},\ V_k = \mathbb{L}\{(1-k, 2k-2, 3)\},\ V_{2k} = \mathbb{L}\{(0,1,0)\}.$$

Se invece $k = 0$, $m_a(0) = 2$, e sostituendo il valore di k negli autospazi giá trovati avremo $V_0 = \mathbb{L}\{(1,-2,3),(0,1,0)\}$, quindi $m_g(0) = 2$, ed anche con $k = 0$ l'applicazione é diagonalizzabile. Se $k = \dfrac{1}{2}$, $V_1 = \mathbb{L}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$, e allora $m_a(1) = m_g(1) = 2$, quindi $F_{\frac{1}{2}}$ é diagonalizzabile. Invece, se $k = 1$, notiamo che $V_1 = \mathbb{L}\{(0,0,1)\}$, e allora $m_g(1) < m_a(1)$ e in questo caso la diagonalizzazione non é possibile. Quindi F_k é diagonalizzabile $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

♡

(8) Provare che ogni matrice quadrata $A \in M_3(\mathbb{R})$ antisimmetrica non ha autovalori reali diversi da 0.

(8) Scriviamo la generica forma della matrice antisimmetrica 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix},$$

e calcoliamone il polinomio caratteristico:

$$p_A(\lambda) = (-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & c \\ -c & -\lambda \end{pmatrix} - a \cdot \det \begin{pmatrix} -a & c \\ -b & -\lambda \end{pmatrix} + b \cdot \det \begin{pmatrix} -a & -\lambda \\ -b & -c \end{pmatrix} =$$

$$= (-\lambda)[\lambda^2 + c^2] - a(a\lambda + bc) + b(ac - b\lambda) = (-\lambda)[\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2],$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 0$ e le radici complesse e coniugate $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Il teorema puó anche essere generalizzato a matrici antisimmetriche di qualsiasi ordine: se l'ordine é pari ci sono autovalori complessi e coniugati a due a due, piú eventualmente lo 0 con molteplicitá algebrica pari, se invece l'ordine é dispari c'é sicuramente almeno un autovalore nullo (un caso limite é la matrice nulla, che é antisimmetrica e che ha soltanto l'autovalore nullo di molteplicitá algebrica uguale al suo ordine).

$\diamondsuit$

5.2 Esercizi proposti

(1) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che:

$$F(x_1, x_2) = (-4x_1 - x_2, x_1 - 2x_2),$$

trovarne autovalori ed autovettori e dire se F é diagonalizzabile.

$*$

(2) Trovare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 + 6x_2 + x_3, 4x_2, 4x_1 + 4x_2 - 3x_3).$$

$*$

(3) Trovare autovalori ed autovettori di $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, applicazione lineare cosí definita:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + 5x_2, -4x_2 + x_4, 2x_3 + x_4, x_3 + 2x_4),$$

e stabilire se é diagonalizzabile.

$*$

(4) Data l'applicazione lineare $F_k : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ tale che

$$F_k(z_1, z_2, z_3) = (kz_1 + z_2, 2z_1 - z_3, 3iz_3),$$

dire per quali $k \in \mathbb{C}$ é diagonalizzabile.

*

(5) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definita:

$$F(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \wedge (1, 0, 0), \quad \forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

trovare il polinomio caratteristico della matrice relativa ad F rispetto alle basi canoniche e dire se F é diagonalizzabile.

*

(6) Dire per quali $\theta \in [0, 2\pi)$ la matrice di rotazione

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ha almeno un autovalore reale.

*

(7) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, e vale la relazione $AB + BA = 0$, provare che, se $\mathbf{w}$ é autovettore sia di A che di B^2, allora é anche autovettore di $(A - B)^2$.

*

(8) Data l'applicazione lineare derivata $T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ cosí definita:

$$T(a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4) = 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3,$$

dire se é diagonalizzabile.

*

(9) Date le applicazioni lineari $F, G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definite:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + x_3),$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3, -x_1 - x_2 - x_3),$$

trovare autovalori ed autovettori dell'applicazione composta $F \circ G$ e dire se é diagonalizzabile.

*

(10) Data l'applcazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cosí definita:

$$F(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1), \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

trovare una relazione tra i parametri a, b, c affinché l'applicazione composta $F \circ F$ abbia un autovalore uguale ad 1.

*

(11) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

quali devono essere i valori di a e di b affinché $\mathbf{v_1}=(1,1)$ e $\mathbf{v_2}=(2,0)$ siano entrambi autovettori di A? In questo caso, quali sono gli autovalori di A?

*

(12) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con $a \in \mathbb{R}$, dire per quali valori di a vale $\sigma(AA^t) \subset \sigma(A^tA)$.

Capitolo 6

Prodotti scalari

6.1 Esercizi svolti

(1) Dato il sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\{\mathbf{v_1} = (1, -2, 0),\ bfv_2 = (3, 4, -1),\ \mathbf{v_3} = (0, 0, -1)\},$$

calcolare tutti i prodotti $< \mathbf{v_i}, \mathbf{v_j} > \forall\ i, j = 1, 2, 3$, usando il prodotto scalare euclideo standard su $\mathbb{R}^3$.

(1)

$$< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} >= 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 5;$$
$$< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} >= 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot (-1) = -5;$$
$$< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} >= 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0;$$
$$< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} >= 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 1;$$
$$< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} >= 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) = 26;$$
$$< \mathbf{v_3}, \mathbf{v_3} >= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Solo $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_3}$ sono dunque ortogonali, e solo il vettore $\mathbf{v_3}$ ha norma unitaria, cioé é un versore; per l'esattezza ha verso opposto al versore $\hat{k} = (0, 0, 1)$ che individua la direzione dell'asse $x_3 = z$ dello spazio tridimensionale.

♠

(2) Dato il prodotto scalare definito nello spazio vettoriale infinito-dimensionale $\mathbb{R}[x]$ dall'integrale:

$$< f(x), g(x) >:= \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad \forall f(x),\ g(x) \in \mathbb{R}[x],$$

dire per quali $k \in \mathbb{R}$ i polinomi $f_k(x) = kx^2 - 2x + 3k$ e $g_k(x) = 2kx + 1$ sono ortogonali rispetto al prodotto dato.

(2) $f_k(x)$ e $g_k(x)$ sono ortogonali se:

$$< f_k(x), g_k(x) >= \int_0^1 (kx^2 - 2x + 3k)(2kx + 1)dx =$$

$$= \int_0^1 [2k^2x^3 - 3kx^2 + (6k^2 - 2)x + 3k]dx = \frac{7}{2}k^2 + 2k - 1 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow k_{1,2} = \frac{-2 \pm 3\sqrt{2}}{7}$$

♣

(3) Dato il sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = s - 2t + 4u \\ x_2 = 2s + u \\ x_3 = t - u \\ x_4 = s + t - 2u \end{cases}, \; s, \; t, \; u \in \mathbb{R},$$

trovare il suo complemento ortogonale $W^\perp$ e scriverne le equazioni cartesiane e parametriche.

(3) Dalle equazioni parametriche deduciamo che

$$W = \mathbb{L}\{(1, 2, 0, 1), \; (-2, 0, 1, 1), \; (4, 0, 0, -2)\};$$

$\dim(W) = 3$ perché

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3, \text{ visto che } \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 8 \neq 0.$$

Quindi, $\dim(W^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(W) = 1$, cioé $W^\perp$ sará una retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^4$, con vettore di direzione $\mathbf{v}$=$(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ tale che valgano le condizioni di ortogonalita' con tutti i vettori di direzione di W:

$$< (v_1, v_2, v_3, v_4), \; (1, 2, 0, 1) >= 0,$$

$$< (v_1, v_2, v_3, v_4), \; (-2, 0, 1, 1) >= 0,$$

$$< (v_1, v_2, v_3, v_4), \; (4, 0, 0, -2) >= 0,$$

per cui le equazioni parametriche per $W^\perp$ saranno:

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 4t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R};$$

mentre quelle cartesiane, ottenute eliminando il parametro t, saranno:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

♡

(4) Se $\mathbf{v}, \ \mathbf{w}$ sono due vettori non ortogonali tra loro, di norma 1, nello spazio vettoriale reale V, data l'applicazione lineare $A : V \longrightarrow V$ tale che $A - A^t$ abbia un autovalore λ_1 relativo a $\mathbf{v}$, ed A abbia un autovalore λ_2 relativo a $\mathbf{w}$, provare che $A\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \Longleftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$.

(4) Per ipotesi, $(A - A^t)\mathbf{v}$=$\lambda_1\mathbf{v} \Longrightarrow A$ $\mathbf{v}$-$A^t\mathbf{v}$=λ_1 $\mathbf{v}$, mentre A $\mathbf{w}$=$\lambda_2\mathbf{w}$. Svolgiamo ora il prodotto scalare seguente:

$$< \lambda_1\mathbf{v}, \mathbf{w} >=< A\mathbf{v} - A^t\mathbf{v}, \mathbf{w} >=< A\mathbf{v}, \mathbf{w} > - < A^t\mathbf{v}, \mathbf{w} >=$$

$$=< A\mathbf{v}, \mathbf{w} > - < \mathbf{v}, (A^t)^t\mathbf{w} >=< A\mathbf{v}, \mathbf{w} > - < \mathbf{v}, \lambda_2\mathbf{w} >,$$

da cui:

$$< A\mathbf{v}, \mathbf{w} >=< \lambda_1\mathbf{v}, \mathbf{w} > + < \mathbf{v}, \lambda_2\mathbf{w} >= \lambda_1 < \mathbf{v}, \mathbf{w} > +\lambda_2 < \mathbf{v}, \mathbf{w} >=$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2) < \mathbf{v}, \mathbf{w} >= 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

poiché per ipotesi $< \mathbf{v}, \mathbf{w} > \neq 0$.

♢

(5) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definita:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, x_1 - x_3, 0),$$

trovare i sottospazi vettoriali $(\ker(F))^\perp$ e $(\ker(F \circ F))^\perp$, e stabilire se uno dei due contiene l'altro.

(5) Poiché

$$M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\ker(F) = \mathbb{L}\{(0,1,0)\}$, quindi $(\ker(F))^{\perp}$ é dato da:

$$< (x_1, x_2, x_3), (0,1,0) >= 0 \Longrightarrow x_2 = 0, \text{ cioé}$$

$$(\ker(F))^{\perp} = \mathbb{L}\{(1,0,0),\ (0,0,1)\}.$$

Invece, la matrice dell'applicazione composta F^2 rispetto alle basi canoniche é:

$$M_E^E(F^2) = (M_E^E(F))^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ed evidentemente $\ker(F \circ F) = \mathbb{L}\{(0,1,0),\ (0,0,1)\}$, per cui ancora evidentemente

$$(\ker(F \circ F))^{\perp} = \mathbb{L}\{(1,0,0)\}, \text{ quindi } (\ker(F \circ F))^{\perp} \subset (\ker(F))^{\perp}.$$

Alla stessa conclusione si poteva giungere anche in questo modo: se $F : V \longrightarrow V$ é un'applicazione lineare, $\mathbf{v} \in \ker(F) \Longrightarrow \mathbf{v} \in \ker(F^2)$, perché $F(\mathbf{v})=0 \Longrightarrow F^2(\mathbf{v})=F(0) = 0$; quindi $\ker(F) \subseteq \ker(F^2)$, e ragionando sui complementi ortogonali, evidentemente l'inclusione si inverte: $(\ker(F^2))^{\perp} \subseteq (\ker(F))^{\perp}$.

♠

(6) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

e definito il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} >_A := < A\mathbf{v}, \mathbf{w} >, \ \forall\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2,$$

calcolare:

(I) $< (1,1), (-1,-2) >_A$;

(II) $< (-1,-2), (-1,-2) >_A$;

(III) le equazioni parametriche e cartesiane di $(\mathbb{L}\{(-1,-2)\})^{\perp}_A$.

(6) (I)

$$< (1,1), (-1,-2) >_A = \left\langle A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (-1,-2) \right\rangle = -11.$$

(II) $< (-1,-2), (-1,-2) >_A = < (-4,-7), (-1,-2) >= 18.$

(III) $(\mathbb{L}\{(-1,-2)\})_A^{\perp}$ é dato dai vettori $\mathbf{v}$=$(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che:

$$\left\langle A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, (-1,-2)\right\rangle = 0 \Longrightarrow < (2v_1+v_2, v_1+3v_2), (-1,-2) >= 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -2v_1 - v_2 - 2v_1 - 6v_2 = 0 \Longrightarrow 4v_1 + 7v_2 = 0,$$

quindi l'equazione cartesiana sará $4x_1 + 7x_2 = 0$, mentre quelle parametriche saranno:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -4t/7 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \text{ cioé } (\mathbb{L}\{(-1,-2)\})_A^{\perp} = \mathbb{L}\{(7,-4)\}.$$

♣

(7) Data la base $\mathbb{B} = \{(1,-1),\ (2,3)\}$ di $\mathbb{R}^2$, ricavarne una base ortonormale usando il procedimento di Gram-Schmidt.

(7) Il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt é un algoritmo che trasforma una base qualsiasi di $\mathbb{R}^n$ in una sua base ortonormale. Chiamando i vettori della base di partenza $\mathbf{w_1}$=$(1,-1)$, $\mathbf{w_2}$=$(2,3)$, e $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ i vettori della base ortogonalizzata, prenderemo:

$\mathbf{v_1} = \mathbf{w_1}$=$(1,-1)$;

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{w_2} - \frac{<\mathbf{v_1}, \mathbf{w_2}>}{<\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}>}\mathbf{v_1} = (2,3) - \frac{<(1,-1),(2,3)>}{<(1,-1),(1,-1)>}(1,-1) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

E' evidente che $< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} >= 0$. Ora la nuova base va normalizzata, cioé i vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ vanno divisi per la propria norma:

$$\mathbf{e_1} = \frac{\mathbf{v_1}}{\| \mathbf{v_1} \|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \ \mathbf{e_2} = \frac{\mathbf{v_2}}{\| \mathbf{v_2} \|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Dunque $\mathbb{B}' = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ é la base ortonormale cercata.

♡

(8) Applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt per ricavare una base ortonormale dalla base $\mathbb{B} = \{(1,-2,0),(0,1,3),(1,1,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(8) In questo caso vediamo come proseguire il procedimento di ortonormalizzazione quando i vettori sono piú di due: se la base di partenza é $\mathbb{B} =$

$\{\mathbf{w_1}, ..., \mathbf{w_n}\}$ e quella che vogliamo ottenere é $\mathbb{B}' = \left\{ \dfrac{\mathbf{v_1}}{\| \mathbf{v_1} \|}, ..., \dfrac{\mathbf{v_n}}{\| \mathbf{v_n} \|} \right\}$, porremo:

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{w_1};$$
$$\mathbf{v_2} = \mathbf{w_2} - \frac{< \mathbf{v_1}, \mathbf{w_2} >}{< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} >}\mathbf{v_1};$$
$$\mathbf{v_3} = \mathbf{w_3} - \frac{< \mathbf{v_1}, \mathbf{w_3} >}{< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} >}\mathbf{v_1} - \frac{< \mathbf{v_2}, \mathbf{w_3} >}{< \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} >}\mathbf{v_2};$$
$$.....$$
$$\mathbf{v_n} = \mathbf{w_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{< \mathbf{v_i}, \mathbf{w_n} >}{< \mathbf{v_i}, \mathbf{v_i} >}\mathbf{v_i}.$$

Nel nostro caso, avremo:

$\mathbf{v_1}$=$(1, -2, 0)$;

$\mathbf{v_2}$=$(0, 1, 3) - \dfrac{< (1, -2, 0), (0, 1, 3) >}{< (1, -2, 0), (1, -2, 0) >}(1, -2, 0) = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}, 3\right)$;

$\mathbf{v_3}$=$(1, 1, 1) - \dfrac{< (1, -2, 0), (1, 1, 1) >}{< (1, -2, 0), (1, -2, 0) >}(1, -2, 0)-$

$-\dfrac{< \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 3\right), (1, 1, 1) >}{< \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 3\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 3\right) >}\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}, 3\right) = \left(\dfrac{24}{23}, \dfrac{12}{23}, -\dfrac{4}{23}\right).$

Normalizzando poi i tre vettori ottenuti, si avrá la base desiderata:

$$\mathbb{B}' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{230}}{115}, \frac{\sqrt{230}}{230}, \frac{15\sqrt{230}}{230}\right), \left(\frac{3\sqrt{46}}{23}, \frac{3\sqrt{46}}{46}, -\frac{\sqrt{46}}{46}\right) \right\}.$$

$\diamondsuit$

6.2 Esercizi proposti

(1) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori

$$(k^2 + 1, 0, 1, 2), \quad (1, -5, 2k, 0) \in \mathbb{R}^4$$

sono ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico.

*

(2) Dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v}=(1,0,-3)$ e $\mathbf{w}=(0,2,2)$, calcolare:

$$< \mathbf{v} \wedge \mathbf{w},\ 2\mathbf{v} + \mathbf{w} > .$$

*

(3) Dato in $\mathbb{R}^2$ il prodotto scalare cosí definito:

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} >_A = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)^t, (w_1, w_2) \right\rangle,$$

$\forall\ \mathbf{v}=(v_1,v_2),\ \mathbf{w}=(w_1,w_2) \in \mathbb{R}^2$, dire per quali $a \in \mathbb{R}$ i vettori $(1,2)$ e $(-3,4)$ sono ortogonali rispetto a questo prodotto.

*

(4) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definita:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0, x_1 - x_2, 3x_3),\ \forall\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4,$$

trovare le equazioni parametriche e cartesiane di $(\ker(F))^\perp$ e di $(\mathrm{Im}(F))^\perp$.

*

(5) Dato il prodotto scalare cosí definito sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$:

$$< f(x), g(x) > := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx,\ \forall f(x),\ g(x) \in \mathbb{R}[x],$$

dire per quali $k \in [2, +\infty]$ i polinomi $f_k(x) = x^k$ e $g_k(x) = x^{k-2} + 5x^k$ sono ortogonali rispetto ad esso.

*

(6) Dati i vettori $\mathbf{u}=(1,-1,0)$, $\mathbf{v}=(1,-1,1)$, $\mathbf{w}=(2,2,1) \in \mathbb{R}^3$, e l'applicazione lineare $A(x_1,x_2,x_3) = (x_1, 4x_2 - x_3, 6x_1 + 5x_2)$, calcolare $A((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w})$ (sugg.: ricordare le proprietá del prodotto vettoriale).

*

(7) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cosí definita:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 - x_4, x_2 + 3x_3, 0, x_1),$$

trovare una base per il sottospazio vettoriale $\mathrm{Im}(F) \cap (\ker(F))^{\perp}$.

*

(8) Provare che, se $A : V \longrightarrow V$ é un'applicazione lineare e $\mathbf{v}$ é un autovettore di $A + A^t$, allora $(A + A^t)(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ é ortogonale a $\mathbf{v}$ $\forall$ $\mathbf{w} \in V$.

*

(9) Dato il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$:

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} >_A = < A\mathbf{v}, \mathbf{w} >, \ \forall \ \mathbf{v}, \ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, \ \text{con:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

trovare le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio vettoriale

$$(\mathbb{L}\{(1,0,1), \ (-1,4,5)\})^{\perp}_{A}.$$

*

(10) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} >: = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 2k & 1 \\ k^2+1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)^t, (w_1, w_2) \right\rangle,$$

$\forall$ (v_1, v_2), $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, é degenere.

*

(11) Data la base $\mathbb{B} = \{(2,-2,0), \ (3,2,0), \ (0,0,4)\}$ di $\mathbb{R}^3$, ricavarne una base ortonormale con il metodo di Gram-Schmidt.

*

(12) Data la base $\mathbb{B} = \{(1,0,2,0), \ (0,0,1,1), \ (0,0,0,2), \ (1,-1,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^4$, ricavarne una base ortonormale con l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Capitolo 7

Operatori lineari

7.1 Esercizi svolti

(1) Diagonalizzare la matrice associata all'operatore simmetrico

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tale che } f(x_1, x_2) = (4x_1 + \sqrt{14}x_2, \sqrt{14}x_1 - x_2),$$

e trovare una base spettrale per f.

(1) Possiamo trovare autovalori ed autovettori della matrice

$$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & -1 \end{pmatrix}$$

con il metodo tradizionale: sappiamo a priori che ogni matrice simmetrica ammette solo autovalori reali, e inoltre la diagonalizzabilitá dell'operatore ci é assicurata dal teorema spettrale.

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = -3,\ 6.$$

Si trova facilmente che

$$V_{\lambda_1} = V_{-3} = \mathbb{L}\{(-2, \sqrt{14})\}, \text{ e che } V_{\lambda_2} = V_6 = \mathbb{L}\{(\sqrt{14}, 2)\};$$

i due vettori $\mathbf{v_1}$=$(-2, \sqrt{14})$ e $\mathbf{v_2}$=$(\sqrt{14}, 2)$ giá trovati sono evidentemente ortogonali, perché $< \mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2} >$=0, ed allora ci basta normalizzarli per ottenere una base spettrale:

$$\mathbb{B}' = \left\{ \frac{\mathbf{v_1}}{\| \mathbf{v_1} \|}, \frac{\mathbf{v_2}}{\| \mathbf{v_2} \|} \right\} = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{3} \right), \left(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right\}.$$

Alternativamente, si puó arrivare allo stesso risultato in questo modo: poiché sappiamo che esiste una matrice unitaria U tale che

$$A = UDU^t, \text{ con } D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

e le colonne di questa matrice unitaria sono gli autovettori di A normalizzati, possiamo imporre la relazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ -3a^2 + 6c^2 = 4 \\ -3b^2 + 6d^2 = -1 \\ -3ab + 6cd = \sqrt{14} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{2}/3 \\ b = \sqrt{7}/3 \\ c = \sqrt{7}/3 \\ d = \sqrt{2}/3 \end{cases},$$

avendo imposto anche la norma dei vettori-colonna di U uguale ad uno, come in ogni matrice unitaria (oppure si poteva imporre l'ulteriore condizione di ortogonalitá dei vettori-colonna: $ac + bd = 0$).

♠

(2) Date due matrici unitarie A e B, rispettivamente associate a due operatori lineari $f,\ g : V \longrightarrow V$, provare che l'operatore somma $f + g$ é unitario se e solo se vale la relazione tra matrici:

$$A + B + AB^tA = 0.$$

(2) L'operatore $f + g : V \longrightarrow V$ é associato alla matrice $A + B \in M_n(K)$ (se V é uno spazio vettoriale n-dimensionale). Sappiamo che l'operatore $f + g$ é unitario se e solo se

$$< (f + g)(\mathbf{v}), (f + g)(\mathbf{w}) >=< \mathbf{v},\ \mathbf{w} >,\ \forall\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \mathbf{V},$$

quindi se e solo se:

$$< (A + B)(\mathbf{v}), (A + B)(\mathbf{w}) >=< \mathbf{v},\ \mathbf{w} > \Longleftrightarrow (A + B)^t \cdot (A + B) = I \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow A^tA + A^tB + B^tA + B^tB = I \text{ (essendo } A \text{ e } B \text{ entrambe unitarie)}$$

$$\Longleftrightarrow I + A^tB + B^tA + I = I \Longleftrightarrow A^tB + B^tA + I = 0 \Longleftrightarrow$$

(applicando a sinistra l'operatore A ad entrambi i membri di questa relazione) $\Longleftrightarrow B + AB^tA + A = 0$.

♣

(3) Diagonalizzare la matrice canonicamente associata all'operatore lineare simmetrico $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3), \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

e trovare una base spettrale per f.

(3) La matrice associata all'applicazione lineare f é:

$$M_E^E(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Ne calcoliamo autovalori ed autovettori come al solito, e troviamo che

$$p_A(\lambda) = (-\lambda^2)(\lambda - 3) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \text{con } m_a(0) = 2,\ m_a(3) = 1;$$

$$V_0 = \mathbb{L}\{(-1, 1, 0)\ (-1, 0, 1)\};\ V_3 = \mathbb{L}\{(1, 1, 1)\};$$

notiamo immediatamente che mentre il vettore generatore dell'autospazio V_3 é ortogonale ad entrambi i vettori generatori di V_0, e quindi ad ogni vettore di V_0 (infatti $< (1, 1, 1),\ (-1, 1, 0) >=< (1, 1, 1),\ (-1, 0, 1) >= 0$), i due vettori $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$ non sono ortogonali. Per ricavare una base spettrale, peró, non é necessario in questo caso applicare il metodo di Gram-Schmidt: infatti basta scegliere un vettore di V_0, per esempio $(-1, 1, 0)$, e poi prenderne un altro sempre di V_0, quindi del tipo $\alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$, e scegliere α e β in modo da soddisfare l'ortogonalitá con $(-1, 1, 0)$:

$$< (-\alpha - \beta, \alpha, \beta),\ (-1, 1, 0) >= 0 \Longrightarrow 2\alpha + \beta = 0,$$

quindi va bene un vettore del tipo $(\alpha, \alpha, -2\alpha)$, ad esempio $(1, 1, -2)$. I tre vettori $(1, 1, -2)$, $(-1, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$ sono tutti ortogonali fra loro, ed al solito otteniamo una base spettrale normalizzandoli:

$$\mathbb{B} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\};$$

si verifica poi facilmente che, date le matrici

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

vale: $UDU^t = A$.

♡

(4) Dire per quali $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \in \mathbb{R}$ la matrice di $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & -1 & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix}$$

é unitaria.

(4) Affinché A sia una matrice unitaria, deve valere la relazione $AA^t = I_3$, ossia:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & -1 & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ a & -1 & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1+a^2+b^2 & c-a+bd & ae+bf \\ c-a+bd & 1+c^2+d^2 & -e+df \\ ae+bf & -e+df & e^2+f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ed uguagliando ogni coefficiente delle due matrici otteniamo:

$$\begin{cases} a^2+b^2=0 \\ c^2+b^2=0 \\ e^2+f^2=1 \\ -e+df=0 \\ c-a+bd=0 \\ ae+bf=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \\ e=0 \\ f=\pm 1 \end{cases},$$

quindi le uniche due matrici ortogonali che possiamo ottenere sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

(5) Diagonalizzare l'operatore lineare simmetrico $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cosí definito:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_3 - \sqrt{2}x_4, -\sqrt{2}x_3)$$

trovando una base spettrale per F.

(5) Scriviamo la matrice di $M_4(\mathbb{R})$ che rappresenta l'applicazione lineare F rispetto alla base canonica, notando che é una matrice a blocchi:

$$A = M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

cioé del tipo

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_2 \\ 0_2 & A_2 \end{pmatrix},$$

con A_1, A_2 sottomatrici 2×2, 0_2 sottomatrice con tutti coefficienti nulli. Si puó provare facilmente che $p_A(\lambda) = p_{A_1}(\lambda) \cdot p_{A_2}(\lambda)$, ed estendere questo risultato a matrici quadrate con piú di due blocchi. Calcolando invece $p_A(\lambda)$ in modo tradizionale, si ha:

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2[\lambda^2 - \lambda - 2] - [\lambda^2 - \lambda - 2] =$$

$= (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2(\lambda - 4) = 0 \iff \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$, con $m_a(-1) = m_a(4) = 1,\ m_a(2) = 2$. Si trovano facilmente gli autospazi:

$V_{-1} = \mathbb{L}\{(0, 0, 1, \sqrt{2})\},\ V_2 = \mathbb{L}\{(1, -1, 0, 0),\ (0, 0, -\sqrt{2}, 1)\},\ V_4 = \mathbb{L}\{(1, 1, 0, 0)\}$.

I quattro autovettori trovati sono tutti ortogonali tra loro, quindi non c'é bisogno di alcun processo di ortogonalizzazione. La base spettrale per F sará:

$$\left\{ \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(0, 0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) \right\},$$

e la matrice unitaria U di cambiamento di base di conseguenza sará:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{6}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix};$$

si prova facilmente che $A = UDU^t$, ossia la matrice diagonale congruente ad A é

$$U^t AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D.$$

Ovviamente l'ordine degli autovalori nella matrice diagonale é coerente con l'ordine degli autovettori come vettori-colonna nella matrice unitaria U.

♠

7.2 Esercizi proposti

(1) Diagonalizzare l'operatore lineare simmetrico $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definito:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, 2x_2 - x_3, -x_3 + 2x_2)$$

e trovare una base spettrale per f.

*

(2) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'operatore lineare $f_k : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ cosí definito:

$$f_k(ax^3 + bx^2 + cx + d) = -(c+d)x^3 + (k+1)cx^2 + (k+1)(a+b)x - a - d,$$

$\forall\ ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$, é simmetrico.

*

(3) Dato l'operatore lineare simmetrico $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3)\right),$$

con matrice associata $A = M_E^E(f)$, diagonalizzare l'operatore lineare $f \circ f$ associato alla matrice A^2 e trovare una sua base spettrale.

*

(4) Diagonalizzare l'operatore lineare simmetrico $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cosí definito:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 5x_3 - x_4, -x_3 + 5x_4),$$

e trovare una base spettrale per f.

*

(5) Provare che se $f : V \longrightarrow V$ é un operatore lineare sia simmetrico che unitario, la cui matrice rispetto alla base canonica é A, l'autospazio relativo a 0 di $A^2 - I$ é tutto V.

Capitolo 8

Spazi affini

8.1 Esercizi svolti

(1) Dati nello spazio affine standard $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ i punti $P \equiv (3,1,1),\ Q \equiv (2,-1,0)$, dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il punto $R \equiv (3+k, 4-k, 2)$ é allineato con P e con Q.

(1) In qualsiasi spazio affine, tre punti sono allineati se appartengono alla stessa retta, ossia se i vettori che li congiungono sono tra loro linearmente dipendenti. Scriviamo i tre vettori $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{QR},\ \overrightarrow{PR}$, basandoci sulla corrispondenza che dota $\mathbb{R}^3$ della struttura di spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:
$\mathbf{v_1}=\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1,-2,-1)$;
$\mathbf{v_2}=\overrightarrow{QR} = R - Q = (k+1, 5-k, 2)$;
$\mathbf{v_3}=\overrightarrow{PR} = R - P = (k, 3-k, 1)$.
Ci é sufficiente trovare i valori di k per cui due di questi tre vettori siano linearmente dipendenti (automaticamente lo sará anche il terzo come combinazione lineare dei primi due); ad esempio, imponendo:
$\mathbf{v_1}= \lambda\mathbf{v_2} \Longleftrightarrow (-1,-2,-1) = (\lambda(k+1), \lambda(5-k), 2\lambda) \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2},\ k = 1;$
avremmo trovato analogamente il valore $k = 1$ imponendo:
$\mathbf{v_1}=\lambda\mathbf{v_3} \Longleftrightarrow (-1,-2,-1) = (\lambda k, \lambda(3-k), \lambda) \Longrightarrow \lambda = -1,\ k = 1.$
Con $k = 1,\ R \equiv (4,3,2)$, e i punti $P,\ Q,\ R$ giacciono sulla stessa retta affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

♣

(2) Verificare che i tre punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$: $A \equiv (1,0,0),\ B \equiv (0,\sqrt{3},0),\ C \equiv (-1,0,0)$ sono i vertici di un triangolo equilatero ABC nello spazio tridimensionale e calcolare l'area di quest'ultimo.

(2) Affinché i tre punti siano i vertici di un triangolo i cui angoli siano tut-

ti uguali a $\dfrac{\pi}{3}$ c'é ovviamente bisogno che i tre vettori corrispondenti dello spazio vettoriale associato $\mathbb{R}^3$ formino tra loro questo angolo. Poiché i vettori coincidenti con i lati del triangolo sono:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, \sqrt{3}, 0),\ \overrightarrow{BC} = (-1, -\sqrt{3}, 0),\ \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 0),$$

e gli angoli tra loro compresi sono:

$$\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{< \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} >}{\| \overrightarrow{BA} \| \cdot \| \overrightarrow{BC} \|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3};$$

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{< \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} >}{\| \overrightarrow{BA} \| \cdot \| \overrightarrow{AC} \|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3};$$

$$\widehat{BCA} = \arccos\left(\frac{< \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} >}{\| \overrightarrow{BC} \| \cdot \| \overrightarrow{CA} \|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

il triangolo ABC é equilatero (alternativamente, si poteva anche calcolare le norme, cioé le lunghezze dei tre vettori e notare che erano uguali), la cui area é:

$$\text{AREA}_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{BA} \| \cdot \| \overrightarrow{BC} \| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

♡

(3) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sottospazio affine di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di giacitura $W = \mathbb{L}\{(3, -2)\}$ e passante per il punto $A \equiv (0, -k)$ passa per il punto $P \equiv (1, 5)$ dopo che ad esso é stata applicata una traslazione $T_{\mathbf{v}}$, con $\mathbf{v}$=$(1, -1)$.

(3) Cominciamo a scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio affine richiesto, che chiamiamo S. Poiché siamo nello spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e $\dim(W) = 1$, S é una retta affine di equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = -2t - k \end{cases},\ t \in \mathbb{R},$$

e di equazione cartesiana, ottenuta ricavando il parametro t in un'equazione e sostituendolo nell'altra: $2x_1 + 3x_2 + 3k = 0$.
Applicare una traslazione $T_{\mathbf{v}}$ ad ogni punto di questa retta significa spostare ogni punto nella direzione e nel verso del vettore $\mathbf{v}$, ossia

$$\forall\ (x_1, x_2) \in S,\ \ T_{\mathbf{v}}(x_1, x_2) = (x_1, x_2) + \mathbf{v} = (x_1 + 1, x_2 - 1);$$

chiamando (x_1', x_2') l'immagine di ogni punto di S tramite la traslazione si avrá: $x_1' = x_1 + 1,\ \ x_2' = x_2 - 1$, e di conseguenza $T_{\mathbf{v}}(S)$ avrá equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1' = 3t + 1 \\ x_2' = -2t - k - 1 \end{cases},\ t \in \mathbb{R},$$

e quindi equazione cartesiana $2x_1' + 3x_2' + 3k + 1 = 0$, da cui, imponendo il passaggio per il punto $P \equiv (1,5)$, si dovrá avere $2 + 15 + 3k + 1 = 0 \Longrightarrow k = -6$. Il sottospazio S richiesto é dunque la retta di equazione cartesiana $2x_1 + 3x_2 - 18 = 0$.

$\diamondsuit$

(4) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio affine S di $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ di giacitura $W = \mathbb{L}\{(0,2,0,2),\ (3,1,-1,0)\}$ e passante per il punto $P \equiv (0,1,2,-3)$.

(4) Scriviamo le equazioni parametriche di S in questa forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3u \\ x_2 = 2t + u + 1 \\ x_3 = -u + 2 \\ x_4 = 2t - 3 \end{cases}, \ t,\ u \in \mathbb{R}.$$

Le equazioni cartesiane del sottospazio S saranno in numero uguale alla dimensione dello spazio affine meno la dimensione della giacitura di S, cioé 4-2=2 equazioni. Possiamo ricavarle facilmente da quelle parametriche eliminando i due parametri t ed u, ad esempio in questo modo:

$$\begin{cases} u = \frac{x_1}{3} \\ t = \frac{x_4+3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = x_4 + 3 + x_1/3 + 1 \\ x_3 = -x_1/3 + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_4 + 12 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - 6 = 0 \end{cases}$$

Queste due equazioni cartesiane non sono le uniche due possibili per S: si potevano anche scegliere due minori di ordine 3 qualsiasi della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 - 1 & x_3 - 2 & x_4 + 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed annullarli, ad esempio:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_3 - 2 & x_4 + 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow x_1 + 3x_3 - 6 = 0$$

e

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - 1 & x_4 + 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow x_1 - 3x_2 + 3x_4 + 12 = 0.$$

$\spadesuit$

(5) Dato in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il sottospazio affine S di giacitura $W = \mathbb{L}\{(1,2,-4)\}$ e passante per il punto $P \equiv (3,2,-1)$, dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sottospazio traslato

$T_{\mathbf{v_k}}(S)$, con $\mathbf{v_k}$=$(k, 0, -3)$, contiene il punto $Q \equiv (6, 2, -4)$.

(5) Le equazioni parametriche di S sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = t + 3 \\ x_2 = 2t + 2 \\ x_3 = -4t - 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Notiamo preliminarmente che $Q \notin S$; infatti sostituendo le coordinate di Q nelle equazioni parametriche, otteniamo:

$$\begin{cases} 6 = t + 3 \\ 2 = 2t + 2 \\ -4 = -4t - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 0 \\ t = 3/4 \end{cases},$$

ossia tre valori differenti di t, e questo é impossibile. Applichiamo quindi la traslazione $T_{\mathbf{v_k}}$: chiamando (x'_1, x'_2, x'_3) il generico punto di $T_{\mathbf{v_k}}(S)$, avremo la relazione:

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = T_{\mathbf{v_k}}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + k, x_2, x_3 - 3),$$

da cui le equazioni parametriche di $T_{\mathbf{v_k}}(S)$ saranno:

$$\begin{cases} x'_1 = t + 3 + k \\ x'_2 = 2t + 2 \\ x'_3 = -4t - 4 \end{cases};$$

imponendo il passaggio per il punto Q, si avrá:

$$\begin{cases} 6 = t + 3 + k \\ 2 = 2t + 2 \\ -4 = -4t - 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Quindi la traslazione cercata é $T_{\mathbf{v_3}}$, con $\mathbf{v_3}$=$(3, 0, -3)$.

♣

(6) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio affine S di $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ di giacitura $W = \mathbb{L}\{(1, 1, 0, 0),\ (0, -1, 0, 2),\ (0, 2, 1, 0)\}$ e passante per il punto $P \equiv (1, 0, 0, 1)$, e del suo traslato $T_{\mathbf{v_k}}(S)$, con $\mathbf{v_k}$=$(-k, k^2 - 1, 1 - k, -1)$. Dire se esistono dei $k \in \mathbb{R}$ per cui il sottospazio $T_{\mathbf{v_k}}(S)$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ ed eventualmente calcolarli.

(6) Scriviamo nel modo usuale le equazioni parametriche di S:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = s+1 \\ x_2 = s-t+2u \\ x_3 = u \\ x_4 = 2t+1 \end{cases}, \ s, \ t, \ u \in \mathbb{R}.$$

Ricaviamo l'equazione cartesiana di S eliminando i tre parametri:

$$\begin{cases} s = x_1 - 1 \\ t = (x_4-1)/2 \\ u = x_3 \end{cases} \Longrightarrow 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 1 = 0,$$

oppure imponendo:

$$\det \begin{pmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3 & x_4-1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Possiamo scrivere in questo modo l'espressione del sottospazio traslato:

$$T_{\mathbf{v_k}}(S) = \{(x_1', x_2', x_3', x_4') \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \mid x_1' = x_1 - k, \ x_2' = x_2 + k^2 - 1,$$
$$x_3' = x_3 + 1 - k, \ x_4' = x_4 - 1, \ \text{con } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S\}.$$

Quindi $T_{\mathbf{v_k}}(S)$ avrá equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1' = s + 1 - k \\ x_2' = s - t + 2u + k^2 - 1 \\ x_3' = u + 1 - k \\ x_4' = 2t \end{cases}, \ s, \ t, \ u \in \mathbb{R};$$

la sua equazione cartesiana, ovviamente dipendente da k, sará invece:

$$\begin{cases} s = x_1' + k - 1 \\ t = \frac{x_4'}{2} \\ u = x_3' + k - 1 \end{cases} \Longrightarrow 2x_1' - 2x_2' + 4x_3' - x_4' + 2k^2 + 6k - 8 = 0.$$

Affinché $T_{\mathbf{v_k}}(S)$ sia un sottospazio vettoriale, basta che contenga l'origine $O = (0,0,0,0)$; sostituendo O, ci resta l'equazione di secondo grado in k:

$$2k^2 + 6k - 8 = 0 \Longrightarrow k_1 = 1, \ k_2 = -4;$$

quindi le traslazioni $T_{\mathbf{v_1}}$, con $\mathbf{v_1}$=$(-1,0,0,-1)$ e $T_{\mathbf{v_{-4}}}$, con $\mathbf{v_{-4}}$=$(4,15,5,-1)$ portano S in un sottospazio vettoriale di dimensione 3, coincidente con la giacitura W.

♡

(7) Sia

$$H := \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(A) \subset B\}$$

dove:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\},\ B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \mid x_1 = x_2 = 0\}.$$

a) Dimostrare che H é un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$.

b) Calcolare la dimensione di H ed esibirne una base.

(7) a) Per il lemma 8.1 del capitolo 8 del volume di teoria, H é non vuoto. Per la proposizione 8.7 dello stesso capitolo, H é un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$.

b) Poiché $\dim(A) = 2$ e $\dim\,(B) = 1$, sempre per la proposizione 8.7 si ha:

$\dim(H) = \dim(A) \cdot \dim(B) + (\dim(\mathbb{R}^3) - \dim(A)) \cdot \dim(\mathbb{R}^3) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5.$

Utilizzando l'isomorfismo tra applicazioni lineari e matrici, per calcolare una base di H basta imporre che la generica matrice di $M_3(\mathbb{R})$ mandi i vettori di una base di A in B. Poiché una base di A é data da $\{(0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$, si deve avere:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} \in B,$$

e contemporaneamente

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} \in B.$$

Ne segue che $b = e = c = f = 0$, da cui la generica matrice che rappresenta gli elementi di H é la seguente:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

e ne consegue che una base per H é data da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\diamondsuit$

(8) Considerando l'insieme

$$H = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4) \mid f(A) \subset B\},$$

con

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = 0\},$$
$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\},$$

calcolare la dimensione di H, sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ ed esibirne una base.

(8) Esattamente come nell'esercizio precedente, sappiamo che H é un sottospazio vettoriale la cui dimensione sará data dalla relazione:

$$\dim(H) = \dim(A)\dim(B) + (\dim(\mathbb{R}^4) - \dim(A))\dim(\mathbb{R}^4) =$$

$$= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 10.$$

Detta $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,4}$ la generica matrice di $M_4(\mathbb{R})$, imponendo il fatto che i vettori di una base di A debbano essere mandati in B, queste relazioni implicano $c_{13} = c_{23} = c_{33} = 0$ e $c_{14} = c_{24} = c_{34} = 0$, da cui la generica matrice di H sará del tipo:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix},$$

e di conseguenza una base per H, che per brevitá evitiamo di scrivere, sará formata dalle 10 matrici a coefficienti tutti uguali a 0 tranne 1, che stará ogni volta in un posto diverso tra quelli non nulli della matrice suddetta.

♠

(9) Sia

$$H_{p,q} := \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(A_p) \subset B_q\}$$

dove:

$$A_p = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = p\}, \quad B_q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0,\ x_2 = q\}.$$

a) Individuare per quali $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $H_{p,q}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$;

b) per tali valori, calcolare la dimensione di $H_{p,q}$ ed esibirne una base.

(9) a) Innanzitutto, distinguiamo i vari casi:

I) $p = 0, \quad q = 0.$
II) $p \neq 0, \quad q = 0.$
III) $p = 0, \quad q \neq 0.$
IV) $p \neq 0, \quad q \neq 0.$
Il primo caso coincide evidentemente con l'esercizio (7). Nel caso II), A_p non é uno spazio vettoriale. Tuttavia, poiché B_0 lo é, per l'osservazione 8.9 dell'ottavo capitolo del volume della teoria, calcolare $H_{p,0}$ equivale a calcolare:

$$\tilde{H} = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(\mathbb{L}(A_p)) \subset B_0\}.$$

Ma $\mathbb{L}(A_p) = \mathbb{R}^3$, onde $\dim(\tilde{H}) = 3 = \dim(H_{p,0})$. Nel caso III), poiché B_q non é uno spazio vettoriale, neanche $H_{0,q}$ lo é, ed il caso IV) é analogo.
b) Resta da esibire una base di $H_{p,0}$; basta imporre che la generica matrice di $M_3(\mathbb{R})$ mandi i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ in B_0, per cui, ragionando come nell'esercizio precedente, una base sará:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

♣

(10) Sia

$$H_{p,q} = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(A_p) \subset B_q\},$$

dove:

$$A_p = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = p, \ x_2 = 0\},$$
$$B_q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - q^2) = 0\};$$

a) determinare per quali valori di $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'insieme $H_{p,q}$ é uno spazio vettoriale;

b) in tali casi, determinare la sua dimensione ed esibirne una base.

(10) a) Ovviamente, A_0 é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1. B_q risulta invece costituito dall'unione dell'iperpiano $\{x_3 = 0\}$ con la superficie $x_1^2 + x_2^2 = q^2$, che rappresenta un cilindro a sezione circolare (di raggio q) in $\mathbb{R}^3$. Tale cilindro degenera nell'asse x_3 per $q = 0$, perché gli unici punti dello spazio affine tridimensionale che verificano l'equazione cartesiana $x_1^2 + x_2^2 = 0$ sono quelli del tipo $(0, 0, t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Chiaramente, per $q \neq 0$, invece, non solo il cilindro non é uno spazio vettoriale ma non contiene al suo interno alcun altro sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ (né il punto $(0, 0, 0)$, né alcuna retta, né alcun piano passanti per l'origine). Distinguiamo al solito i vari casi:
I) $p = 0, \quad q = 0.$
II) $p = 0, \quad q \neq 0.$
III) $p \neq 0, \quad q = 0.$

IV) $p \neq 0, \quad q \neq 0$.
Nel primo caso, A_0 é una retta passante per l'origine, mentre B_0 é l'unione del piano $x_3 = 0$ con l'asse x_3. Tali insiemi sono entrambi spazi vettoriali ma la loro unione non lo é. E' facile quindi rendersi conto che $H_{0,0}$ non é uno spazio vettoriale in quanto se si considera una $f_1 \in H_{0,0}$ tale che $f_1(A_0) \subset \{x_3 = 0\}$ ed una $f_2 \in H_{0,0}$ tale che $f_2(A_0)$ sia l'asse x_3, l'applicazione somma $f_1 + f_2 \notin H_{0,0}$.
Nel caso II), A_0 é uno spazio vettoriale come sopra, mentre B_0 é l'unione dello spazio vettoriale $\{x_3 = 0\}$ con il cilindro $x_1^2 + x_2^2 = q^2$, non contenente alcuno spazio vettoriale. Ne segue che ogni applicazione lineare $f \in H_{0,q}$ é costretta ad inviare A_0 completamente nel piano $\{x_3 = 0\}$ (in tal caso, quindi, il cilindro viene del tutto trascurato). Di conseguenza, studiare $H_{0,q}$ equivale a studiare

$$\tilde{H}_{0,q} = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(A_0) \subset \{x_3 = 0\}\ \}.$$

Si tratta quindi di uno spazio vettoriale. Nei casi III) e IV), é immediato notare che, per le stesse motivazioni dell'esercizio precedente, $H_{p,q}$ non é mai uno spazio vettoriale.
b) Qui procediamo analogamente agli esercizi (7) e (9):

$$\dim(\tilde{H}_{0,q}) = \dim(A_0) \cdot \dim(\{x_3 = 0\}) + (\dim(\mathbb{R}^3) - \dim(A_0)) \cdot \dim(\mathbb{R}^3) = 8.$$

E si trova facilmente che la generica matrice di $M_3(\mathbb{R})$ che genera il sottospazio $\tilde{H}_{0,q}$ é:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}.$$

♡

(11) Sia $H_{p,q}$ come negli esercizi (9) e (10), dove stavolta peró

$$A_p = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = p\}, \quad B_q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - q^2 x_3^2 = 0\}.$$

a) Individuare per quali $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $H_{p,q}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$;
b) per i valori trovati nell'esercizio precedente, trovare la dimensione di $H_{p,q}$ ed una sua base.

(11) a) Quest'esercizio é molto simile al precedente, con la differenza peró che l'equazione cartesiana $x_1^2 + x_2^2 = q^2 x_3^2$ per $q \neq 0$ individua un cono circolare retto in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, mentre per $q = 0$ degenera come nell'asse x_3. Perció distinguendo i soliti quattro casi, si ha:
nel caso I), Cioé con $p = q = 0$, ricadiamo nuovamente nel caso dell'esercizio (7), in cui $H_{0,0}$ é un sottospazio vettoriale. Nel caso II), A_0 é un sottospazio vettoriale di dimensione 2, ma B_q é l'unione di infiniti sottospazi vettoriali, cioé di infinite rette passanti per l'origine (ad esempio, le rette di equazioni parametriche $x_1 = t,\ x_2 = t,\ x_3 = \sqrt{2}t/q$, oppure $x_1 = t,\ x_2 = 2t,\ x_3 = \sqrt{5}t/q$,

o anche $x_1 = 3t,\ x_2 = -t,\ x_3 = \sqrt{10}t/q$, e via dicendo). E' facile vedere che prendendo due qualsiasi di queste rette r ed s, e poi due applicazioni f_1 ed f_2 tali che $f_1(A_0) \subset r$, e che $f_2(A_0) \subset s$, l'applicazione somma $f_1 + f_2$ non manda A_0 in una retta appartenente al cono B_q, perció $H_{0,q}$ non é uno spazio vettoriale. I casi III) e IV) sono perfettamente uguali a quelli dell'esercizio (10).
b) Poiché solo $H_{0,0}$ é uno spazio vettoriale, esattamente come nell'esercizio (7), $\dim(H_{0,0}) = 5$ ed una base per questo spazio é data da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\diamondsuit$

8.2 Esercizi proposti

(1) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio affine di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di dimensione 1 passante per i punti $A \equiv (1,2),\ \ B \equiv (3,-4)$.

*

(2) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del piano affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per i tre punti $A \equiv (-1,0,0)$, $B \equiv (2,2,1)$, $C \equiv (3,0,4)$.

*

(3) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il triangolo di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di vertici $A \equiv (1,1,0)$, $B \equiv (0,1,0)$, $C \equiv (0,0,k)$ ha area uguale a $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

*

(4) Scrivere le equazioni parametriche del sottospazio affine S di $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ di giacitura $W = \mathbb{L}\{(2,0,1,0)\}$ e passante per $P \equiv (-1,0,1,3)$.

*

(5) Dato il sottospazio affine S di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di giacitura $W = \mathbb{L}\{(1,0,0),\ (0,0,1)\}$ e passante per $P \equiv (3,0,1)$, scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del suo traslato $T_{\mathbf{v}}(S)$, con $\mathbf{v}$=$(0,2,0)$.

$*$

(6) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio affine $S^{\perp}$, ortogonale al sottospazio S dell'esercizio precedente, e passante per il punto $Q \equiv (4,5,5)$.

$*$

(7) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sottospazio $T_{\mathbf{v_k}}(S)$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, con S dato dall'equazione cartesiana $x_1 - 4x_2 + 1 = 0$, e $\mathbf{v_k}$=$(k,-2)$, é un sottospazio vettoriale.

$*$

(8) Dati i tre punti $A \equiv (-1,0,1)$, $B \equiv (1,0,1)$, $C \equiv (0,3,0)$, dire per quali k i loro traslati $T_{\mathbf{v_k}}(A)$, $T_{\mathbf{v_k}}(B)$, $T_{\mathbf{v_k}}(C)$, con $\mathbf{v_k}$=$(k,0,k)$, sono contenuti in un piano affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per l'origine.

$*$

(9) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ cosí definito:

$$W = \mathbb{L}\{(1,0,0,0),\ (-1,0,2,0),\ (0,0,1,-3)\},$$

scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio affine $T_{\mathbf{v}}(W^{\perp})$, con $\mathbf{v}$=$(-1,5,1,4)$.

$*$

(10) Se

$$H_q = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \mid f(A) \subseteq B_q\},$$

con $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$, $B_q = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0,\ x_2 = q\}$, dire per quali $q \in \mathbb{R}$ H_q é un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, e per tali valori calcolare la dimensione di H_q ed esibirne una base.

$*$

(11) Sia

$$H_{p,q} = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(A_p) \subset B_q\},$$

dove:

$A_p = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = p\}, \quad B_q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = q,\ x_2 = 2q\},$

a) individuare per quali $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'insieme $H_{p,q}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$;

b) per tali valori, calcolare $\dim(H_{p,q})$ e trovare una base di $H_{p,q}$.

*

(12) Se

$$H = \{f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f(A) \subset B\}$$

con:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}, \quad B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\},$$

calcolare la dimensione di H ed esibirne una base.

*

(13) Sia

$$H_p = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(A_p) \subset B\},$$

dove:

$$A_p = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = p,\ x_2 = 0\},$$
$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \cdot (x_1^2 - x_2^2 - 1) = 0\};$$

a) determinare per quali valori di $p \in \mathbb{R}$ l'insieme H_p é uno spazio vettoriale;

b) in tali casi, determinare la sua dimensione ed esibirne una base.

*

(14) Sia

$$H_{p,q} = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(A_p) \subseteq B_q\},$$

dove:

$A_p = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = p\}, \ B_q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - q^2 = 0\}.$

a) Individuare per quali $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $H_{p,q}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$;

b) per i valori trovati nell'esercizio precedente, trovare la dimensione di $H_{p,q}$ ed una sua base.

Capitolo 9

Geometria in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

9.1 Esercizi svolti

(1) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ con vettore direzione $\mathbf{v}$=$(1, 2, -1)$ e passante per il punto $P \equiv (3, 0, -5)$.

(1) Premettendo che in tutto questo capitolo useremo le coordinate (x, y, z) in luogo di (x_1, x_2, x_3), le equazioni parametriche di r saranno:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t \\ z = -t - 5 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R};$$

per ricavare due equazioni cartesiane, ossia le equazioni cartesiane di due piani incidenti in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ che si intersecano nella retta r, ci basta eliminare il parametro t dalle equazioni parametriche, ad esempio in questo modo:

$$t = x - 3 \ \Longrightarrow \ y = 2(x - 3), \ z = -x - 2 \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$$

sono due equazioni cartesiane di r. E' da notare che i piani che si intersecano in una stessa retta sono infiniti, per cui le equazioni cartesiane di una retta ovviamente non sono univocamente determinate.

♠

(2) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ contenente la retta:

$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

e passante per il punto $P \equiv (5, 1, -3)$.

(2) Per scrivere l'equazione di un piano, abbiamo bisogno di tre punti distinti oppure di due vettori direzione linearmente indipendenti, che generano la giacitura del piano e di un punto. Nel nostro caso, uno dei due vettori di direzione sará quello della retta r, e cioé $\mathbf{v_1}$=$(1, -1, 3)$. Essendo il punto P esterno alla retta r, cosa facilmente verificabile sostituendo ad (x, y, z) le coordinate di P e notando che il sistema risultante nella sola incognita t é evidentemente incompatibile, possiamo considerare come secondo vettore della giacitura un qualsiasi segmento che congiunga il punto P dato con un punto della retta r, ad esempio $Q \equiv (1, 0, 0)$, che troviamo per $t = 0$. Allora, $\mathbf{v_2}$=$(Q - P) = (-4, -1, 3)$, e dunque il piano π di giacitura $W = \mathbb{L}\{(1, -1, 3),\ (-4, -1, 3)\}$ e passante per P sará dato da:

$$\det \begin{pmatrix} x-5 & y-1 & z+3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \implies 3y + z = 0.$$

♣

(3) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

e passante per il punto $P \equiv (0, 2, 4) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(3) Prima di tutto, dobbiamo passare dalle equazioni cartesiane di r alle sue equazioni parametriche, fissando una delle tre coordinate a nostra scelta uguale a t, ad esempio:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = -2t - 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R};$$

in questo modo abbiamo trovato che un vettore direzione di r (tutti gli altri sono linearmente dipendenti é $\mathbf{v}$=$(-2, 1, -2)$, ossia $r \ \parallel \mathbb{L}\{(-2, 1, -2)\}$; imponendo ora la condizione di ortogonalitá della giacitura del piano con la giacitura della retta, otterremo: $< (x, y, z), (-2, 1, -2) >= 0 \implies 2x - y + 2z = 0$, che é l'equazione del piano passante per l'origine parallelo al piano cercato; tutti i piani paralleli ad esso avranno quindi un'equazione del tipo $2x - y + 2z + k = 0$; imponendo ora il passaggio del piano generico per il punto $P = (0, 2, 4)$, avremo: $-2 + 8 + k = 0 \implies k = -6$, perció il piano π avrá equazione cartesiana:

$$2x - y + 2z - 6 = 0.$$

♡

(4) Calcolare la distanza tra il punto $P \equiv (-2, 6, 3)$ e il punto Q di incidenza tra la retta r di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 5t + 1 \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

e il piano π di equazione cartesiana $x + y + 2z - 4 = 0$.

(4) Per calcolare le coordinate del punto Q, ci conviene scrivere le equazioni cartesiane di r e poi risolvere il sistema di tre equazioni lineari che rappresenta l'intersezione tra r e π. Le equazioni cartesiane di r si possono scrivere cosí :

$$\begin{cases} x = -2/3z \\ y = 1 + 5/3z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y - 5z - 3 = 0 \end{cases};$$

$r \cap \pi$ sará il luogo dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tali da verificare il sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y - 5z = 3 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases};$$

risolvendo il sistema con uno dei metodi conosciuti, otteniamo: $Q \equiv \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 1\right)$, per cui la distanza tra P e Q sará:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{38}}{3}.$$

♢

(5) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per i tre punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$: $A \equiv (1, 0, 2)$, $B \equiv (2, 1, 4)$, $C \equiv (0, -3, 0)$, e dire se contiene la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$$

(5) La giacitura del piano cercato é data da due qualsiasi tra i vettori che uniscono i punti A, B, C, ad esempio $\mathbf{v_1}=(B - A) = (1, 1, 2)$, e $\mathbf{v_2}=(C -$

$B) = (-2,-4,-4)$; imponendo poi il passaggio per uno qualsiasi dei punti, ad esempio C, avremo le equazioni parametriche di π:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = t - 2u \\ y = t - 4u - 3 \\ z = 2t - 4u \end{cases}, \ t,\ u \in \mathbb{R},$$

e con la solita formula, quella cartesiana:

$$\det \begin{pmatrix} x & y+3 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \ 2x - z = 0.$$

Poiché ogni punto della retta r si puó scrivere come $(t,0,2t) \in \mathbb{R}^3$, sostituendolo nell'equazione cartesiana trovata, abbiamo $0 = 0$, quindi l'equazione é sempre soddisfatta, da cui $r \subset \pi$.

♠

(6) Discutere le posizioni reciproche della retta

$$r: \begin{cases} x - 3y + z - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

e del piano $\pi_k: \ x + 2ky + 3k = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$; trovare esplicitamente l'intersezione nel caso $k = 0$.

(6) Per trovare l'intersezione $r \cap \pi_k$, dobbiamo discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + 2ky = -3k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Sapppiamo giá che il sistema ammetterá una ed una sola soluzione, ossia r e π_k saranno incidenti, se il determinante della matrice incompleta A_k del sistema sará non nullo:

$$\det(A_k) = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2k & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 + 2k \neq 0,$$

quindi $\forall\ k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\mathrm{rk}(A_k) = 3$, e di conseguenza $r \cap \pi_k$ consisterá in un solo punto. Fissato $k = 0$, troviamo il punto $P = r \cap \pi_0$:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3/2 \\ z = -7/2 \end{cases} \Longrightarrow P \equiv \left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right).$$

Se invece $k = -1$, avremo $\mathrm{rk}(A_k) = 2$ (comunque il minore 2×2 in alto a sinistra di A_k é non nullo); analizziamo peró il rango della matrice completa: poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0, \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 0, \det \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$

il sistema é compatibile e allora avremo ∞^1 soluzioni, quindi la retta r sará contenuta nel piano π_{-1}.

♣

(7) Scrivere l'equazione della retta r ortogonale al piano $\pi: \ 2x - y - z - 1 = 0$ e passante per il punto $P \equiv (0, 1, 3)$; successivamente, calcolare l'angolo tra la retta r e la retta s passante per il punto $Q = r \cap \pi$ e il punto $R \equiv (1, 1, 4)$.

(7) Il sottospazio vettoriale di dimensione 1 complemento ortogonale del sottospazio vettoriale $2x - y - z = 0$ é $\mathbb{L}\{(2, -1, -1)\}$, per cui la retta r richiesta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Possiamo ricavare le coordinate del punto di intersezione tra r e π sia portando r in equazioni cartesiane e poi risolvendo il sistema lineare come di consueto, sia sostituendo nell'equazione cartesiana del piano le coordinate parametrizzate di r: $2(2t) - (-t+1) - (-t+3) = 1 \Longrightarrow t = \frac{5}{6} \Longrightarrow Q \equiv \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{6}, \frac{13}{6}\right)$. Perció la retta s passante per Q e per R avrá vettore direzione $\mathbf{v}=(Q - R) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}\right)$, e allora avrá equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2t/3 + 1 \\ y = -5t/6 + 1 \\ z = -11t/6 + 4 \end{cases},$$

e l'angolo tra r ed s sará:

$$\theta = \arccos \left(\frac{< \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}\right), (2, -1, -1) >}{\| \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}\right) \| \cdot \| (2, -1, -1) \|} \right) = \arccos \left(\frac{4\sqrt{3}}{9} \right).$$

♡

(8) Discutere le posizioni reciproche delle rette di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$r_k : \begin{cases} x + 2ky - kz - 1 = 0 \\ 2x + z - k = 0 \end{cases}, \ s_k : \begin{cases} y - kz - 2 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases},$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

(8) In questo caso, dobbiamo discutere il sistema lineare di quattro equazioni in tre incognite al variare di k. La matrice incompleta A_k del sistema ha la forma:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & -k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$3 \geq \text{rk}(A_k) \geq 2 \ \ \forall\, k \in \mathbb{R}$, perché

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0;$$

notiamo peró che:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2k & -k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix} = 4k^2 - 2k - 1 = 0 \Longleftrightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4};$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2k & -k \\ 0 & 1 & -k \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -4k^2 + 3k = 0 \Longleftrightarrow k_{1,2} = 0, \frac{3}{4};$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2k & -k \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2k - 1 = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{1}{2};$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 - 2k = 0 \Longleftrightarrow k = -1.$$

Poiché tutti i minori di ordine 3 di A_k si annullano per valori sempre diversi di $k \in \mathbb{R}$, non esistono valori di k per cui si annullano tutti, e allora $\text{rk}(A_k) = 3 \ \ \forall\, k \in \mathbb{R}$. Ora consideriamo la matrice completa $(A_k|b)$:

$$\det(A_k|b) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2k & -k & 1 \\ 2 & 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & -k & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & -k & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\det \begin{pmatrix} 2k & -k & 1 \\ 1 & -k & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\det \begin{pmatrix} 2k & -k & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & -k & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -4k^3 + 15k^2 - 12k + 1 = (k-1)(-4k^2 + 11k - 1),$$

usando la regola di Ruffini o la divisione dei polinomi. Perció per

$$k \in \left\{ \frac{11-\sqrt{105}}{8}, 1, \frac{11+\sqrt{105}}{8} \right\},$$

$\mathrm{rk}(A_k|b) = 4$, e allora il sistema é incompatibile e le rette sono sghembe. Invece, per $k = \frac{11-\sqrt{105}}{8}$, 1, $\frac{11+\sqrt{105}}{8}$, $\mathrm{rk}(A_k|b) = 3 \Longrightarrow$ il sistema é compatibile ed ha $\infty^{3-3} = 1$ soluzione, cioé le rette r ed s sono incidenti. In particolare, esaminiamo il semplice caso $k = 1$ e troviamo il punto di incidenza P:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + z = 1 \\ y - z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Longrightarrow r \cap s = P \equiv (4, -5, -7).$$

♢

9.2 Esercizi proposti

(1) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del piano π di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di giacitura $W = \mathbb{L}\{(1, 2, 0),\ (0, 0, 5)\}$ e passante per il punto $P \equiv (2, 0, -1)$.

*

(2) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r ortogonale al piano $\pi :\ 5x - 4y + z - 3 = 0$, passante per $P \equiv (1, 1, -1)$.

*

(3) Calcolare l'ampiezza dell'angolo compreso tra le rette di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x - z + 5 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$$

*

(4) Calcolare la distanza tra il punto $A \equiv (3, 2, -3)$ e il punto di incidenza delle rette

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + 2y - z - 8 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

*

(5) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il piano $\pi_k: \ 4x - k^2y + kz + 3 = 0$ é ortogonale alla retta

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases} .$$

*

(6) Dire quali sono le posizioni reciproche delle rette

$$r: \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 4z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ed } s: \begin{cases} x = t/7 + 12/7 \\ y = t \\ z = -3t/7 + 6/7 \end{cases} .$$

*

(7) Discutere le posizioni reciproche delle rette

$$r: \begin{cases} x + 2ky - z - 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{ed } s: \begin{cases} x - kz - 3 = 0 \\ 2x - z - 4 = 0 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

*

(8) Calcolare l'angolo tra i piani π e π' di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, di equazioni cartesiane rispettivamente:

$$\begin{cases} \pi: \ 4x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi': \ 2x + 4y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

*

(9) Scrivere le equazioni cartesiane e parametriche del piano π di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ contenente la retta

$$r: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

e il punto $A \equiv (0, -1, 7)$.

$*$

(10) Discutere le posizioni reciproche della retta

$$r: \begin{cases} x = -t \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$$

e del piano $\pi: \; x + y - k = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$*$

(11) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r ortogonale alla retta s di equazioni:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases},$$

e passante per il punto $A \equiv (-1, 0, 0)$.

$*$

(12) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π la cui giacitura é l'immagine dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definita:

$$F(x, y, z) = (4x - z, 2y, 0)$$

e passante per il punto di intersezione $P = r \cap \pi'$, con

$$r: \begin{cases} x = -5t \\ y = t \\ z = t - 1 \end{cases}, \qquad \pi': \; x + 2y + z - 7 = 0.$$

Capitolo 10

Rotazioni in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

10.1 Esercizi svolti

(1) Date le due matrici di rotazione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

appartenenti al gruppo ortogonale speciale $SO(3)$, provare che per qualsiasi $\theta,\ \alpha \in [0, 2\pi)$, il loro prodotto, sia a destra che a sinistra, é ancora una matrice di $SO(3)$.

(1) La matrice A rappresenta una rotazione di un angolo θ attorno all'asse $x = x_1$ dello spazio tridimensionale, mentre B rappresenta una rotazione di un angolo α attorno all'asse $z = x_3$. Moltiplicare le due matrici significa comporre le rotazioni:

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \cos\theta\ \sin\alpha & \cos\theta\ \cos\alpha & -\sin\theta \\ \sin\theta\ \sin\alpha & \sin\theta\ \cos\alpha & \cos\theta \end{pmatrix};$$

il teorema di Binet afferma che $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = 1\cdot 1 = 1$. Inoltre AB é evidentemente una matrice unitaria, perché le sue colonne sono ortogonali, infatti:

$$< (\cos\alpha, \cos\theta\ \sin\alpha, \sin\theta\ \sin\alpha),\ (-\sin\alpha, \cos\theta\ \cos\alpha, \sin\theta\ \sin\alpha) >=$$

$$= -\sin\alpha\ \cos\alpha + \cos^2\theta\ \sin\alpha\ \cos\alpha + \sin^2\theta\ \sin\alpha\ \cos\alpha =$$

$$= -\sin\alpha\ \cos\alpha + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\sin\alpha\ \cos\alpha = 0;$$

$$< (\cos\alpha, \cos\theta\ \sin\alpha, \sin\theta\ \sin\alpha),\ (0, -\sin\theta, \cos\theta) >=$$

$$= \sin\theta\ \cos\theta\ \sin\alpha + \cos\theta\ \sin\theta\ \sin\alpha = 0;$$

$$< (-\sin\alpha, \cos\theta\ \cos\alpha, \sin\theta\ \cos\alpha),\ (0, -\sin\theta, \cos\theta) >=$$

$$= -\sin\theta\ \cos\theta\ \cos\alpha + \cos\theta\ \sin\theta\ \cos\alpha = 0.$$

Inoltre, si prova facilmente che ogni colonna di AB ha norma 1, ad esempio:

$$\| (\cos\alpha, \cos\theta\ \sin\alpha, \sin\theta\ \sin\alpha) \|= \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\theta\ \sin^2\alpha + \sin^2\theta\ \sin^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\sin^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1.$$

Quindi AB é una matrice unitaria con determinante uguale a 1, perció $AB \in SO(3)$. Il discorso é esattamente lo stesso per la matrice

$$BA = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\ \cos\theta & \sin\alpha\ \sin\theta \\ \sin\alpha & \cos\alpha\ \cos\theta & -\cos\alpha\ \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

E' da notare che $AB \neq BA$, quindi la posizione finale di un qualsiasi vettore a cui vengano applicate le due rotazioni sará differente a seconda dell'ordine in cui le rotazioni vengono eseguite.

$\spadesuit$

(2) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane dell'asse di rotazione della superficie in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0.$$

(2) In tutto questo capitolo, analogamente al precedente, useremo le coordinate (x, y, z) anziché (x_1, x_2, x_3). La superficie descritta é un cilindro a sezione circolare, infatti:

$$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \implies (x+1)^2 + y^2 = 4,$$

per cui le infinite circonferenze che troviamo sezionando questa superficie con dei piani ortogonali all'asse z di equazione $z = k,\ k \in \mathbb{R}$, hanno tutte raggio 2 e centro nei punti del tipo $(-1, 0, k) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. L'asse di rotazione del cilindro é la retta che contiene tutti i centri di queste circonferenze, e che quindi ha come equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R},$$

ed evidentemente equazioni cartesiane $x = -1, \quad y = 0$.

$\clubsuit$

(3) Data l'equazione della conica sul piano yz:

$$y^2 + z^2 = 9,$$

trovare l'equazione cartesiana della superficie individuata dalla rotazione di questa conica attorno all'asse z.

(3) Possiamo scrivere questa conica come $f(y,z) = 0$, con $f(y,z) = y^2 + z^2 - 9$; sappiamo che l'equazione cartesiana della superficie di rotazione corrispondente é data da:

$$f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \implies (\sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 - 9 = 0 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

cioé una sfera di centro $O \equiv (0,0,0)$ e di raggio 3. E' da notare che ogni volta che una circonferenza in un piano viene ruotata attorno ad un asse contenente un suo diametro otteniamo una sfera con raggio uguale a quello della circonferenza.

♡

(4) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$k^2x^2 + y^2 + (1-k)^2z^2 - 2k^2x + 6y + 8 + 2k = 0$$

rappresenta un ellissoide rotondo in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(4) Svolgiamo alcuni semplici passaggi algebrici:

$$k^2x^2 + y^2 + (1-k)^2z^2 - 2k^2x + 6y + 8 + 2k = k^2(x^2 - 2x + 1 - 1) + (y+3)^2 - 1 +$$

$$+ (1-k)^2z^2 + 2k = k^2(x-1)^2 + (y+3)^2 + (1-k)^2z^2 - k^2 + 2k - 1 =$$

$$= k^2(x-1)^2 + (y+3)^2 + (1-k)^2z^2 - (k-1)^2 = 0 \implies$$

$$\implies \frac{(x-1)^2}{\frac{(1-k)^2}{k^2}} + \frac{(y+3)^2}{(1-k)^2} + z^2 = 1;$$

affinché quest'ellissoide sia rotondo, due suoi semiassi devono essere uguali, quindi abbiamo tre possibilitá:

(I) $\qquad \dfrac{(1-k)^2}{k^2} = (1-k)^2 \implies k_{1,2} = \pm 1;$

con $k = 1$, peró, l'equazione diventa $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$, che é una quadrica degenere, per l'esattezza é il luogo di tutti i punti del tipo $(1, -3, t),\ t \in \mathbb{R}$, cioé una retta parallela all'asse z. Con $k = -1$, invece, l'equazione diventa

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{4} + z^2 = 1,$$

e qui i semiassi lungo x e lungo y sono uguali.
(II) $\quad (1-k)^2 = 1 \implies k_3 = 0,\ k_4 = 2$; se $k = 0$, l'equazione degenera in quella di un cilindro con asse parallelo all'asse x:

$$(y+3)^2 + z^2 = 1;$$

se invece $k = 2$, l'equazione assume la forma:

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + (y+3)^2 + z^2 = 1,$$

e stavolta i semiassi uguali sono quelli lungo y e z.
(III) $\quad \dfrac{(1-k)^2}{k^2} = 1 \implies 1 - 2k = 0 \implies k_5 = \dfrac{1}{2}$, e stavolta l'equazione ha la forma:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + (y+3)^2 + \frac{z^2}{4} = \frac{1}{4} \implies (x-1)^2 + \frac{(y+3)^2}{\frac{1}{4}} + z^2 = 1,$$

cioé i semiassi corrispondenti agli assi x e z sono uguali. Perció l'equazione di partenza definisce un ellissoide rotondo se $k_1 = -1,\ k_2 = \dfrac{1}{2},\ k_3 = 2.$

♢

(5) Trovare l'equazione cartesiana della superficie S generata dalla rotazione della conica $x^2 - 4z^2 = 2$ attorno all'asse x e successivamente trovare una traslazione $T_{\mathbf{v}}$ da applicare ad S affinché $T_{\mathbf{v}}(S)$ contenga l'origine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(5) La conica $x^2 - 4z^2 = 2$ é un'iperbole nel piano xz; scrivendo $f(x,z) = x^2 - 4z^2 - 2 = 0$, sappiamo che l'equazione della superficie di rotazione S attorno all'asse x sará data da:

$$f(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4(y^2+z^2) - 2 = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 1,$$

che é un iperboloide rotondo a due falde, che ha x come asse di rotazione. Per trovare una traslazione $T_{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x',y',z')$ che sposti l'iperboloide S in modo da farlo passare per O, ci basta effettuare il cambio di variabile: $x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c$, e poi scegliere degli opportuni $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. L'equazione di $T_{\mathbf{v}}(S)$ sará:

$$\frac{(x'-a)^2}{2} - \frac{(y'-b)^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(z'-c)^2}{\frac{1}{2}} = 1,$$

ed imponendo il passaggio per $(0,0,0)$ si dovrá verificare la relazione

$$\frac{a^2}{2} - 2b^2 - 2c^2 = 1;$$

ad esempio, potremmo scegliere $a = \sqrt{2}$, $b = 0$, $c = 0$, e in questo modo l'iperboloide traslato

$$\frac{(x' - \sqrt{2})^2}{2} - \frac{(y')^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(z')^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

passerá per l'origine degli assi di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

♠

(6) Dire quale conica é determinata dall'intersezione del cono C di equazione

$$x^2 + 4y^2 - z^2 + 2x + 1 = 0$$

con il piano π di equazione cartesiana $2kx + z - k = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(6) Le intersezioni del cono C con il piano π sono i punti (x, y, z) che soddisfano simultaneamente le equazioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - z^2 + 2x + 1 = 0 \\ 2kx + z - k = 0 \end{cases} ;$$

isolando ad esempio la variabile z e sostituendola nell'equazione del cono, si avrá:

$$z = k - 2kx \implies x^2 + 4y^2 - (k - 2kx)^2 + 2x + 1 = 0 \implies$$
$$\implies (1 - 4k^2)x^2 + 4y^2 + (2 + 4k^2)x - k^2 + 1 = 0;$$

ció che abbiamo ottenuto é un fascio di coniche nel piano cartesiano xy. Per analizzare queste curve abbiamo a disposizione due metodi: del primo, proveniente dall'Analisi, diamo soltanto un accenno: si puó esplicitare la variabile y in funzione di x, ed avremo due curve $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ che potremo studiare come normali funzioni di una variabile. Le informazioni che ricaveremo ci basteranno per capire di che conica si tratta (ad esempio, se esisteranno gli asintoti obliqui sará certamente un'iperbole, se si annullerá il coefficiente di x^2 sará una parabola, e cosí via). Il metodo geometrico é invece quello che consiste nell'analizzare il cosiddetto discriminante della conica, ossia quella matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ simmetrica tale che l'espressione $f(x, y) = 0$ si puó scrivere analogamente come il prodotto seguente:

$$(x \;\; y \;\; 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia, nel nostro caso:

$$(1 - 4k^2)x^2 + 4y^2 + (2 + 4k^2)x - k^2 + 1 = 0 \implies$$

$$\Longrightarrow (x \quad y \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1-4k^2 & 0 & 1+2k^2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1+2k^2 & 0 & -k^2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0;$$

ora, poiché la conica é degenere se il determinante del discriminante é nullo, siccome $\det(A) = 4[(1-4k^2)(1-k^2) - (1+2k^2)^2] = -9k^2 = 0 \Longleftrightarrow k = 0$, avremo una conica degenere solo in questo caso, nel quale l'equazione si riduce a $(x+1)^2 + 4y^2 = 0$, cioé al solo punto $(-1, 0)$. Se $k \neq 0$, la conica non degenera. Ora, consideriamo il minore 2×2 in alto a sinistra della matrice A: se é negativo, la conica é un'iperbole; se é 0 e la conica é non degenere, allora é una parabola; altrimenti é un'ellisse. Nel nostro caso, abbiamo:

$$\det \begin{pmatrix} 1-4k^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4(1-4k^2) < 0 \Longleftrightarrow k \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ la conica é un'iperbole.
Il minore suddetto si annulla per $k = \pm\frac{1}{2} \Longrightarrow$ é una parabola.
Infine, se $k \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow$ é un'ellisse.

♣

10.2 Esercizi proposti

(1) Trovare l'asse di rotazione della superficie di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 8x - 4y + 19 = 0,$$

specificando di che superficie si tratta.

*

(2) Dire che superficie é rappresentata dall'equazione

$$x^2 + y^2 + kz^2 + 2y + 1 = 0$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

*

(3) Scrivere l'equazione della superficie generata dalla rotazione della conica

$$x^2 - y^2 = 4$$

attorno all'asse y, specificando di che superficie si tratta.

$*$

(4) Dire quale superficie é generata dalla rotazione attorno all'asse x della conica

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

e scriverne l'equazione cartesiana.

$*$

(5) Dato il cono C di equazione cartesiana

$$x^2 + 4y^2 - 9z^2 - 8x - 8y + 20 = 0,$$

dire quale conica é determinata dall'intersezione di C con il piano π di giacitura $\mathbb{L}\{(-2,1,0),\ (1,0,1)\}$ e passante per il punto $P \equiv (1,0,0)$.

$*$

(6) Data la superficie S generata dalla rotazione della conica

$$x^2 - y - 1 = 0$$

attorno all'asse y, trovare una traslazione $T_{\mathbf{v}}$ tale che $T_{\mathbf{v}}(S)$ passi per l'origine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Specificare inoltre che superficie é S.

$*$

(7) Dato il cilindro circolare retto C di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0,$$

trovare una traslazione $T_{\mathbf{v}}$ tale che l'asse z sia contenuto in $T_{\mathbf{v}}(C)$.

$*$

(8) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la sfera di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 - k^2 = 0$$

ha un solo punto in comune, detto P, col piano $\pi:\ x + y - 2 = 0$; trovare le coordinate in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di P e la distanza tra P e $Q \equiv (1,2,-1)$.

$*$

(9) Discutere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la conica intersezione tra il cono

$$x^2 + 9y^2 = 4z^2$$

e il piano di equazione cartesiana $x + kz - 3 = 0$.

Capitolo 11

Forme quadratiche e superfici

11.1 Esercizi svolti

(1) Data la forma quadratica $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ cosí definita:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2,$$

dire se é definita positiva e successivamente ridurla a forma canonica.

(1) Scriviamo la matrice di questa forma quadratica rispetto alla base canonica:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

sappiamo che una forma quadratica é definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori (tutti reali perché A é simmetrica) sono strettamente positivi, o alternativamente, se sono positivi tutti i suoi minori principali (criterio di Hurwitz):

$$2 > 0, \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 5 > 0, \qquad \det(A) = 12 > 0,$$

quindi A é definita positiva, ed f é definita positiva. Per ridurre f alla sua forma canonica, dobbiamo applicare un metodo di raccoglimento algebrico, il

cosiddetto completamento dei quadrati:
cominciamo con i termini che comprendono la variabile x_1: poiché

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = \left(\sqrt{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2 + \frac{5}{2}x_2^2,$$

se poniamo $y_1 = \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}/2x_2$, abbiamo:

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2;$$

ora facciamo la stessa cosa con i termini contenenti x_2:

$$\frac{5}{2}x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}x_2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}x_3\right)^2 + \frac{12}{5}x_3^2;$$

quindi otteniamo

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

dopo aver posto:

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{2}(x_1 - x_2/2) \\ y_2 = \sqrt{2}(x_2/2 - 2x_3/5) \\ y_3 = 2\sqrt{15}x_3/5 \end{cases}.$$

Piú avanti vedremo in dettaglio come anche questo é un modo per dedurre che f é definita positiva.

♡

(2) Data su $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica, dipendente da $k \in \mathbb{R}$, cosí definita:

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = -3kx_1^2 - 4x_2^2 + 2\sqrt{2}x_2x_3 - 3(k-1)x_3^2,$$

dire per quali $k \in \mathbb{R}$ f_k é definita negativa.

(2) Affinché f_k sia definita negativa, é necessario e sufficiente che tutti gli autovalori della matrice associata A_k siano strettamente minori di 0. Scriviamo:

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} -3k & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3-3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$p_{A_k}(\lambda) = \det(A_k - \lambda I_3) = (-3k - \lambda)(\lambda^2 + (7+3k)\lambda + 12k - 14),$$

quindi un autovalore é certamente $\lambda_1 = -3k$, ed é negativo $\forall\ k \in (0, +\infty)$; per quanto riguarda il segno degli altri due autovalori, possiamo evitare di calcolarli sfruttando la **regola di Cartesio**: se ci interessa sapere il segno delle radici di un dato polinomio di secondo o di terzo grado, ammesso che siano tutte reali,

cosa sicura nel caso dei polinomi caratteristici di matrici simmetriche, delle informazioni certe al riguardo ci provengono dai segni dei coefficienti dei termini del polinomio. Nel generico polinomio di terzo grado $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, in cui $a_j \neq 0 \ \forall \ j = 0, 1, 2, 3$, ci sono tante radici negative quante sono le coppie di coefficienti consecutivi, $(a_j, \ a_{j-1})$, che hanno lo stesso segno, e ci sono tante radici positive quante sono le coppie di coefficienti consecutivi di segno discorde (il criterio é analogo per i polinomi di grado 2). Nel nostro caso, quindi, essendo il coefficiente di λ^2 positivo, avremo una radice negativa se il successivo coefficiente sará anch'esso positivo:
$7 + 3k > 0 \implies k > -\frac{7}{3}$, ed un'altra negativa se:
$12k - 14 > 0 \implies k > \frac{7}{6}$.
Quindi, unendo gli intervalli, avremo tre autovalori negativi, e quindi f_k definita negativa, se $k \in \left(\frac{7}{6}, \infty\right)$.

$\diamondsuit$

(3) Fissato un qualsiasi vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, e l'applicazione lineare dipendente da $k \in \mathbb{R}$:

$$F_{\mathbf{w}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ \text{ cosí definita: } \ F_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + k\mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

dire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$Q(\mathbf{v}) := < F_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}), \mathbf{v} > \quad \forall \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

é una forma quadratica definita positiva in $\mathbb{R}^3$.

(3) Ricordando la proprietá del prodotto vettoriale (usiamo questa volta la notazione fisica con i versori $\hat{\imath}, \ \hat{\jmath}, \ \hat{k}$):

$$< \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{v} > = \left\langle \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}, \ (v_1, v_2, v_3) \right\rangle =$$

$$= < (v_2w_3 - w_2v_3, w_1v_3 - v_1w_3, v_1w_2 - w_1v_2), \ (v_1, v - 2, v_3) > =$$

$$= v_1v_2w_3 - v_1v_3w_2 + v_2v_3w_1 - v_1v_2w_3 + v_1v_3w_2 - v_2v_3w_1 = 0,$$

possiamo facilmente vedere che $\forall \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, si ha:

$$Q(\mathbf{v}) = < F_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}), \mathbf{v} > = < \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{v} > + < k\mathbf{v}, \mathbf{v} > = k < \mathbf{v}, \mathbf{v} >;$$

giá sappiamo che il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ é una forma bilineare simmetrica definita positiva, e siccome possiamo scrivere $Q(\mathbf{v})$ in questo modo:

$$Q(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

$Q(\mathbf{v})$ é definita positiva $\forall\ k > 0$, essendo un multiplo del prodotto scalare euclideo standard su $\mathbb{R}^3$. Si puó anche provare che $\forall\ k \in (0, +\infty)$, l'applicazione che associa ad ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ il valore $(< F_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}), \mathbf{v} >)^{1/2}$ é una norma in $\mathbb{R}^3$.

♠

(4) Ridurre a forma canonica la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ data da:

$$F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 +$$

$$+2x_2x_3 + 2x_1x_3 + x_3^2 + 4x_3x_4 + x_4^2.$$

(4) Applichiamo il completamento dei quadrati variabile per variabile, cominciando con l'accorpare tutti i termini con x_1; poiché

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 6x_2x_3,$$

ponendo $y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$, la forma quadratica diventa:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + 6x_2x_3 + 4x_3x_4 + x_4^2;$$

ora, non ci sono rimasti termini quadratici ne' con x_2, ne' con x_3, quindi ci é conveniente andare a raccogliere i termini con x_4:

$$x_4^2 + 4x_3x_4 = (x_4 + 2x_3)^2 - 4x_3^2,$$

da cui, ponendo $y_2 = 2x_3 + x_4$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 - 4x_3^2 + 6x_2x_3;$$

ora, poiché

$$-4x_3^2 + 6x_2x_3 = -\left(2x_3 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{9}{4}x_2^2,$$

allora ponendo $y_3 = \frac{3}{2}x_2,\ y_4 = 2x_3 - \frac{3}{2}x_2$, si avrá la forma canonica

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^3 - y_4^2$$

nelle nuove variabili

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_3 + x_4 \\ y_3 = 3x_2/2 \\ y_4 = -3x_2/2 + 2x_3 \end{cases}.$$

♣

(5) Data la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$F_k(x_1, x_2, x_3) = kx_1^2 + (k+1)x_2^2 + 4x_2x_3 + (k-1)x_3^2$$

associata alla matrice A_k, dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la forma quadratica associata alla matrice $(A_k)^2 - A_{k^2}$ é semidefinita positiva, e per $k = 0$, ridurre la forma quadratica associata alla matrice $(A_0)^2 - A_0$ a forma canonica.

(5) La matrice A_k relativa alla relativa alla forma quadratica F_k é:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 2 \\ 0 & 2 & k-1 \end{pmatrix};$$

$$(A_k)^2 = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2+2k+5 & 4k \\ 0 & 4k & k^2-2k+5 \end{pmatrix}; \; A_{k^2} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2+1 & 2 \\ 0 & 2 & k^2-1 \end{pmatrix};$$

di conseguenza

$$(A_k)^2 - A_{k^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+4 & 4k-2 \\ 0 & 4k-2 & -2k+6 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che $\det((A_k)^2 - A_{k^2}) = 0 \implies 0$ é un autovalore di questa matrice, la cui forma quadratica associata non potrá quindi essere né definita positiva né negativa. Per discutere il segno degli altri due autovalori, consideriamo il polinomio caratteristico della sottomatrice 2×2 sud-est:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + (2k+4)(-2k+6) - (4k-2)^2;$$

la prima coppia di coefficienti consecutivi é $(1, -10)$, e quindi la regola di Cartesio ci assicura la presenza di un autovalore sempre positivo; la seconda coppia é invece $(-10, -20k^2 + 20k + 20)$, che corrisponde ad un autovalore positivo se

$$-20k^2 + 20k + 20 > 0 \implies k^2 - k - 1 < 0 \implies k \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

Quindi la matrice $(A_k)^2 - A_{k^2}$ é associata ad una forma quadratica semidefinita positiva se $k \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$. In particolare, se $k \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$, ha due autovalori positivi ed uno nullo; se $k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ha un autovalore positivo ed uno nullo (di molteplicitá algebrica 2).
Per $k = 0$, la matrice assume la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

e la sua forma quadratica associata é

$$g(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 6x_3^2.$$

Per ridurla a forma canonica, notiamo che:

$$4x_2^2 - 4x_2x_3 = (2x_2 - x_3)^2 - x_3^2,$$

e quindi ponendo

$$\begin{cases} y_1 = 2x_2 - 2x_3 \\ y_2 = \sqrt{5}x_3 \end{cases},$$

la forma canonica di g sará:

$$g(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2.$$

♡

(6) Calcolare gli indici di positivitá, di negativitá e di nullitá della forma bilineare simmetrica b relativa alla matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

e ridurre a forma canonica la forma quadratica associata su $\mathbb{R}^4$.

(6) Gli indici di positivitá, negativitá e nullitá di una matrice simmetrica A, o della sua forma bilineare simmetrica, corrispondono rispettivamente alle somme delle molteplicitá algebriche degli autovalori positivi, a quelle degli autovalori negativi e alla molteplicitá algebrica dell'autovalore 0 (che compare solo quando $\det(A) = 0$). Anche nell'impossibilitá di calcolare esplicitamente gli autovalori (in particolare quando il polinomio caratteristico ha grado superiore al terzo le difficoltá possono diventare insormontabili) abbiamo a disposizione diversi strumenti per individuarne il segno. Comunque analizziamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (\lambda)[-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 17\lambda - 48];$$

un autovalore é $\lambda_1 = 0$, mentre analizzando le coppie di coefficienti consecutivi del polinomio di terzo grado, notiamo che $(-1, 5)$ indica la presenza di un autovalore positivo, $(5, 17)$ di un autovalore negativo, e $(17, -48)$ di un altro positivo. Quindi l'indice di positivitá di f é 2, l'indice di negativitá é 1, l'indice di nullitá é 0. Per il teorema di Sylvester, la matrice A sará dunque congruente alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alla stessa conclusione si poteva peró giungere riducendo a forma canonica la forma quadratica associata ad A, e cioé:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 - 3x_4^2.$$

Infatti, usando il metodo del completamento dei quadrati avremo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big(2x_1 + x_3 - \frac{x_4}{2}\Big)^2 + 3x_3^2 - \frac{13}{4}x_4^2 - 3x_3x_4 =$$

$$= \Big(2x_1 + x_3 - \frac{x_4}{2}\Big)^2 + \left(\sqrt{3}x_3 - \frac{\sqrt{3}x_4}{2}\right)^2 - 4x_4^2,$$

perció ponendo:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_3 - x_4/2 \\ y_2 = \sqrt{3}x_3 - \sqrt{3}x_4/2 \\ y_3 = 2x_4 \end{cases},$$

la forma canonica risulterá:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

(7) Studiare la superficie quadrica in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, la cui equazione rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ é:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 - 4 = 0.$$

(7) Premesso che nell'analisi delle quadriche si usano alternativamente le coordinate (x_1, x_2, x_3) o le piú suggestive (x, y, z), cominciamo individuando la matrice A^* associata alla quadrica Q:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3\ 1) \cdot A^* \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1\ x_2\ x_3\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Chiamiamo invece A la matrice della corrispondente forma quadratica, coincidente con la sottomatrice 3×3 nord-ovest di A^*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Poiche' $\det(A) = 0$, e $\det(A^*) = 0$, con $\mathrm{rk}(A) = 2$, $\mathrm{rk}(A) = 3$, siamo in presenza di una quadrica degenere. Ora, cerchiamo autovalori ed autovettori di A:

$$p_A(\lambda) = (9-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda] = \lambda(9-\lambda)(\lambda-2),$$

quindi A é semidefinita positiva; i suoi autospazi sono dunque:

$$V_9 = \mathbb{L}\{(0,0,1)\}, \quad V_2 = \mathbb{L}\{(1,1,0)\}, \quad V_0 = \mathbb{L}\{(1,-1,0)\};$$

perció una base ortonormale di autovettori per A é:

$$\mathbb{B}' = \left\{(0,0,1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\}.$$

La matrice del cambiamento di base sará dunque:

$$M_E^{\mathbb{B}'}(\mathrm{Id}) = U = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perció possiamo scrivere la quadrica Q rispetto alla nuova base $\mathbb{B}'$, con delle nuove variabili, ad esempio $y_1,\ y_2,\ y_3$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =^t U \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2}y_2/2 + \sqrt{2}y_3/2 \\ x_2 = \sqrt{2}y_2/2 - \sqrt{2}y_3/2 \\ x_3 = y_1 \end{cases} \Longrightarrow Q(y_1, y_2, y_3) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_3\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2\right) + 9y_1^2 - 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 + 2y_2^2 - 4 = 0.$$

La quadrica Q é evidentemente un cilindro ellittico, di equazione:

$$\left(\frac{y_1}{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

In questo caso, lo studio della quadrica é particolarmente semplice perché non ci sono termini lineari, e perché per la riduzione a forma canonica non abbiamo avuto bisogno di fare traslazioni. Il cilindro ellittico é una quadrica degenere non a centro con un unico asse di simmetria, parallelo all'autovettore di A relativo all'autovalore nullo, e passante per l'origine O' del sistema di riferimento rispetto al quale abbiamo scritto la quadrica in forma canonica. Nel nostro caso, O' coincide con l'origine del sistema di riferimento iniziale O, in quanto per passare dall'uno all'altro abbiamo applicato solo una rotazione e nessuna traslazione. Quindi l'asse di simmetria di Q ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 0 \end{cases} .$$

Per quanto riguarda i piani di simmetria, sappiamo dalla teoria che nel caso del cilindro ellittico (ed anche di quello iperbolico), ogni piano passante per O ortogonale ad un qualsiasi autovettore di A ed ogni piano ortogonale all'autovettore relativo all'autovalore nullo sono piani di simmetria per Q.

♠

(8) Studiare la quadrica di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ individuata dall'equazione:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 6x_1 + 2x_2 = 0.$$

(8) Le matrici A ed A^* sono rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\det(A) = 60 \neq 0$; $\det(A^*) = -128 \neq 0$, per cui la quadrica Q é non-degenere e centrale. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6$. Perció A é definita positiva, e poiché $\det(A^*) < 0$, possiamo giá concludere che la quadrica Q é un ellissoide reale. Proseguendo comunque la nostra analisi, gli autospazi relativi ai tre autovalori sono

$$V_5 = \mathbb{L}\{(1,0,0)\};\ V_2 = \mathbb{L}\{(0,1,-1)\};\ V_6 = \{(0,1,1)\};$$

quindi una base ortonormale di autovettori per A é:

$$\mathbb{B}' = \left\{(1,0,0),\ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\};$$

la matrice di cambiamento di base relativa sará:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

e fissate le nuove coordinate $y_1,\ y_2,\ y_3$ rispetto alla base $\mathbb{B}'$, si avrá:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \sqrt{2}/2(y_2 + y_3) \\ x_3 = \sqrt{2}/2(-y_2 + y_3) \end{cases} ;$$

sostituendo il tutto nell'espressione originale della quadrica, risulterá modificata anche la parte lineare:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 + 2y_2^2 + 6y_3^2 + 6y_1 + \sqrt{2}y_2 + \sqrt{2}y_3.$$

Ora completiamo i quadrati variabile per variabile; poiché

$$5y_1^2 + 6y_1 = 5\left(y_1 + \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{25}, \quad 2y_2^2 + \sqrt{2}y_2 = 2\left(y_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{8},$$

$$6y_3^2 + \sqrt{2}y_3 = 6\left(y_3 + \frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 - \frac{1}{72},$$

ponendo:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 3/5 \\ z_2 = y_2 + \sqrt{2}/4 \\ z_3 = y_3 + \sqrt{2}/12 \end{cases} ,$$

l'equazione dell'ellissoide nelle nuove variabili $z_1,\ z_2,\ z_3$ diventa:

$$Q(z_1, z_2, z_3) = 5z_1^2 + 2z_2^2 + 6z_3^2 - \frac{449}{900} = 0,$$

ossia:

$$\left(\frac{z_1}{\frac{\sqrt{2245}}{150}}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{\frac{\sqrt{898}}{60}}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{\frac{\sqrt{2694}}{180}}\right)^2 = 1.$$

Concludiamo l'analisi di Q individuando l'origine O' del sistema di riferimento in cui abbiamo traslato la quadrica, e a questo scopo moltiplichiamo a sinistra la matrice di cambiamento di base per il vettore di traslazione:

$$\begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{pmatrix} \equiv U \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

ed evidenziando che gli assi di simmetria dell'ellissoide saranno le tre rette passanti per O' e parallele agli autovettori di A, cioé:

$$\begin{cases} x = t - 3/5 \\ y = -1/3 \\ z = 1/6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -3/5 \\ y = t - 1/3 \\ z = -t + 1/6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -3/5 \\ y = t - 1/3 \\ z = t + 1/6 \end{cases}.$$

Invece i piani di simmetria saranno tutti i piani passanti per O' ed ortogonali agli autovettori di A.

♣

(9) Studiare la superficie quadrica di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di equazione:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 - 2x_3 + 8 = 0.$$

Esaminiamo innanzitutto le matrici A ed A^*:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che $\det(A) = 0$, ma $\det(A^*) = -2 \neq 0$, quindi Q é una quadrica non-degenere e non centrale. Gli autovalori di A, facilmente calcolabili, sono: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 0$. I rispettivi autospazi sono:

$$V_2 = \mathbb{L}\{(0, 0, 1)\}; \quad V_5 = \mathbb{L}\{(2, 1, 0)\}; \quad V_0 = \mathbb{L}\{(1, -2, -0)\},$$

per cui una base ortonormale di autovettori per A é:

$$\mathbb{B}' = \left\{ (0, 0, 1),\ \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right),\ \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0 \right) \right\}.$$

La matrice di cambiamento di base e la sua trasposta sono rispettivamente:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \\ 0 & \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 & 0 \\ \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cambiamo le coordinate come al solito per scrivere la quadrica rispetto alla base $\mathbb{B}'$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = \sqrt{5}/5(2y_2 + y_3) \\ x_2 = \sqrt{5}/5(y_2 - 2y_3) \\ x_3 = y_1 \end{cases},$$

per cui la forma quadratica diventa:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 5y_2^2 - 2y_1 + \frac{4\sqrt{5}}{5}y_2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}y_3 + 8 = 0.$$

Completando poi i quadrati, si ha:

$$Q(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 + 5z_2^2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}z_3 + \frac{367}{50} = 0,$$

avendo posto:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - 1/2 \\ z_2 = y_2 - 2\sqrt{5}/25 \\ z_3 = y_3 \end{cases} .$$

Infine, applichiamo un'ulteriore traslazione per fare passare Q per l'origine; ponendo:

$$\begin{cases} t_1 = z_1 \\ t_2 = z_2 \\ t_3 = z_3 + \dfrac{367\sqrt{5}}{100} \end{cases} ,$$

si ha la forma canonica:

$$Q(t_1, t_2, t_3) = 2t_1^2 + 5t_2^2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}t_3 = 0.$$

Q é dunque un paraboloide ellittico, contenuto nel semispazio $\{t_3 \leq 0\}$. Le coordinate di O', origine del sistema di riferimento canonico, sono date da:

$$\begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2\sqrt{5}/5 \\ 367\sqrt{5}/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 447/100 \\ -347/50 \\ 1/2 \end{pmatrix};$$

l'unico asse di simmetria sará la retta passante per O' e parallela all'autovettore che genera V_0, cioé $(1, -2, 0)$, in equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t + 447/100 \\ y = -2t - 347/50 \\ z = 1/2 \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}.$$

I due piani di simmetria per Q invece passeranno per O' e saranno ortogonali agli altri due autovettori, quindi avranno equazioni cartesiane rispettivamente:

$$z = \frac{1}{2} \text{ e } 2x + y - 2 = 0.$$

♡

11.2 Esercizi proposti

(1) Data la forma quadratica $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cosí definita:

$$f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 18x_1x_2 - 11x_2^2,$$

trovarne la forma canonica.

$*$

(2) Data la forma quadratica $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ cosí definita:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 10x_3x_4 + 6x_4^2,$$

dire se é definita positiva e ridurla a forma canonica.

$*$

(3) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la forma quadratica associata alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 1 \\ 0 & 2k-2 & -1 \\ 1 & -1 & -k \end{pmatrix}$$

é semidefinita positiva.

$*$

(4) Calcolare gli indici di positivitá, di negativitá e di nullitá della forma bilineare simmetrica relativa alla matrice di $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

e scrivere la forma canonica della forma quadratica f corrispondente.

$*$

(5) Calcolare gli indici di positivitá, di negativitá e di nullitá della forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ associata alla forma quadratica

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_4^2$$

e scriverne la forma canonica.

*

(6) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ cosí definita:

$$b((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = \left\langle (x_1, x_2, x_3), \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)^t \right\rangle$$

é una forma bilineare simmetrica semidefinita negativa su $\mathbb{R}^3$.

*

(7) Dire quale superficie quadrica in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ é definita dall'equazione

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 4x_2^2 - 7x_1x_2 - x_1x_3 + 11x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 10 = 0.$$

*

(8) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la superficie quadrica di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = kx_1^2 + x_2^2 + (k-1)x_3^2 + 2x_1 + 1 = 0.$$

*

(9) Studiare la quadrica di equazione:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 8x_1 + 6x_2 + 3 = 0$$

e trovarne eventuali piani di simmetria.

*

(10) Studiare la quadrica di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di equazione:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0.$$

*

(11) Studiare la quadrica di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di equazione

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 -$$

$$-4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3 - 12x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0.$$

Capitolo 12

Soluzioni degli esercizi proposti

0. Preliminari

(1) f é iniettiva, ma non suriettiva, perché l'immagine é costituita solo dagli interi dispari, e di conseguenza non é nemmeno biettiva.

(2) In $\mathbb{Z}_{13}$, 1+12=2+11=3+10=4+9=5+8=6+7=13=0;
$2 \cdot 7 = 13 + 1 = 1$; $3 \cdot 9 = 2 \cdot 13 + 1 = 1$; $4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 3 \cdot 13 + 1 = 1$; $6 \cdot 11 = 5 \cdot 13 + 1 = 1$; $12 \cdot 12 = 11 \cdot 13 + 1 = 1$.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{d}{ac} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/22 & -1/11 \\ 1/22 & 2/11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};$$

(5) $1 \cdot 1 = 1$; $(-1) \cdot (-1) = 1$; $i \cdot (-i) = 1$.

1. Vettori liberi

(1) Lato del triangolo: $AB = 8$.

(2) Volume del parallelepipedo $= 15\sqrt{2}$.

(3) Segue immediatamente dalla relazione dell'esercizio 4.

(4) Segue facilmente dall'identitá di Jacobi e dalla relazione dell'esercizio 4.

(5)

$$|<\mathbf{v},\mathbf{w}>| = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cdot|\cos\theta| = |\cos\theta|;\ \ |\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}| = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cdot|\sin\theta| = |\sin\theta|;$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \ \ \forall\ \theta \in [0, 2\pi).$$

2. Spazi vettoriali

(1) Sí , é una base.

(2) No, non é una base; un possibile completamento é

$$\{(4,0,1),\ (-1,0,1),\ (0,1,0)\}$$

.

(3) Non sono linearmente indipendenti; una base é $\{p_1(x),\ p_2(x),\ 1\}$.

(4) $\dim(W) = 3$.

(5) L'insieme é una base $\forall\ k \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

(6) Equazioni parametriche di S:

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3u \\ x_3 = t \\ x_4 = 5u \end{cases} ;$$

equazioni cartesiane di S:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ 5x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases} .$$

(7) $\dim(W) = 2$; equazioni parametriche di W:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 3u \\ x_3 = 2t - 2u \\ x_4 = t + 2u \\ x_5 = 0 \end{cases} ;$$

equazioni cartesiane di W:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}.$$

(8) $\dim(W) = 3$; equazioni parametriche di W:

$$\begin{cases} x_1 = t - u \\ x_2 = v \\ x_3 = 2t + 3u \\ x_4 = -t \end{cases}.$$

(9) $V_k \cap W_k = (0) \ \ \forall\, k \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{-1+8i}{13}, 0 \right\}$.

3. Applicazioni lineari e matrici

(1) $\ker(F) = \mathbb{L}\{(1,0,0)\}$, $\operatorname{Im}(F) = \mathbb{L}\{(1,-3,0),\ (2,-2,-1)\}$.

(2)

$$\ker(F) = \mathbb{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\operatorname{Im}(F) = \mathbb{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3)

$$\ker(F) = \mathbb{L}\{(0,0,0,1,0)\};$$

$$\operatorname{Im}(F) = \mathbb{L}\{(1,0,0,0),\ (2,0,0,1),\ (0,1,0,3),\ (0,-4,3,0)\}.$$

(4) (a) F_k é ben definita $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -2, \dfrac{1}{2} \right\}$;
(b) $\ker(F_0^2) = (0)$; $\operatorname{Im}(F_0^2) = \mathbb{R}^3$.

(6) $\ker(F) = \mathbb{L}\{x\}$; $\operatorname{Im}(F) = \mathbb{L}\{x+1,\ 1\}$.

(7) $\ker(G \circ F) = \{(0,0)\}$; $\operatorname{Im}(G \circ F) = \mathbb{L}\{(0,0,2,3),\ (0,0,-2,-1)\}$.

(8) (a) $\det(A_k) \neq 0 \ \forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-5-\sqrt{265}}{6}, \dfrac{-5+\sqrt{265}}{6} \right\}$;

(b)

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{3}, \frac{x_1}{6} - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{4}, \frac{2x_1}{3} - x_2 \right).$$

(9) $\ker(G \circ F^{-1}) = \{(0,0)\}$; $\mathrm{Im}(G \circ F^{-1}) = \mathbb{L}\{(0,13,1),\ (0,-1,3)\}$.

4. Determinanti e sistemi lineari

(1) $\det(A) = 0$.

(2) $\det(A) = -12$.

(3) La matrice A é invertibile, e la sua inversa é:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & -1/21 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 2/7 & -3/7 & -2/21 \end{pmatrix}.$$

(4) Per $k_{1,2} = \pm \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

(5) $k = 0 \implies \mathrm{rk}(A) = 1$; $k \neq 0 \implies \mathrm{rk}(A) = 2$.

(6) $\det(A) = 22$.

(7) $\det(A^3 B^3) = 0$.

(8)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 1/7 \\ 11/7 \end{pmatrix}.$$

(9) Le soluzioni del sistema lineare sono ∞^1:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ (3-t)/2 \\ 1-2t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

(10) Il sistema non é compatibile.

(11) Se $k = 0$ oppure $k = -\dfrac{1}{2}$, ci sono ∞^1 soluzioni, se $k = 0$, o $k = \dfrac{1}{2}$, c'é una sola soluzione. Per $k = 0$, si ha:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(12) L'unica soluzione del sistema é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Autovalori ed autovettori

(1) $\lambda_1 = -3, \ m_a(-3) = 2$;
$V_{-3} = \{(1, -1)\}$; F non é diagonalizzabile.

(2) $\sigma(F) = \{-5, -1, 4\}$;
$V_{-5} = \mathbb{L}\{(1, 0, -2)\}; \quad V_{-1} = \mathbb{L}\{(1, 0, 2)\}; \quad V_4 = \mathbb{L}\{(46, 45, 52)\}$.

(3) $\sigma(F) = \{-4, 1, 3\}$;
$V_{-4} = \mathbb{L}\{(5, -7, 0, 0)\}; \quad V_1 = \mathbb{L}\{(-5, 2, -10, 10)\}; \quad V_3 = \mathbb{L}\{(1, 0, 0, 0)\}$;
F non é diagonalizzabile.

(4) F_k é diagonalizzabile se $k \in \mathbb{C} - \left\{2 + 2\sqrt{2}i, \ 2 - 2\sqrt{2}i, \ \dfrac{4 + 30i}{13}\right\}$.

(5) $P(\lambda) = (-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 1)$; F non é diagonalizzabile.

(6) Per $\theta = 0, \ \lambda_1 = 1, \ m_a(1) = 2$; per $\theta = \pi, \ \lambda_1 = -1, \ m_a(-1) = 2$; per tutti gli altri valori di $\theta \in [0, 2\pi)$ non ci sono autovalori reali.

(7) $(A - B)^2 = A^2 - BA - AB + B^2 = A^2 - (BA + AB) + B^2 = A^2 + B^2$. $\quad A\,\mathbf{w} = \lambda\,\mathbf{w}, \ B^2\ \mathbf{w} = \mu\,\mathbf{w}$;
$(A^2 + B^2)\mathbf{w} = A(A\,\mathbf{w}) + B^2\ \mathbf{w} = \lambda A\,\mathbf{w} + \mu\,\mathbf{w} = (\lambda^2 + \mu)\mathbf{w}$.

(8) $\sigma(T) = (0), \ m_a(0) = 4, \ m_g(0) = 1$, quindi T non é diagonalizzabile.

(9) $\sigma(F \circ G) = (0),\ m_a(0) = 3,\ V_0 = \mathbb{L}\{(-1,1,0),\ (-1,0,1)\}$, quindi $F \circ G$ non é diagonalizzabile.

(10) La relazione richiesta, valida per qualsiasi a, b, c reali, é $a = \pm(bc - 1)$.

(11) $a = -2,\ b = 0;\ \sigma(A) = \{-1, 1\}$.

(12) La relazione di inclusione vale $\forall\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

6. Prodotti scalari

(1) L'ortogonalitá vale per $k = -1$.

(2) 0.

(3) Per $a = -\dfrac{3}{2}$.

(4) $(\ker(F))^\perp$ ha equazioni parametriche e cartesiane rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = u \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad ;$$

$(\mathrm{Im}(F))^\perp$ ha equazioni parametriche e cartesiane rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad .$$

(5) Per nessun $k \in [2,\ +\infty)$.

(6) $(-1, 4, -1)$.

(7)
$$\mathrm{Im}(F) \cap (\ker(F))^\perp = \mathbb{L}\{(1,0,0,0),\ (0,0,0,1)\}.$$

(8) $< (A + A^t)(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}),\ \mathbf{v} >=< \mathbf{v} \wedge \mathbf{w},\ (A + A^t)\mathbf{v} >=\lambda < \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{v} >=0$.

(9) Le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio sono rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1 = 4t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = -4t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad .$$

(10) Il prodotto scalare é degenere per $k = \pm 1$.

(11)

$$\mathbb{B}' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \ (0,0,1) \right\}.$$

(12)

$$\mathbb{B}' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{30}}{15}, 0, \frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right), \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, -\frac{6}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right), (0,-1,0,0) \right\}.$$

7. Operatori lineari

(1) $\mathbb{B} = \left\{ (1,0,0), \ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$

(2) L'operatore é simmetrico solo per $k = -2$.

(3) $\mathbb{B} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}.$

(4) $\mathbb{B} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right), \ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right), \right.$
$\left. \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \ \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$

(5) $A = A^t$; $AA^t = A^2 = I \Longrightarrow A^2 - I = 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}(A^2 - I) = \{0\} \Longrightarrow \ker(A^2 - I) = V_0(A^2 - I) = V$.

8. Spazi affini

(1)

$$\begin{cases} x_1 = 2t + 1 \\ x_2 = -6t + 2 \end{cases} \quad ; \quad 3x_1 + x_2 - 5 = 0.$$

(2)

$$\begin{cases} x_1 = 3t + u - 1 \\ x_2 = 2t - 2u \\ x_3 = t + 3u \end{cases} \quad ; \quad x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0.$$

(3) Per $k_{1,2} = \pm 2$.

(4) S ha equazioni parametriche e cartesiane rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1 = 2t - 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t + 1 \\ x_4 = 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 3 \end{cases} .$$

(5) Il traslato $T_{\mathbf{v}}(S)$ ha equazioni parametriche e cartesiana rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1' = t + 3 \\ x_2' = 2 \\ x_3' = u + 1 \end{cases} \quad ; \quad x_2' = 2.$$

(6) $S^{\perp}$ ha equazioni parametriche e cartesiane rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = t + 5 \\ x_3 = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_3 = 5 \end{cases} .$$

(7) E' un sottospazio vettoriale solo per $k = -7$.

(8) Per $k = -1$.

(9) $T_{\mathbf{v}}(W^{\perp})$ ha equazioni parametriche e cartesiane:

$$\begin{cases} x_1' = -1 \\ x_2' = t + 5 \\ x_3' = 1 \\ x_4' = 4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_1' = -1 \\ x_3' = 1 \\ x_4' = 4 \end{cases}$$

(10) H_q é un sottospazio vettoriale solo per $q = 0$, $\dim(H_0) = 2$, ed una base per H_0 é:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(11) a) Per $p = q = 0$, $H_{p,q}$ é un sottospazio vettoriale; per $p \neq 0$, $q = 0$, si considera $\mathbb{L}(A_p) = \mathbb{R}^3$, e quindi $\tilde{H} = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(\mathbb{L}(A_p)) \subset B_0\}$;

b) $\dim(H_{0,0}) = 5$, una base per $H_{0,0}$ é:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(12) $\dim(H) = 5$, ed una base per H é:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

(13) a) Solo con $p = 0$ possiamo considerare lo spazio

$$\tilde{H}_0 = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3 \mid f(A) \subset B\};$$

b) $\dim(\tilde{H}_0) = 8$, e la generica matrice di $M_3(\mathbb{R})$ che genera il sottospazio $\tilde{H}_0$ é:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}.$$

(14) a) Solo per $p = 0,\ q = 0$, l'insieme $H_{p,q}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$;

b) $\dim(H_{0,0}) = 3$, ed una base per $H_{0,0}$ é:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

9. Geometria in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

(1) π ha equazioni parametriche e cartesiana rispettivamente:

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t \\ z = 5u - 1 \end{cases} \quad \text{e } 2x - y - 4 = 0.$$

(2) r ha equazioni parametriche e cartesiane rispettivamente:

$$\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = -4t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 5z - 6 = 0 \\ y + 4z + 3 = 0 \end{cases}.$$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

(4) La distanza é $\sqrt{11}$.

(5) L'ortogonalitá vale solo per $k = 1$.

(6) r ed s sono sghembe.

(7) r ed s sono sghembe $\forall\, k \in \mathbb{R}$.

(8) $\theta = \arccos\left(\dfrac{2}{21}\right)$.

(9) π ha equazioni parametriche e cartesiana rispettivamente

$$\begin{cases} x = 3t + 2u + 2 \\ y = t - 1 \\ z = -4u + 3 \end{cases} \quad \text{e } 2x - 6y + z - 13 = 0.$$

(10) $k = 2 \Longrightarrow\ r \subset \pi;\ k \neq 2 \Longrightarrow\ r \parallel \pi$.

(11) r ha equazioni parametriche e cartesiane rispettivamente:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} .$$

(12) π ha equazione cartesiana $z + 5 = 0$.

10. Rotazioni in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

(1) La superficie é un iperboloide ad una falda, e le equazioni parametriche del suo asse di rotazione sono:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = t, \end{cases} \quad ,\ t \in \mathbb{R}$$

(2) Per $k > 0$, é degenere ed é costituita dal solo punto $(0, -1, 0)$; per $k = 0$, é ancora degenere ed é la retta di equazioni cartesiane $x = 0,\ y = -1$; per $k < 0$, é un cono.

(3) E' un iperboloide rotondo ad una falda di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

(4) E' un ellissoide rotondo di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

(5) Un'iperbole.

(6) Una traslazione possibile é data da

$$T_{\mathbf{v}}(x, y, z) = (x', y', z') = (x, y + 1, z).$$

S é un paraboloide rotondo (o ellittico).

(7) Una traslazione possibile é $T_{\mathbf{v}}(x, y, z) = (x', y', z') = (x - 5, y + 3, z)$.

(8) Per $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; $P \equiv (1, 1, 0)$; $d(P, Q) = \sqrt{2}$.

(9) Se $k = \pm 2$, é una parabola; se $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, é un'ellisse; se $k \in (-2, 2)$, é un'iperbole.

11. Forme quadratiche e superfici

(1) $f(x_1, x_2) = y_1^2 - y_2^2$.

(2) f non é definita positiva; la sua forma canonica é $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$.

(3) Per nessun $k \in \mathbb{R}$.

(4) L'indice di positivitá é 2, l'indice di negativitá é 1, l'indice di nullitá é 0; la forma canonica é $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(5) L'indice di positivitá é 1, l'indice di negativitá é 2, l'indice di nullitá é 1, quindi la forma canonica é $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

(6) b é semidefinita negativa solo per $a = 0$.

(7) E' una coppia di piani incidenti:

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5 = 0 \;\text{ e }\; x_1 - x_2 + 2 = 0.$$

(8) Per $k = 0$, é un paraboloide a sella; per $k = 1$, é la retta di equazioni cartesiane $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ (asse x_3); per $k \neq 1$, é una quadrica non-degenere e centrale (per $k > 1$ é un ellissoide immaginario, per $k \in (0, 1)$ é un iperboloide ad una falda; per $k < 0$ é un iperboloide a due falde).

(9) Q é un cilindro iperbolico; i piani di simmetria sono tutti i piani del tipo $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, ed anche i piani $x = 4$ e $y = -3$.

(10) E' un paraboloide ellittico.

(11) E' un cilindro parabolico.

♡ ♢ ♣ ♠

Ringraziamenti

Arsen Palestini ringrazia tutti e tutte coloro che, in vario modo, lo hanno aiutato, con la loro amicizia o come fonti di ispirazione, a realizzare questo lavoro, in particolare la sua famiglia, tutti i dottorandi e le dottorande dei Dipartimenti di Matematica di Bologna e di Firenze, ed il Prof. Daniele Ritelli.

Capitolo 13

Temi d'esame svolti e risolti

13.1 Prova scritta dell'1/4/2004

(1) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\ker(F) = W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 = 0\}, \qquad F(0,2,2) = (1,2,0),$$

(a) dire se F é ben definita;

(b) scrivere la matrice $M_E^E(F)$, dove E é la base canonica di $\mathbb{R}^3$;

(c) trovare autovalori ed autovettori di F e stabilire se é diagonalizzabile.

*

(2) (a) Trovare l'equazione cartesiana del piano π di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per i punti

$$A \equiv (1,1,1), \qquad B \equiv (2,0,-3), \qquad C \equiv (0,-1,5);$$

(b) trovare le equazioni parametriche della retta r ortogonale al piano π e passante per il punto $D \equiv (1,3,-2) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$;

(c) dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il piano π' di equazione cartesiana

$$2kx + (k-2)y + z - 7 = 0$$

é parallelo a π.

*

(3) (a) Provare che se $A \in M_2(\mathbb{R})$ ha autovalori λ_1 e λ_2, vale l'uguaglianza:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

(b) Provare che se $B \in M_2(\mathbb{R})$ é una matrice congruente ad A, si ha che

$$\det(B) = k \cdot \det(A), \quad \text{con} \quad k > 0.$$

*

(4) Data la famiglia di applicazioni lineari $F_a : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$F_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = (ax_1 - x_2, (a-1)x_3, x_1 + 2(a-1)x_3),$$

(a) dire per quali $a \in \mathbb{R}$ $\ker(F_a)$ rappresenta un piano;

(b) fissato $a = 2$, e detta $A_2 = M_E^{E'}(F_2)$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, trovare la matrice $A_2 \cdot A_2^T$ e il sottospazio vettoriale $(\ker(A_2 \cdot A_2^T))^{\perp}$.

*

(5) (a) Dato il fascio di coniche del piano di equazione cartesiana

$$F_k(x, y) = kx^2 - 2kxy + (k-1)y^2 + 2x + 5y - k - 2 = 0,$$

discutere il tipo di coniche al variare di $k \in \mathbb{R}$;

(b) fissato $k = 1$, ridurre alla sua forma canonica la conica di equazione $F_1(x, y) = 0$.

* * *

Soluzione del primo esercizio

(a) Poiché $\ker(F) = W$ é il piano di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$, ne ricaviamo una base passando alle equazioni parametriche: fissiamo $x_3 = t$ ed un'altra coordinata, ad esempio x_2, uguale ad u:

$$x_1 - 2x_2 = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 2u \\ x_2 = u \\ x_3 = t \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad t, u \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\ker(F) = \mathbb{L}\{(0, 0, 1), (2, 1, 0)\}$.

Affinché F sia ben definita, i due vettori generatori di W e $(0, 2, 2)$ dovranno essere linearmente indipendenti. Mettendoli in una matrice come righe, notiamo che:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0,$$

quindi F é un endomorfismo ben definito.

(b) Per scrivere $M_E^E(F)$, dobbiamo trovare le immagini dei tre vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ partendo dalle informazioni su F che abbiamo fin dall'inizio, vale a dire le tre immagini date, sfruttando la linearitá di F. Notiamo che si puó anche operare con la formula di cambiamento di basi per le matrici (vedi

Esercizio n. 2 a pag. 20 nel Capitolo 3), ma in questo capitolo opteremo per il metodo piú rapido. Siccome

$$(1,0,0) = \alpha(0,0,1)+\beta(2,1,0)+\gamma(0,2,2) \Longrightarrow \begin{cases} 2\beta = 1 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = -1/4 \end{cases},$$

per cui

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{2}(2,1,0) - \frac{1}{4}(0,2,2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F(1,0,0) = \frac{1}{2}F(0,0,1) + \frac{1}{2}F(2,1,0) - \frac{1}{4}F(0,2,2) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

Invece, si nota subito che

$$(0,1,0) = (2,1,0)-2(1,0,0) \Longrightarrow F(0,1,0) = F(2,1,0)-2F(1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right).$$

Infine, sappiamo fin da principio che $F(0,0,1) = (0,0,0)$; mettendo in colonna le tre immagini ottenute, ricaviamo la matrice richiesta:

$$M_E^E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Detta $A = M_E^E(F)$, calcoliamo gli autovalori di F, vale a dire gli zeri del polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-\lambda)\left[\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda\right] = \lambda^2\left(\frac{3}{4} - \lambda\right) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{3}{4}.$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ é il nucleo di F, che é giá noto dai dati iniziali:

$$V_0(F) = W = \mathbb{L}\{(0,0,1),(2,1,0)\}.$$

L'autospazio relativo a $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ é invece lo spazio delle soluzioni del sistema lineare:

$$\left(A - \frac{3}{4}I_3\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 0 \\ -\frac{3}{4}x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_{3/4}(F) = \mathbb{L}\{(1,2,0)\}.$$

L'applicazione F é diagonalizzabile perché $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) = 2, \; m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) = 1$.

♡

Soluzione del secondo esercizio

(a) L'equazione cartesiana del piano richiesto si trova ricavando prima due vettori della sua giacitura, ad esempio:

$$\mathbf{v_1} = B - A = (1,-1,-4), \quad \mathbf{v_2} = C - A = (-1,-2,4),$$

e successivamente imponendo il passaggio per uno dei punti, ad esempio A, annullando il seguente determinante:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 1 & x_3 - 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x_1 + x_3 - 5 = 0.$$

In alternativa, potevamo anche imporre il passaggio per un altro punto, ad esempio C:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + 1 & x_3 - 5 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x_1 + x_3 - 5 = 0.$$

(b) Le rette ortogonali a π hanno tutte vettore di direzione $\mathbf{v} = (4,0,1)$, quindi la retta r richiesta ha equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4t + 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = t - 2 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R},$$

e di conseguenza due possibili equazioni cartesiane di r sono:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 - 9 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

(c) Affinché il piano π' sia parallelo a π, i coefficienti delle variabili devono essere ordinatamente uguali, cioé:

$$\begin{cases} 2k = 4 \\ k - 2 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow k = 2,$$

che corrisponde al piano $\pi' :\ 4x_1 + x_3 - 7 = 0$.

$\diamondsuit$

Soluzione del terzo esercizio

(a) Gli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \implies$$

$$\implies \lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4ad + 4bc}}{2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2},$$

quindi

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \left(\frac{a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} \right) \left(\frac{a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} \right) =$$

$$= \frac{(a+d)^2 - (a-d)^2 - 4bc}{4} = ad - bc = \det(A).$$

$\blacksquare$

(b) La prova di questa proprietá segue direttamente dal teorema di Binet; infatti, se A e B sono matrici congrueni, esiste una matrice nonsingolare di cambiamento di base M tale che $B = M^T AM$, e calcolandone il determinante, si avrá:

$$\det(B) = \det(M^T AM) = \det(M^T) \cdot \det(A) \cdot \det(M) = \det(A)(\det(M))^2,$$

grazie alle proprietá del determinante e alla formula di Binet. Poiché $\det(M) \neq 0$, si puó chiamare $(\det(M))^2 = k > 0$, da cui l'uguaglianza é provata:

$$\det(B) = k \det(A).$$

$\blacksquare$

$\clubsuit$

Soluzione del quarto esercizio

(a) $\ker(F_a)$ é un piano se ha dimensione 2, cioé se é espresso da due equazioni cartesiane in $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} ax_1 - x_2 = 0 \\ (a-1)x_3 = 0 \\ x_1 + 2(a-1)x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

sono due equazioni cartesiane valide per ogni a reale. Affinché restino solo queste due equazioni, l'equazione contenente solo x_3 deve risultare indeterminata, cosa che accade solo per $a = 1$. Quindi $\ker(F_1)$ é il piano di equazioni cartesiane e parametriche rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases}, \ t, u \in \mathbb{R},$$

e di conseguenza

$$\ker(F_1) = \mathbb{L}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Per $a \neq 1$ invece $\ker(F_a)$ é una retta di equazioni cartesiane e parametriche rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

ossia $\ker(F_a) = \mathbb{L}\{(0, 0, 0, 1)\}$ per $a \neq 1$.

(b) Consideriamo ora l'applicazione lineare

$$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_3),$$

la cui matrice rispetto alle basi canoniche é:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

la matrice richiesta sará:

$$A_2 \cdot A_2^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Possiamo facilmente notare che siccome $\det(A_2 A_2^T) = 1 \neq 0$, $\ker(A_2 A_2^T) = (0)$, di conseguenza $(\ker(A_2 A_2^T))^\perp = \mathbb{R}^3$.

♠

Soluzione del quinto esercizio

(a) Studiamo il fascio di coniche di equazione parametrica:

$$F_k(x, y) = kx^2 - 2kxy + (k - 1)y^2 + 2x + 5y - k - 2 = 0.$$

Come sappiamo, possiamo esplicitare la matrice A_k associata alla conica:

$$F_k(x,y)=0 \implies (x\ y\ 1)A_k\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0,$$

con

$$A_k=\begin{pmatrix} k & -k & 1 \\ -k & k-1 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -k-2 \end{pmatrix}.$$

Ne calcoliamo il determinante per trovare per quali valori di k la conica associata é degenere:

$$\det(A_k)=k^2-\frac{41}{4}k+1=0 \iff k_{1,2}=\frac{41\pm\sqrt{1617}}{8}.$$

Quindi la conica é nondegenere per $k\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{41-\sqrt{1617}}{8},\frac{41+\sqrt{1617}}{8}\right\}$.

Studiamo invece il segno del minore 2×2 nord-ovest per discutere al variare di k la natura della conica:

$$\det\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k-1 \end{pmatrix}=-k.$$

Se $-k=0$, ossia $k=0$, la conica rappresentata é una parabola.

Se $-k>0$, ossia se $k\in(-\infty,0)$ e $k\neq\frac{41-\sqrt{1617}}{8}$, la conica rappresentata é un'ellisse.

Infine, se $-k<0$, ossia se $k\in(0,+\infty)$,e $k\neq\frac{41+\sqrt{1617}}{8}$, la conica rappresentata é un'iperbole.

(b) Studiamo la conica $F_1(x,y)=0$ e riduciamola alla sua forma canonica:

$$x^2-2xy+2x+5y-3=0.$$

Inizialmente, operiamo una trasformazione che ci consenta di eliminare il termine misto, vale a dire quello che contiene il prodotto xy: completando il quadrato, si ha:

$$x^2-2xy+2x+5y-3=(x-y)^2-y^2+2x+5y-3=0,$$

per cui effettuiamo un primo cambio di variabili:

$$\begin{cases} x'=x-y \\ y'=y \end{cases} \implies x'^2-y'^2+2x'+5y'-3=0.$$

Successivamente, effettuiamo delle altre trasformazioni che facciano scomparire anche i termini in cui la x e la y compaiono al primo grado:

$$x'^2 - y'^2 + 2x' + 5y' - 3 = (x'+1)^2 - 1 - \left(y' - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} - 3 = 0,$$

quindi la successiva trasformazione é data da:

$$\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' - \dfrac{5}{2} \end{cases} \implies (x'')^2 - (y'')^2 + \frac{9}{4} = 0.$$

Possiamo anche dividere tutto per il termine noto, ottenendo l'equazione:

$$\frac{4(x'')^2}{9} - \frac{4(y'')^2}{9} + 1 = 0,$$

da cui l'ultima trasformazione ci porta alla forma canonica dell'iperbole:

$$\begin{cases} x''' = \dfrac{2x''}{3} \\ y''' = \dfrac{2y''}{3} \end{cases} \implies (x''')^2 - (y''')^2 + 1 = 0.$$

♡ ♢ ♣ ♠

13.2 Prova scritta del 30/6/2005

(1) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:

$$F(1,1,0,0) = (0,0,0,0), \qquad F(1,2,0,0) = (0,0,-1,0),$$

$$F(0,0,-1,1) = (0,0,2,-2), \qquad F(0,0,0,1) = (0,0,0,-1),$$

(a) dire se F é ben definita;

(b) scrivere la matrice $M_E^E(F)$, dove E é la base canonica di $\mathbb{R}^4$, e trovare le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio $\ker(F)$;

(c) trovare autovalori ed autovettori di F e specificare se é diagonalizzabile.

*

(2) (a) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r dello spazio $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per i punti $A \equiv (1,0,2)$ e $B \equiv (-1,4,0)$;

(b) trovare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e passante per il punto $C \equiv (0,0,-3)$;

(c) determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta s ortogonale a π e passante per C. Analizzare quali sono le posizioni reciproche delle rette r ed s.

*

(3) Date le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, x_2 + x_3, 2x_1),$$

$$G(y_1, y_2, y_3, y_4) = (2y_1 - y_4, 0, y_2 + y_3),$$

(a) trovare le matrici $M_E^E(G \circ F)$ e $M_E^E(F \circ G)$ canonicamente associate alle applicazioni composte;

(b) trovare delle basi per i sottospazi $\mathrm{Im}(F \circ G)$, $\ker(F \circ G)$, $(\ker(F \circ G))^\perp$;

(c) detta $A = M_E^E(G \circ F)$, calcolare la matrice inversa di $A + 3I_3$, dove I_3 é la matrice identitá di ordine 3.

*

(4) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, e $\mathbf{v}$ é un autovettore di $A + I_n$ relativo all'autovalore λ, ed inoltre $\mathbf{v}$ é un autovettore di $B + I_n$ relativo all'autovalore 2λ, dimostrare che $\mathbf{v}$ é anche un autovettore di $(A - B)^2$ relativo all'autovalore λ^2.

*

(5) (a) Dato il fascio di coniche del piano di equazione cartesiana:

$$F_k(x, y) = 4x^2 - 2kxy - y^2 + 4ky - 3 = 0,$$

discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il tipo di coniche ;

(b) fissato $k = 1$, trovare la forma canonica della conica $F_1(x, y) = 0$.

* * *

Soluzione del primo esercizio

(a) L'applicazione F sará ben definita se i quattro vettori di $\mathbb{R}^4$ dati risulteranno linearmente indipendenti. Verifichiamo quindi la non nullitá del determinante della matrice quadrata di ordine 4 ottenuta inserendo tali vettori nelle righe:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

(sviluppando con la regola di Laplace il determinante lungo la quarta riga)

$$= 0 + 0 + 0 + (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

perció la F é un'applicazione lineare ben definita.

(b) Al fine di scrivere la matrice canonicamente associata $A = M_E^E(F)$, dobbiamo ricavare le quattro immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$, a partire dalle informazioni possedute. Giá conosciamo l'immagine del quarto vettore:

$$F(0,0,0,1) = (0,0,0,-1),$$

che corrisponderá alla quarta colonna della matrice A. Troviamo facilmente anche l'immagine del terzo vettore della base canonica, sfruttando la linearitá sulla seguente identitá:

$$(0,0,1,0) = (0,0,0,1) - (0,0,-1,1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F(0,0,1,0) = F(0,0,0,1) - F(0,0,-1,1) = (0,0,-2,1).$$

Tramite le prime due informazioni ricaviamo invece le due immagini mancanti:

$$(0,1,0,0) = (1,2,0,0) - (1,1,0,0) \ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F(0,1,0,0) = F(1,2,0,0) - F(1,1,0,0) = (0,0,-1,0).$$

$$F(1,0,0,0) = F(1,1,0,0) - F(0,1,0,0) = (0,0,0,0) - (0,0,-1,0) = (0,0,1,0).$$

In definitiva, la matrice canonicamente associata ad F risulta essere:

$$M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo caratterizzare il sottospazio vettoriale $\ker(F)$ studiando il sistema lineare omogeneo associato:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e di conseguenza per le equazioni parametriche dobbiamo fissare due parametri, ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 = t + 2u \\ x_2 = t \\ x_3 = u \\ x_4 = u \end{cases}, \ t, u \in \mathbb{R},$$

per cui $\ker(F) = \mathbb{L}\{(1,1,0,0),(2,0,1,1)\}$.

(c) Cerchiamo gli autovalori di F, vale a dire gli autovalori di $M_E^E(F)$, risolvendo l'equazione caratteristica di quarto grado:

$$\det(M_E^E(F) - \lambda I_4) = 0 \implies \lambda^2(-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0,$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -1$. Si trova facilmente che:

$$V_0(F) = \ker(F) = \mathbb{L}\{(1,1,0,0),(2,0,1,1)\},$$

$$V_{-2}(F) = \mathbb{L}\{(0,0,1,-1)\},$$

$$V_{-1}(F) = \mathbb{L}\{(0,0,0,1)\},$$

e siccome $\dim(V_{\lambda_j}(F)) = m_a(\lambda_j)$ per $j = 1,2,3$, possiamo concludere che F é diagonalizzabile.

♡

Soluzione del secondo esercizio

(a) La retta nello spazio tridimensionale passante per i punti A e B ha come vettore direzionale

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,4,0) - (1,0,2) = (-2,4,-2),$$

perció possiamo scrivere le equazioni parametriche e cartesiane come segue:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 4t \\ z = -2t + 2 \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R};$$

ricavando t dalla seconda equazione e sostituendo, otteniamo:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}.$$

(b) Il piano π contenente r e passante per $C \equiv (0,0,-3)$ avrá giacitura generata dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,0,-3) - (1,0,2) = (-1,0,-5)$:

$$\det \begin{pmatrix} x-0 & y-0 & z-(-3) \\ -1 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow 5x + 2y - z - 3 = 0.$$

(c) La retta s ortogonale a π e passante per C ha equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5t \\ y = 2t \\ z = -t - 3 \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R}$$

e cartesiane:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ y + 2z + 6 = 0 \end{cases}.$$

Le posizioni reciproche tra r ed s si analizzano studiando il sistema di 4 equazioni lineari originato dalle equazioni cartesiane delle due rette:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \\ 2x - 5y = 0 \\ y + 2z + 6 = 0 \end{cases}.$$

Si nota immediatamente che la seconda e la quarta equazione rendono il sistema incompatibile; confrontandole, infatti, si ha:

$$y + 2z - 4 = y + 2z + 6 \implies -4 = 6,$$

quindi evidentemente $r \cap s = \emptyset$. Le due rette potrebbero essere parallele oppure sghembe, e la differenza si basa sulla differenza tra il rango della matrice completa e quello della matrice completa del sistema. Poiché

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} = 4,$$

r ed s sono rette sghembe.

♢

Soluzione del terzo esercizio

(a) Sappiamo che le matrici delle applicazioni composte si ottengono moltiplicando le matrici delle applicazioni; chiamando E tutte le basi canoniche si ha:

$$M_E^E(G \circ F) = M_E^E(G) \cdot M_E^E(F), \text{ e } M_E^E(F \circ G) = M_E^E(F) \cdot M_E^E(G).$$

Nel nostro caso, le matrici sono:

$$M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_E^E(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui i prodotti risultano:

$$M_E^E(G \circ F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_E^E(F \circ G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Per individuare una base del sottospazio vettoriale immagine dell'applicazione $F \circ G$, prendiamo le colonne della matrice canonicamente associata $M_E^E(F \circ G)$ scartando peró i vettori linearmente dipendenti oppure uguali; in questo caso, scartiamo la terza colonna perché é uguale alla seconda e la quarta colonna, che é linearmente dipendente dalla prima, essendo uguale alla prima moltiplicata per lo scalare -1:

$$\mathrm{Im}(F \circ G) = \mathbb{L}\{(1,1,0,2),(0,0,1,0)\}.$$

Il sottospazio vettoriale $\ker(F \circ G)$ si ricava invece dal sistema lineare omogeneo:

$$M_E^E(F \circ G) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -u \\ x_3 = u \\ x_4 = t \end{cases}, \ t, u \in \mathbb{R},$$

dunque $\ker(F \circ G) = \mathbb{L}\{(1,0,0,1),(0,1,-1,0)\}$. Dalle righe della matrice canonicamente associata si ottiene facilmente una base del sottospazio ortogonale al nucleo: $(\ker(F \circ G))^\perp = \mathbb{L}\{(0,1,1,0),(1,0,0,-1)\}$.

(c)

$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice é nonsingolare perché $\det(A + 3I_3) = 24 \neq 0$. Ne cerchiamo l'inversa con il metodo descritto nel secondo esercizio del Capitolo 4 di questo libro:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1/2) \cdot R_{(1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1/3)\cdot R_{(2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(1/4)\cdot R_{(3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$$

Per completare la procedura, mettiamo nella terza riga la differenza tra la terza e la prima riga:

$$\xrightarrow[R_{(3)}-R_{(1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$$

Possiamo concludere che:

$$(A+3I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

come si verifica facilmente svolgendo il prodotto:

$$(A+3I_3)\cdot(A+3I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

♣

Soluzione del quarto esercizio

Dalle ipotesi, si hanno le due relazioni:

$$(A+I_n)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad (B+I_n)\mathbf{v} = 2\lambda\mathbf{v},$$

da cui, per sottrazione:

$$(A+I_n)\mathbf{v} - (B+I_n)\mathbf{v} = (A-B)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} - 2\lambda\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{v}.$$

$$(A-B)^2\mathbf{v} = (A-B)((A-B)\mathbf{v}) = (A-B)(-\lambda\mathbf{v}) =$$

$$= -\lambda(A-B)\mathbf{v} = (-\lambda)\cdot(-\lambda)\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v} \implies \lambda^2 \in \sigma((A-B)^2).$$

■

♠

Soluzione del quinto esercizio

(a) La matrice associata alla conica $F_k(x,y)=0$ é:

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & -k & 0 \\ -k & -1 & 2k \\ 0 & 2k & -3 \end{pmatrix}.$$

La conica é degenere quando il determinante della sua matrice simmetrica associata si annulla, cioé:

$$\det(A_k) = 0 \iff 12 - 13k^2 = 0,$$

quindi per $k_{1,2} = \pm 2\sqrt{\frac{3}{13}}$ la conica rappresentata é degenere. Poiché invece

$$\det \begin{pmatrix} 4 & -k \\ -k & -1 \end{pmatrix} = -4 - k^2 < 0 \ \forall \ k \in \mathbb{R},$$

la conica é un'iperbole per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm 2\sqrt{\frac{3}{13}} \right\}$.

(b) Per $k = 1$, l'equazione dell'iperbole (come abbiamo scoperto al punto precedente) da riportare a forma canonica é:

$$4x^2 - 2xy - y^2 + 4y - 3 = 0.$$

Operiamo come al solito, iniziando dal completamento del quadrato che presenta il termine misto:

$$4x^2 - 2xy - y^2 + 4y - 3 = \left(2x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{5y^2}{4} + 4y - 3 = 0,$$

quindi con la sostituzione:

$$\begin{cases} x' = 2x - \dfrac{y}{2} \\ y' = y \end{cases} \implies (x')^2 - \frac{5(y')^2}{4} + 4y' - 3 = (x')^2 - \frac{5}{4}\left(y' - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} - 3 = 0,$$

a cui segue il secondo cambio di variabile:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(y' - \dfrac{8}{5}\right) \end{cases} \implies (x'')^2 - (y'')^2 + \frac{1}{5} = 0,$$

e moltiplicando per 5 entrambi i membri dell'equazione:

$$5(x'')^2 - 5(y'')^2 + 1 = 0;$$

resta l'ultima sostituzione per pervenire alla forma canonica dell'iperbole:

$$\begin{cases} x''' = \sqrt{5}x'' \\ y''' = \sqrt{5}y'' \end{cases} \implies (x''')^2 - (y''')^2 + 1 = 0.$$

Ricordiamo che le forme canoniche possibili per un'iperbole sono due:

$$X^2 - Y^2 + 1 = 0 \text{ e } X^2 - Y^2 - 1 = 0.$$

$\heartsuit \diamondsuit \clubsuit \spadesuit$

13.3 Prova scritta del 12/7/2005*

(1) Data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(3,1,0) = (1,0,0), \quad F(0,2,0) = (4,2,-2), \quad F(0,1,3) = (0,-1,6),$$

(a) dire se F é un'applicazione lineare ben definita;

(b) scrivere la matrice $A = M_E^E(F)$, dove E é la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e se esiste, la sua inversa A^{-1};

(c) detto $\mathbb{B}$ il sottospazio vettoriale delle matrici 3×3 della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}, \; a, b, c \in \mathbb{R},$$

trovare una base del sottospazio vettoriale $\mathbb{C}$ definito come segue:

$$\mathbb{C} = \{C \in M_3(\mathbb{R}) \mid C = A \cdot B, \quad \text{con } B \in \mathbb{B}\}.$$

*

(2) (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per i punti:

$$A \equiv (1,0,4); \qquad B \equiv (1,1,1); \qquad C \equiv (-1,5,2);$$

(b) scrivere l'equazione cartesiana del piano π' ortogonale a π e contenente la retta r passante per i punti B e $P \equiv (2,0,1)$;

(c) trovare le equazioni cartesiane e parametriche della retta s ortogonale al piano π e passante per il punto $Q \equiv (3,3,-3)$.

*

(3) Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definita:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 + x_2),$$

(a) trovare delle basi per i sottospazi vettoriali $\ker(F)$ e $(\ker(F))^\perp$;

(b) detta $A = M_E^E(F)$ la matrice canonicamente associata ad F, calcolare $A^2 - 3A$;

(c) trovare autovalori ed autovettori di A e dire se é diagonalizzabile.

*

(4) Date le matrici quadrate $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, entrambe di rango massimo, dimostrare che se $\ker(A+B) \neq \{0\}$ e se $\ker(A-B) \neq \{0\}$, allora sia 1 che -1 sono autovalori della matrice $B^{-1}A$.

*

(5) (a) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il fascio di coniche del piano di equazione cartesiana:

$$F_k(x,y) = -2x^2 + 2kxy - 8y^2 - 2ky + 1 = 0;$$

(b) fissato $k = 4$, trovare la forma canonica della conica $F_4(x,y) = 0$.

* * *

*: Per non dimenticare il giorno piú terribile del Dipartimento di Matematica. R.I.P. Riccardo Venier

* * *

Soluzione del primo esercizio

(a) Affinché l'applicazione F sia ben definita, i 3 vettori di partenza devono essere linearmente indipendenti, per cui calcoliamo il determinante della matrice 3×3 ottenuta mettendoli in riga:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 18 \neq 0,$$

quindi F é un'applicazione lineare ben definita.

(b) Cerchiamo le immagini $F(1,0,0)$, $F(0,1,0)$, $F(0,0,1)$ per ricavare la matrice A canonicamente associata ad F, partendo dalla relazione piú immediata:

$$F(0,2,0) = F(2 \cdot (0,1,0)) = 2F(0,1,0) \implies$$

$$\implies F(0,1,0) = \frac{1}{2} \cdot F(0,2,0) = \frac{1}{2}(4,2,-2) = (2,1,-1).$$

Successivamente, avendo giá a disposizione $F(3,1,0)$, poiché

$$(3,1,0) = 3(1,0,0) + (0,1,0) \implies (1,0,0) = \frac{(3,1,0) - (0,1,0)}{3},$$

$$F(1,0,0) = \frac{F(3,1,0) - F(0,1,0)}{3} = \frac{(1,0,0) - (2,1,-1)}{3} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Resta da trovare $F(0,0,1)$, e possiamo ragionare in modo analogo, conoscendo il dato iniziale $F(0,1,3)$:

$$(0,0,1) = \frac{(0,1,3) - (0,1,0)}{3} \implies F(0,0,1) = \frac{F(0,1,3) - F(0,1,0)}{3} =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Quindi la matrice canonicamente associata sará:

$$M_E^E(F) = A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 & -2/3 \\ -1/3 & 1 & -2/3 \\ 1/3 & -1 & 7/3 \end{pmatrix}.$$

A é invertibile se e solo se il suo determinante é non nullo:

$$\det(A) = -\frac{7}{9} - \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{7}{9} = -\frac{2}{9} \neq 0.$$

Cerchiamo l'inversa A^{-1} col ben noto metodo di riduzione per righe:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} -1/3 & 2 & -2/3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & -2/3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 7/3 & | & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Mettiamo nella seconda riga la sottrazione tra seconda e prima riga:

$$\xrightarrow[R_{(2)} - R_{(1)}]{} \left(\begin{array}{ccccccc} -1/3 & 2 & -2/3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 7/3 & | & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Successivamente, al posto della terza riga inseriamo la somma tra la terza e la prima:

$$\xrightarrow[R_{(3)} + R_{(1)}]{} \left(\begin{array}{ccccccc} -1/3 & 2 & -2/3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & | & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ora, nella terza riga, possiamo inserire la somma tra la seconda e la terza:

$$\xrightarrow[R_{(3)} + R_{(2)}]{} \left(\begin{array}{ccccccc} -1/3 & 2 & -2/3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & | & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A questo punto, moltiplicando per 3/5 la terza riga abbiamo ottenuto la terza riga della matrice identitá I_3:

$$\xrightarrow[(3/5) \cdot R_{(3)}]{} \left(\begin{array}{ccccccc} -1/3 & 2 & -2/3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 3/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Per ottenere la seconda riga, invece, ci basta cambiare segno a tutta la seconda riga:

$$\xrightarrow[(-1) \cdot R_{(2)}]{} \left(\begin{array}{ccccccc} -1/3 & 2 & -2/3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 3/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

La successiva operazione elementare, che produrrá due zeri nella prima riga, consiste nel sostituire alla prima riga la combinazione lineare: prima riga meno due volte la seconda riga piú i 2/3 della terza riga:

$$\xrightarrow[R_{(1)} - 2 \cdot R_{(2)} + (2/3) \cdot R_{(3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1/3 & 0 & 0 & -1 & 12/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Concludiamo moltiplicando per (-3) tutta la prima riga:

$$\xrightarrow[(-3) \cdot R_{(1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -36/5 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Quindi abbiamo ottenuto l'inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -36/5 & -6/5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

(c) Il sottospazio vettoriale $\mathbb{C}$ dato é lo spazio di tutte le matrici $C = A \cdot B$, dove A é la matrice del punto precedente e B é una qualsiasi matrice 3×3 del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Quindi una qualsiasi matrice C avrá la forma seguente:

$$AB = \begin{pmatrix} -2b/3 & 2a & -2c/3 \\ -2b/3 & a & -2c/3 \\ 7b/3 & -a & 7c/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \\ 7/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix} c,$$

quindi troviamo le matrici generatrici di $\mathbb{C}$, che ha dimensione 3, scegliendo ad esempio $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$:

$$\mathbb{C} = \mathbb{L} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \right\}$$

.

♡

Soluzione del secondo esercizio

(a) Scriviamo l'equazione del piano π richiesto in maniera differente da quella descritta precedentemente: imponendo il passaggio per i tre punti A, B, C nell'equazione cartesiana generale del piano: $ax + by + cz + d = 0$, e cercando di ricavare i parametri reali a, b, c, d. L'imposizione del passaggio per ogni punto é una relazione su tali parametri, da cui otterremo un sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} a + 0 \cdot b + 4c + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ -a + 5b + 2c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3c - b = 0 \\ 6b + 3c + 2d = 0 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} a = 13c/2 \\ b = 3c \\ c = c \\ d = -21c/2 \end{cases}.$$

Con $c = 2$, otteniamo l'equazione cartesiana di π:

$$13x + 6y + 2z - 21 = 0.$$

(b) Si verifica facilmente che $B \in \pi$, e invece $P \notin \pi$, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione cartesiana del piano. La retta passante per B e per P avrá ovviamente come vettore direzionale $\overrightarrow{BP} = P - B = (1, -1, 0)$, quindi possiamo scriverne le equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il piano π' richiesto dovrá soddisfare la condizione di ortogonalitá con π, cioé, considerandone una generica equazione cartesiana: $ex + fy + gz + h = 0$, con e, f, g, h coefficienti reali da determinare, dovrá valere:

$$< (e, f, g), (13, 6, 2) >= 0.$$

Sostituendo le equazioni parametriche della retta si avrá:

$$e(t + 2) - tf + g + h = 0 \implies t(e - f) + 2e + g + h = 0.$$

Tale polinomio si deve annullare per ogni valore di t, quindi dovranno annullarsi sia il coefficiente di t sia il termine noto:

$$e - f = 0, \quad 2e + g + h = 0.$$

Il sistema lineare ottenuto da queste 3 equazioni risulta:

$$\begin{cases} e = f \\ f = f \\ g = -19f/2 \\ h = 15f/2 \end{cases},$$

e per $f = 2$ avremo l'equazione di π':

$$2x + 2y - 19z + 15 = 0.$$

(c) Ogni retta ortogonale a π ha come vettore di direzione $\mathbf{w} = (13, 6, 2)$, quindi le equazioni di s sono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 13t + 3 \\ y = 6t + 3 \\ z = 2t - 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x - 13y + 21 = 0 \\ y - 3z - 12 = 0 \end{cases}.$$

$\diamondsuit$

Soluzione del terzo esercizio

(a) Calcoliamo inizialmente le immagini dei tre vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ per determinare la matrice canonicamente associata ad F:

$$F(1,0,0) = (2,1,3), \quad F(0,1,0) = (-1,2,1), \quad F(0,0,1) = (1,-1,0),$$

per cui

$$A = M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una base per $\ker(A)$ ricavandone le equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = -5t \end{cases} \Longrightarrow \ker(F) = \mathbb{L}\{(1, -3, -5)\}.$$

$(\ker(F))^{\perp}$ é il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 dei vettori (x_1, x_2, x_3) tali che

$$< (x_1, x_2, x_3), (1, -3, -5) >= 0 \Longrightarrow x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0.$$

Troviamo una base di questo sottospazio tramite le equazioni parametriche:

$$x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3u + 5t \\ x_2 = u \\ x_3 = t \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R},$$

da cui:

$$(\ker(F))^{\perp} = \mathbb{L}\{(5, 0, 1), (3, 1, 0)\}.$$

(b) Dalla matrice A ricavata in precedenza, calcoliamo:

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Gli autovalori di A sono le radici della solita equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ (-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0 \ \Longrightarrow\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3.$$

Essendo gli autovalori tutti distinti, $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ per $i = 1, 2, 3$, quindi F é diagonalizzabile. Gli autospazi sono i seguenti:

$$V_0(F) = \ker(F) = \mathbb{L}\{(1, -3, -5)\};$$

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \Longrightarrow V_1(F) = \mathbb{L}\{(0, 1, 1)\}.$$

$$(A - 3I_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \Longrightarrow V_1(F) = \mathbb{L}\{(1, 0, 1)\}.$$

♣

Soluzione del quarto esercizio

Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$, e quindi esiste la matrice inversa B^{-1}. Le due ipotesi sono le seguenti:

$$\ker(A + B) \neq \{0\} \implies \exists\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tale che } A\mathbf{v} = -B\mathbf{v}.$$

$$\ker(A - B) \neq \{0\} \implies \exists\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tale che } A\mathbf{w} = B\mathbf{w}.$$

Applicando la matrice B^{-1} ad entrambi i membri della prima relazione, si ottiene:

$$B^{-1}A\mathbf{v} = -B^{-1}B\mathbf{v} = -\mathbf{v},$$

e poiché $\mathbf{v} \neq 0$, essendo un autovettore, -1 é un autovalore di $B^{-1}A$ con autovettore $\mathbf{v}$. Analogamente, applicando B^{-1} ad entrambi i membri nella seconda relazione:

$$B^{-1}A\mathbf{w} = B^{-1}B\mathbf{w} = \mathbf{w},$$

troviamo che 1 é un autovalore di $B^{-1}A$ con autovettore $\mathbf{w}$.

♠

Soluzione del quinto esercizio

(a) La matrice associata alla conica $F_k(x, y) = 0$ é:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & k & 0 \\ k & -8 & -k \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix};$$

la conica risulta degenere per i valori reali di k per cui $\det(A_k) = 0$:

$$\det(A_k) = 16 + k^2 \neq 0 \forall\ k \in \mathbb{R},$$

quindi F_k non é mai degenere. Poiché

$$\det \begin{pmatrix} -2 & k \\ k & -8 \end{pmatrix} = 16 - k^2,$$

si avranno i seguenti casi:

$$16 - k^2 = 0 \implies k_{1,2} = \pm 4 \implies F_k \text{ corrisponde ad una parabola;}$$

$$16 - k^2 > 0 \implies k \in (-4, 4) \implies F_k \text{ corrisponde ad un'ellisse;}$$

$$16 - k^2 < 0 \implies k \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \implies F_k \text{ corrisponde ad un'iperbole.}$$

(b) Giá sappiamo che $F_4(x, y) = 0$ dovrá essere una parabola, come giá ricavato nel punto precedente. Consideriamo dunque l'equazione:

$$-2x^2 + 8xy - 8y^2 - 8y + 1 = 0$$

e riconduciamola alla sua forma canonica:

$$-2(x^2 - 4xy + 4y^2) + 8y^2 - 8y^2 - 8y + 1 = 0 \Longrightarrow -2(x - 2y)^2 - 8y + 1 = 0,$$

quindi applicando la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = y \end{cases} \Longrightarrow -2(x')^2 - 8y' + 1 = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{(x')^2}{4} + \frac{1}{8},$$

e con quest'altro cambio di variabile:

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{x'}{2} \\ y'' = y' - \dfrac{1}{8} \end{cases} \Longrightarrow y'' = -(x'')^2$$

otteniamo la forma canonica di $F_4(x, y) = 0$.

♡ ♢ ♣ ♠

13.4 Prova scritta dell'1/4/2006

(1) Data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$F(1,0,-1) = (-3,0,3), \quad F(1,1,1) = (0,0,0), \quad F(2,0,0) = (6,0,4),$$

(a) dire se F é un'applicazione lineare ben definita;

(b) scrivere la matrice canonicamente associata $A = M_E^E(F)$, dove E é la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e trovare una base di $\ker(F)$ ed una di $(\ker(F))^\perp$;

(c) Trovare l'inversa della matrice $A - 3I_3$.

*

(2) (a) Trovare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $A \equiv (1,1,1)$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e parallelo al piano di equazione cartesiana:

$$3x - 2y + 4z - 7 = 0;$$

(b) scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r ortogonale ai due piani e passante per il punto $O \equiv (0,0,0) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e trovare i due punti di intersezione della retta r con i due piani;

(c) scrivere l'equazione cartesiana del piano π' contenente la retta r e passante per il punto $A \equiv (1,1,1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

*

(3) Dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \mathbb{L}\{(-1,0,-3,0),(1,-1,-2,-1)\}, \quad W = \mathbb{L}\{(0,2,0,4),(0,-1,-5,-1)\},$$

(a) trovare delle basi dei sottospazi vettoriali $V \cap W$, $V + W$ e $(V+W)^\perp$;

(b) dato il sottospazio vettoriale

$$Z = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0\},$$

dire se $Z \subset V$ oppure $Z \subset W$ e trovare delle basi dei sottospazi vettoriali $Z+V$ e $(Z+V)^\perp$.

*

(4) Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, se $\mathbf{v}$ é un autovettore di $A - I_n$ relativo all'autovalore non nullo λ, ed inoltre $\mathbf{v}$ é un autovettore di $B - I_n$ relativo all'autovalore $1 + \lambda$, dimostrare che $\mathbf{v} \in \ker(A - B + I_n)$.

*

(5) (a) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente fascio di coniche del piano:

$$F_k(x,y) = 2x^2 + 6y^2 - 2kxy + 8ky + 3 = 0;$$

(b) fissato $k = -2\sqrt{3}$, ridurre a forma canonica la conica $F_{-2\sqrt{3}} = 0$.

* * *

Soluzione del primo esercizio

(a) Calcoliamo il determinante della matrice 3×3 ottenuta mettendo i 3 vettori di partenza in colonna:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

quindi F é un'applicazione lineare ben definita.

(b) Per scrivere la matrice canonicamente associata, cerchiamo le immagini dei tre vettori della base canonica sfruttando i dati iniziali e quelli che otteniamo successivamente:

$$F(1,0,0) = F(1/2 \cdot (2,0,0)) = \frac{F(1,0,0)}{2} = (3,0,2);$$

$$F(0,0,1) = F(1,0,0) - F(1,0,-1) = (3,0,2) - (-3,0,3) = (6,0,-1);$$

$$\begin{aligned} F(0,1,0) &= F(1,1,1) - F(1,0,0) - F(0,0,1) = \\ &= (0,0,0) - (3,0,2) - (6,0,-1) = (-9,0,1), \end{aligned}$$

quindi possiamo ora esibire la matrice canonicamente associata ad F:

$$A = M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Troviamo le equazioni di $\ker(F)$ per esplicitarne una base:

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases} \implies \ker(F) = \mathbb{L}\{(1,1,1)\}.$$

Quindi $(\ker(F))^\perp$ ha equazione cartesiana:

$$< (x_1, x_2, x_3), (1,1,1) >= 0 \implies x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

e di conseguenza equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = -t - u \\ x_2 = t \\ x_3 = u \end{cases}, \ t, u \in \mathbb{R} \implies (\ker(F))^\perp = \mathbb{L}\{(1,-1,0), (1,0,-1)\}.$$

(c)

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Innanzitutto, dobbiamo assicurarci dell'invertibilitá di $A-3I_3$: $\det(A-3I_3) = 36 \neq 0$, quindi l'inversa esiste. Consideriamo quindi la matrice 3×6 ottenuta affiancando $A - 3I_3$ ad I_3, e svolgiamo operazioni elementari sulle righe di tale matrice fino ad ottenere una matrice finale in cui I_3 si troverá a sinistra e l'inversa $(A - 3I_3)^{-1}$ sulla sinistra:

$$\begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambiamo la prima riga con la terza inizialmente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dividiamo per 3 e cambiamo di segno la terza riga:

$$\xrightarrow[(-1/3)\cdot R_{(2)}]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sostituiamo la prima riga con la somma della prima riga con la seconda:

$$\xrightarrow[R_1 + R_{(2)}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & | & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sostituiamo la terza riga con la somma della terza con la seconda moltiplicata per 9, per far comparire degli zeri:

$$\xrightarrow[R_3 + 9\cdot R_{(2)}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & | & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Otteniamo la terza riga della matrice identitá dividendo per 6 la terza riga:

$$\xrightarrow[(1/6)\cdot R_{(3)}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & | & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/6 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per concludere, sostituiamo la prima riga con la metá della somma della prima con il quadruplo della terza:

$$\xrightarrow[(1/2)\cdot(R_1 + 4R_{(2)})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/3 & -7/6 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/6 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque l'inversa risulta:

$$(A - 3I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -7/6 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1/6 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

♡

Soluzione del secondo esercizio

(a) Dato il piano di equazione cartesiana $3x-2y+4z-7=0$, tutti i piani ad esso paralleli devono avere un'equazione cartesiana del tipo $3x-2y+4z+k=0$, con $k \in \mathbb{R}$. In particolare, il piano π richiesto contiene il punto $A \equiv (1,1,1)$, per cui é sufficiente imporre il passaggio del piano generico per tale punto per ottenere:

$$3-2+4+k=0 \implies k=-5 \implies 3x-2y+4z-5=0,$$

le cui equazioni parametriche saranno:

$$\begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = -\dfrac{3t}{4} + \dfrac{u}{2} + \dfrac{5}{4} \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R}.$$

(b) La retta r ortogonale ai due piani ha vettore di direzione $\mathbf{v} = (3,-2,4)$, e quindi le equazioni saranno:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = 4t \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} 4x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}.$$

r interseca il piano $3x-2y+4z-7=0$ nel punto P_1 individuato dall'equazione:

$$9t + 4t + 16t - 7 = 0 \Longrightarrow t = \frac{7}{29} \Longrightarrow P_1 \equiv \left(\frac{21}{29}, -\frac{14}{29}, \frac{28}{29}\right).$$

Analogamente, r interseca il piano π nel punto P_2 individuato dall'equazione:

$$9t + 4t + 16t - 5 = 0 \Longrightarrow t = \frac{5}{29} \Longrightarrow P_2 \equiv \left(\frac{15}{29}, -\frac{10}{29}, \frac{20}{29}\right).$$

(c) Il piano π' contenente la retta r e passante per A si puó ricavare imponendo che la sua giacitura sia generata dal vettore direzione della retta, cioé $(3,-2,4)$, e dal vettore che congiunge A con l'origine O, cioé $A - O = (1,1,1)$. Di conseguenza, l'equazione di π' sará data da:

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow 6x - y - 5z = 0.$$

Si verifica banalmente che $r \subset \pi'$ sostituendo le equazioni parametriche nell'equazione parametrica trovata:

$$6 \cdot 3t - (-2t) - 5 \cdot 4t = 0 \Longrightarrow 0 = 0.$$

L'identitá trovata ci garantisce che la relazione tra retta e piano é corretta.

$\diamondsuit$

Soluzione del terzo esercizio

(a) Cerchiamo i vettori comuni ai sottospazi vettoriali V e W per individuare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$, uguagliando un generico vettore di V con un generico vettore di W: se $\alpha(-1, 0, -3, 0) + \beta(1, -1, -2, -1) \in V$, e se $\gamma(0, 2, 0, 4) + \delta(0, -1, -5, -1) \in W$, imponiamo:

$$\alpha(-1, 0, -3, 0) + \beta(1, -1, -2, -1) = \gamma(0, 2, 0, 4) + \delta(0, -1, -5, -1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (-\alpha + \beta, -\beta, -3\alpha - 2\beta, -\beta) = (0, 2\gamma - \delta, -5\delta, 4\gamma - \delta),$$

uguagliando componente per componente otterremo un sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 2\gamma - \delta \\ -3\alpha - 2\beta = -5\delta \\ -\beta = 4\gamma - \delta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \beta = \beta \\ \gamma = 0 \\ \delta = \beta \end{cases},$$

da cui, scegliendo $\beta = 1$, osserviamo che:

$$(0, -1, -5, -1) = (-1, 0, 3, 0) + (1, -1, -2, -1) \in V \cap W \Longrightarrow V \cap W = \mathbb{L}\{(0, 1, 5, 1)\}.$$

Dalla formula di Grassmann vettoriale otteniamo immediatamente che dim($V+W$)=dim(V)+dim(W)-dim($V \cap W$)=2+2-1=3, per cui:

$$V + W = \mathbb{L}\{(-1, 0, -3, 0), (1, -1, -2, -1), (0, 2, 0, 4)\},$$

avendo preso tutti i vettori delle basi dei due sottospazi tranne il vettore in comune $(0, -1, -5, -1)$. Cerchiamo poi le equazioni cartesiane del sottospazio $(V + W)^{\perp}$:

$$< (-1, 0, -3, 0), (x_1, x_2, x_3, x_4) >= 0,$$

$$< (1, -1, -2, -1), (x_1, x_2, x_3, x_4) >= 0,$$

$$< (0, 2, 0, 4), (x_1, x_2, x_3, x_4) >= 0,$$

tre equazioni cartesiane da cui possiamo facilmente ricavare quelle parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = -3t \\ x_2 = -10t \\ x_3 = t \\ x_4 = 5t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \Longrightarrow (V+W)^{\perp} = \mathbb{L}\{(3, 10, -1, -5)\}.$$

(b) Troviamo una base per il sottospazio dato Z passando per le sue equazioni parametriche, fissando $x_1 = t$:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3t \\ x_4 = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \Longrightarrow Z = \mathbb{L}\{(1, 0, 3, 0)\},$$

quindi una base di Z é contenuta in una base di V, per cui $Z \subset V$. Essendo Z contenuto in V, il sottospazio somma coincide con il sottospazio piú grande tra i due, ossia:

$$Z + V = V = \mathbb{L}\{(1, 0, 3, 0), (1, -1, -2, -1)\};$$

analogamente, passando ai complementi ortogonali,$(Z + V)^{\perp} = V^{\perp}$, per cui il sottospazio ortogonale sará costituito dai vettori (v_1, v_2, v_3, v_4) tali che:

$$< (1, 0, 3, 0), (v_1, v_2, v_3, v_4) >= 0, \quad < (1, -1, -2, -1), (v_1, v_2, v_3, v_4) >= 0,$$

quindi avrá equazioni parametriche:

$$\begin{cases} v_1 = -3t \\ v_2 = -5t - u \\ v_3 = t \\ v_4 = u \end{cases}, \ t, u \in \mathbb{R}, \text{ quindi}$$

$$(Z + V)^{\perp} = \mathbb{L}\{(-3, -5, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\}.$$

♣

Soluzione del quarto esercizio

Le due relazioni dell'ipotesi su due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ possono essere scritte come segue:

$$\text{Se } \mathbf{v} \in V_{\lambda}(A - I_n) \implies (A - I_n)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v};$$

$$\text{se } \mathbf{v} \in V_{1+\lambda}(B - I_n) \implies (B - I_n)\mathbf{v} = (1 + \lambda)\mathbf{v} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{v},$$

tenendo presente che per ipotesi $\lambda \neq 0$. Considerando le due relazioni, per confronto si ha:

$$(A - I_n)\mathbf{v} = (B - I_n)\mathbf{v} - \mathbf{v} = (B - I_n - I_n)\mathbf{v} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (A - I_n - B + I_n + I_n)\mathbf{v} = 0 \Longrightarrow (A - B + I_n)\mathbf{v} = 0,$$

quindi necessariamente $\mathbf{v} \in \ker(A - B + I_n)$. ■

♠

Soluzione del quinto esercizio

(a) La conica $F_k(x, y) = 0$ é associata alla matrice simmetrica:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -k & 0 \\ -k & 6 & 4k \\ 0 & 4k & 3 \end{pmatrix};$$

$$\det(A_k) = 36 - 35k^2 = 0 \Longrightarrow \text{per } k_{1,2} = \pm\frac{6}{\sqrt{35}} \text{ la conica é degenere.}$$

Discutiamone ora la natura al variare del parametro k studiando il minore 2×2 nord-ovest di A_k:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -k \\ -k & 6 \end{pmatrix} = 12 - k^2;$$

$k_{1,2} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \implies F_k$ rappresenta una parabola.

$k \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty) \implies F_k$ rappresenta un'iperbole.

$k \in \left(-2\sqrt{3}, -\frac{6}{\sqrt{35}}\right) \cup \left(-\frac{6}{\sqrt{35}}, \frac{6}{\sqrt{35}}\right) \cup \left(\frac{6}{\sqrt{35}}, 2\sqrt{3}\right) \implies F_k$ rappresenta un'ellisse.

(b) Fissando $k = -2\sqrt{3}$, giá sappiamo che la conica associata é una parabola. Riconduciamola a forma canonica con il completamento dei quadrati:

$$2x^2 + 6y^2 + 4\sqrt{3}xy - 16\sqrt{3}y + 3 = 2(x + \sqrt{3}y)^2 - 6y^2 + 6y^2 - 16\sqrt{3}y + 3 = 0,$$

quindi effettuiamo il primo cambio di variabili:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y \\ y' = y \end{cases} \implies 2(x')^2 - 16\sqrt{3}y' + 3 = 0;$$

successivamente, usiamo le nuove variabili:

$$\begin{cases} x'' = \sqrt{2}x' \\ y'' = 16\sqrt{3}y' - 3 \end{cases} \implies (x'')^2 - y'' = 0,$$

quindi abbiamo raggiunto la forma canonica della parabola, meglio nota come $y'' = (x'')^2$.

♡ ♢ ♣ ♠

13.5 Prova scritta dell'8/9/2006

(1) Data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(0,1,0) = (0,0,0), \quad F(2,0,-2) = (0,0,0), \quad F(0,2,1) = (0,-1,0),$$

(a) provare che F é un'applicazione lineare ben definita;
(b) scrivere la matrice $M_E^E(F)$, dove E é la base canonica di $\mathbb{R}^3$;
(c) trovare autovalori ed autovettori di F e dire se é diagonalizzabile;
(d) trovare delle basi per i sottospazi vettoriali $\ker(F)$ e $(\ker(F))^\perp$.

*

(2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

(a) calcolare i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$;
(b) calcolare $\det(A \cdot B)$ e $\det(B \cdot A)$;
(c) trovare le equazioni parametriche e cartesiane di $\ker(B \cdot A)$.

*

(3) (a) Trovare l'equazione cartesiana del piano π di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per i punti:

$$A \equiv (2,2,2); \qquad B \equiv (0,0,4); \qquad C \equiv (0,12,0);$$

(b) trovare le eventuali intersezioni di π con la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = 5t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = -2 - t \end{cases}, \text{ con } \ t \in \mathbb{R};$$

(c) trovare le equazioni della retta s ortogonale a π nel punto C.

*

(4) Date le matrici quadrate $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, con $\det(A) \neq 0$, e dato λ autovalore di A con relativo autovettore $\mathbf{v}$, provare che:

$$\mathbf{v} \in \ker(B) \implies \mathbf{v} \in \ker(AB + BA^{-1}).$$

*

(5) (a) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il fascio di coniche di equazione:

$$F_k(x, y) = kx^2 + (1 - k)y^2 - 2kxy + 4ky - 2 = 0;$$

(b) fissato $k = 1$, ridurre a forma canonica la conica $F_1(x, y) = 0$.

* * *

Soluzione del primo esercizio

(a) L'applicazione lineare é ben definita in quanto i 3 vettori di partenza sono liberi, come si evince dal calcolo del determinante della matrice 3×3 che li contiene come vettori-riga:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

(b) Come al solito, cerchiamo le immagini dei vettori della base euclidea standard di $\mathbb{R}^3$, sfruttando sia le informazioni giá possedute nei dati dell'esercizio sia quelle ricavate via via nello svolgimento: ad esempio, tra i dati c'é giá $F(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$. Inoltre, poiché $(0, 0, 1) = (0, 2, 1) - 2(0, 1, 0)$, allora

$$F(0, 0, 1) = F(0, 2, 1) - 2F(0, 1, 0) = (0, -1, 0) - (0, 0, 0) = (0, -1, 0);$$

anche l'immagine del primo vettore della base canonica é facilmente calcolabile:

$$(1, 0, 0) = \frac{1}{2}(2, 0, -2) + (0, 0, 1) \implies$$

$$\implies F(1, 0, 0) = \frac{1}{2}F(2, 0, -2) + F(0, 0, 1) = (0, -1, 0),$$

quindi la matrice canonicamente associata ad F risulta semplicemente:

$$M_E^E(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Il polinomio caratteristico di F é λ^3, per cui c'é un unico autovalore $\lambda_1 = 0$, con molteplicitá algebrica 3. La matrice $M_E^E(F)$ ha rango 1, perché ha due righe nulle, quindi necessariamente $\dim(\ker(F)) = \dim(V_0(F)) = 2$, e questo impedisce la diagonalizzabilitá. Infatti l'autospazio relativo a 0 é dato dall'unica equazione cartesiana $x_1 + x_3 = 0$ e perció

$$V_0(F) = \ker(F) = \mathbb{L}\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\},$$

quindi la molteplicitá geometrica di 0 é 2, e siccome le due molteplicitá non coincidono, la matrice non é diagonalizzabile.

(d) Il complemento ortogonale del $\ker(F)$ é dato dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che siano verificate le condizioni di ortogonalitá con i vettori (1,0,-1) e (0,1,0):

$$\begin{cases} <(x_1,x_2,x_3),(1,0,-1)>=0 \\ <(x_1,x_2,x_3),(0,1,0)>=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \implies$$

$$\implies (\ker(F))^{\perp} = \mathbb{L}\{(1,0,1)\}.$$

Va notato che una base per il complemento ortogonale di $\ker(F)$ si puó anche ricavare dalle righe di $M_E^E(F)$ linearmente indipendenti, quindi solo dalla seconda riga.

♡

Soluzione del secondo esercizio

(a) Svolgiamo i normali prodotti righe per colonne tra le matrici A e B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

(b) $\det(AB) = 0$ perché la seconda e la terza riga della matrice prodotto sono tra loro dipendenti: $(-2) \cdot (-1,-2,0) = (2,4,0)$.
Analogamente, $\det(BA) = 0$ perché la prima e la terza riga della matrice sono uguali, e lo sono anche la seconda e la quarta.

(c) Troviamo le equazioni cartesiane di $\ker(BA)$ dal sistema lineare omogeneo associato:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases},$$

successivamente fissando due parametri otteniamo le equazioni parametriche e di conseguenza una base per il sottospazio:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 3t + 2u \\ x_3 = -3t - u \\ x_4 = u \end{cases}, t, u \in \mathbb{R} \implies \ker(BA) = \mathbb{L}\{(1, 3, -3, 0), (0, 2, -1, 1)\}.$$

♢

Soluzione del terzo esercizio

(a) Troviamo l'equazione cartesiana del piano π imponendo il passaggio del piano generico nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ $ax + by + cz + d = 0$ per i tre punti dati:

$$A \equiv (2, 2, 2) \in \pi \implies 2a + 2b + 2c + d = 0,$$
$$B \equiv (0, 0, 4) \in \pi \implies 4c + d = 0,$$
$$C \equiv (0, 12, 0) \in \pi \implies 12b + d = 0.$$

Risolviamo dunque il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite a, b, c, d:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 2c + d = 0 \\ 4c + d = 0 \\ 12b + d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{d}{6} \\ b = -\frac{d}{12} \\ c = -\frac{d}{4} \\ d = d \end{cases}.$$

Scegliendo $d = -12$ per non avere frazioni nell'equazione del piano, otteniamo l'equazione cartesiana di π:

$$2x + y + 3z - 12 = 0.$$

(b) Per trovare gli eventuali punti di intersezione della retta data r con π, sostituiamo le forme parametriche di x, y e z nell'equazione cartesiana di π appena trovata per avere un'equazione di primo grado nella variabile t:

$$2(5t) + 2 + t + 3(-2 - t) - 12 = 0 \implies 8t - 16 = 0 \implies t = 2 \implies$$
$$\implies r \cap \pi = \{(10, 4, -4)\}.$$

(c) La retta s ortogonale a π e contenente il punto C ha equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 12 \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

ed equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ x - 2y + 24 = 0 \end{cases} .$$

♣

Soluzione del quarto esercizio

Per ipotesi, A é una matrice invertibile, per cui ha nucleo banale, vale a dire $\ker(A) = (0)$, perció tra i suoi eventuali autovalori non ci puó essere lo 0. Inoltre, sappiamo che $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Se $\mathbf{v} \in \ker(B)$, then $B\mathbf{v} = 0$. Prima di provare la proprietá richiesta, ricordiamo che se $\lambda \neq 0$ é un autovalore di una matrice invertibile M, allora λ^{-1} é un autovalore della sua matrice inversa M^{-1}, vale a dire che esiste un autovettore $\mathbf{w}$ tale che $M^{-1}\mathbf{w} = \lambda^{-1}\mathbf{w}$.

$$(AB + BA^{-1})\mathbf{v} = AB\mathbf{v} + BA^{-1}\mathbf{v} = A(0) + B(A^{-1}\mathbf{v}) =$$

$$= 0 + B(\lambda^{-1}\mathbf{v}) = \lambda^{-1}B\mathbf{v} = 0,$$

quindi $\mathbf{v} \in \ker(AB + BA^{-1})$. ■

♠

Soluzione del quinto esercizio

(a) In questo caso, la matrice associata alla conica $F_k(x, y) = 0$ é:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 1-k & 2k \\ 0 & 2k & -2 \end{pmatrix};$$

$$\det(A_k) = -2k + 2k^2 - 4k^3 + 2k^2 = (-2k)(2k^2 - 2k + 1) = 0 \implies$$

$$\implies k_1 = 0,\ k_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{2} \in \mathbb{C},$$

quindi la conica risulta degenere per il solo valore reale $k = 0$. In questo caso, in particolare, l'equazione risulterá

$$F_0(x, y) = y^2 - 2 = 0 \implies y = \pm\sqrt{2},$$

due rette parallele.
Discutiamo ora il segno del minore 2×2 nord-ovest:

$$\det \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & 1-k \end{pmatrix} = k - 2k^2.$$

Per $k = \dfrac{1}{2}$ la conica é una parabola.
Per $k \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ la conica rappresenta un'ellisse.
Per $k \in (-\infty, 0) \cup (1/2, +\infty)$ la conica rappresenta un'iperbole.

(b) Riconduciamo alla sua forma canonica la conica

$$F_1(x, y) = x^2 - 2xy + 4y - 2 = 0,$$

che giá sappiamo essere un'iperbole. Il primo completamento di quadrati ci occorre, al solito, per eliminare il termine misto:

$$x^2 - 2xy + 4y - 2 = (x - y)^2 - y^2 + 4y - 2 = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x' = x - y \\ y' = y \end{cases} \implies (x')^2 - (y')^2 + 4y' - 2 = 0.$$

Successivamente, operiamo un altro cambio di variabile per eliminare il termine con la variabile y' al primo grado:

$$(x')^2 - (y' - 2)^2 - 4 - 2 = 0 \implies \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - 2 \end{cases} \implies (x'')^2 - (y'')^2 - 6 = 0.$$

Dividiamo tutta l'equazione per il termine noto, ossia 6, e con l'aiuto dell'ultimo cambio di coordinate otteniamo la forma canonica di $F_1(x, y) = 0$:

$$\frac{(x'')^2}{6} - \frac{(y'')^2}{6} - 1 = 0 \implies \begin{cases} x''' = \dfrac{x''}{\sqrt{6}} \\ y''' = \dfrac{y''}{\sqrt{6}} \end{cases} \implies (x''')^2 - (y''')^2 - 1 = 0.$$

$\heartsuit \diamondsuit \clubsuit \spadesuit$