Stefano Francaviglia

TOPOLOGIA

Seconda Edizione

ISBN: 978-1658028929

Indice

Prefazione alla seconda edizione 7

Prefazione 9

Capitolo 0. Preliminari 11
- 0.1. Uno spazio familiare: $\mathbb{R}^2$ 11
- 0.2. La nozione di distanza in matematica 12
- 0.3. Uno spazio ordinato: $\mathbb{R}$ 15
- 0.4. La nozione d'ordine in matematica 16
- 0.5. Logicamente! 17
- 0.6. Insiemistica spicciola 20

Capitolo 1. Spazi topologici 25
- 1.1. Topologie: aperti, chiusi e compagnia bella 25
- 1.2. Basi. Topologia di Zariski e altri esempi 31
- 1.3. Intorni e convergenza di successioni 35
- 1.4. Sottospazi 37
- 1.5. Assiomi di numerabilità 39
- 1.6. Spazi di Hausdorff 41
- 1.7. Continuità, funzioni aperte e omeomorfismi 42
- 1.8. Esercizi 48

Capitolo 2. Costruzioni con spazi topologici 53
- 2.1. Prodotti di spazi topologici 53
- 2.2. Quozienti 56
- 2.3. Varietà topologiche, superfici e grafi 60
- 2.4. Esercizi 63

Capitolo 3. Compattezza 67
- 3.1. Ricoprimenti e compattezza 67
- 3.2. Il Teorema del Compatto-Hausdorff 72
- 3.3. Il Teorema di Tychonoff 73
- 3.4. Compattezza vs compattezza per successioni 74
- 3.5. Locale compattezza e compattificazioni 76
- 3.6. Esercizi 81

Capitolo 4. Connessione 85
- 4.1. Connessione 85
- 4.2. Componenti connesse 89
- 4.3. Connessione per archi 89
- 4.4. Locale connessione 91
- 4.5. Una piccola digressione: connessione di insiemi totalmente ordinati 94

4.6. Esercizi 96

Capitolo 5. Topologia degli Spazi metrici 101
5.1. Spazi metrici, omotetie e isometrie 101
5.2. Proprietà di separazione degli spazi metrici e metrizzabilità 104
5.3. Cammini, lunghezze e geodetiche 105
5.4. Successioni di Cauchy e completezza 107
5.5. Completamento metrico 109
5.6. Compattezza in spazi metrici 112
5.7. Teorema di Ascoli-Arzelà 114
5.8. Esercizi 115

Capitolo 6. Topologia dal vivo 119
6.1. Riconoscere spazi diversi attraverso la connessione 119
6.2. Taglia e cuci 120
6.3. La topologia compatto-aperta 126
6.4. Gruppi topologici 128
6.5. Azioni di gruppi 130
6.6. Azioni continue, proprie e propriamente discontinue 134
6.7. La topologia degli spazi proiettivi 140
6.8. $\mathbb{RP}^2$ e la chiusura proiettiva di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ 143
6.9. $\mathbb{CP}^1$ e la compattificazione di Alexandroff di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ 145
6.10. Birapporto 146
6.11. Esercizi 147

Capitolo 7. Un pizzico di topologia algebrica: il gruppo fondamentale e i suoi amici 151
7.1. Omotopie e deformazioni 151
7.2. Gruppo fondamentale 155
7.3. Rivestimenti 159
7.4. Sollevamenti di cammini e omotopie 162
7.5. Fibre, grado e monodromia 165
7.6. Prime conseguenze importanti, Teorema del punto fisso di Brouwer e Teorema di Borsuk-Ulam 165
7.7. Rivestimenti di grafi 168
7.8. Automorfismi di rivestimento 169
7.9. Esistenza del rivestimento universale e altre questioni 174
7.10. G-spazi 177
7.11. Il teorema di Van Kampen 181
7.12. Esercizi 184

Appendice A. Minicorso di aritmentica ordinale 189
A.1. La classe degli ordinali 189
A.2. Gli ordinali di Von Neumann 193
A.3. Aritmetica ordinale 194
A.4. Esercizi 195

Appendice B. Successioni generalizzate 199
B.1. Insiemi diretti e successioni generalizzate 199
B.2. Convergenza di successioni generalizzate e continuità 200
B.3. Sottosuccessioni generalizzate e compattezza 201
B.4. Filtri, convergenza e continuità 203

B.5. Ultrafiltri e compattezza 205
B.6. Ultralimiti di successioni classiche 206
B.7. Esercizi 208

Prefazione alla seconda edizione

La seconda edizione è, per sua natura, una versione rivista e corretta della prima. In primo luogo, sono stati corretti tutti gli errori scovati nella prima edizione (ma, ahimé! è certo che ne siano rimasti alcni). Per quanto riguarda i contenuti, i capitoli che più hanno subito una ristrutturazione sono tre: Il capitolo introduttivo (Capitolo 0), il Capitolo 6 (che ha pure cambiato nome) e il Capitolo 7 sulla topologia algebrica.

Molta attenzione è stata data agli esempi ed esercizi proposti. Quantitativamente, essi sono quasi raddoppiati: la seconda edizione conta infatti 444 esempi e 614 esercizi.

Stefano Francaviglia

Pianoro, Li 10/01/2020

Prefazione

Questo libro è pensato come libro di testo di un corso universitario di topologia per la laurea triennale in matematica. Contiene nozioni di topologia generale, un assaggio di topologia algebrica (gruppo fondamentale e rivestimenti) e due appendici: un minicorso di aritmetica ordinale e un'introduzione alla teoria delle successioni generalizzate e gli ultrafiltri.

Se non ci si vuole addentrare nella topologia algebrica, i primi sette capitoli (dal Capitolo 0 al Capitolo 6) costituiscono un corso completo di topologia generale. Le due appendici trattano argomenti — spesso ingiustamente tralasciati per limiti di tempo o perché considerati a torto troppo complicati — che ho voluto includere per la loro eccezionale bellezza e incredibile semplicità.

Di ogni teorema (tranne due: il Teorema dell'invarianza del dominio e il Teorema di metrizzabilità di Uryshon) vi è una dimostrazione completa. La topologia è per sua natura famelica di esempi e foriera di domande "ma se non fosse così...". A testimonianza di ciò, questo libro contiene più di 600 tra esempi ed esercizi

Questo libro non ha una vera e propria bibliografia. Questo perché da studente ero uno che studiava sugli appunti e quello che so di topologia me l'ha insegnato principalmente il mio professore Fulvio Lazzeri. Non posso comunque fare a meno di citare, in ordine sparso e sicuro di scordarmene qualcuno, i testi e gli autori che preferisco: Il meraviglioso Kosniowski (C. Kosniowski *Introduzione alla topologia algebrica*); il classico Kelley (J. Kelley *General Topology*) con la sua famosa appendice sulla teoria degli insiemi; il moderno, anzi contemporaneo, Manetti (M. Manetti *Topologia*); il buon vecchio Sernesi (E. Sernesi *Geometria 2*); e il Fulton (W. Fulton *Algebraic Topology, a first course*) (da cui ho imparato una delle dimostrazioni del Teorema di Van Kampen); poi c'è la bibbia della logica (*Handbook of mathematical logic*, J. Barwise editore); e quella della topologia algebrica dell'Hatcher (A. Hatcher *Algebraic Topology*); l'imperdibile libro degli esempi (L.A. Steen and J.A. Seebach, Jr *Counterexamples in topology*); lo Schaum di topologia (S. Lipschutz *Topologia*, collana *Schaum teoria e problemi*) con i suoi 650 esercizi risolti; infine il mitico, talvolta illeggibile ma sempre presente, Bourbaki (N. Bourbaki serie *Éléments de mathématique*, in particolare *Topologie générale* e *Topologie algébrique*).

Nell'era del web e dei social non può mancare un cenno alle risorse online. Prima di tutto Wikipedia. Oggi come oggi rappresenta uno strumento fondamentale per lo studio e la ricerca. Per la matematica è fatto particolarmente bene. In un click si hanno definizioni (in mille varianti) note bibliografiche e spesso dimostrazioni dei teoremi. È una specie di libro universale. Con in più il pregio che nulla è garantito: chiunque può modificarlo e ciò forza (o almeno dovrebbe) ad una lettura ipercritica e al controllo di ogni singolo passaggio, cosa che non si fa mai sulle dispense del professore. Infine, voglio spezzare una lancia in favore di due siti di domande/risposte:
`mathoverflow.net` e `math.stackexchange.com`; se avete una curiosità basta chiedere.

Stefano Francaviglia

Pianoro, 17/02/2018

CAPITOLO 0

Preliminari

0.1. Uno spazio familiare: $\mathbb{R}^2$

Con ogni probabilità il lettore che inizia lo studio della topologia ha già incontrato nel suo cammino il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Tale spazio è comunemente dotato della distanza Euclidea:

$$\text{se } P_1 = (x_1, y_1) \text{ e } P_2 = (x_2, y_2) \text{ si ha } \ \operatorname{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

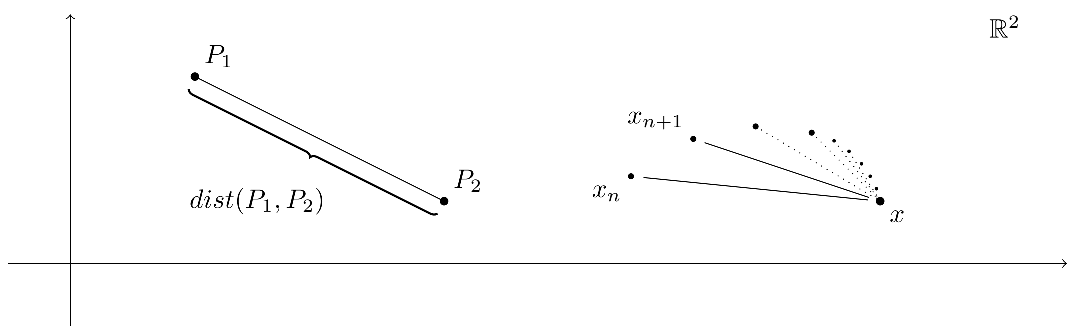


FIGURA 1. La distanza di Euclidea in $\mathbb{R}^2$

La distanza tra P_1 e P_2 corrisponde alla lunghezza del segmento che li congiunge. Si dice che una successione (x_n) converge a x se la distanza tra x_n e x tende a zero al crescere di n.

Attraverso la distanza si possono definire insiemi o luoghi classici, come la circonferenza di centro $P = (x_0, y_0)$ e raggio R:

$$C(P,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}((x,y),P) = R\}$$

oppure la **palla** di centro P raggio R (indicata con B, da *ball*):

$$B(P,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < R\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}((x,y),P) < R\}$$

La definizione di palla ammette anche la variante "chiusa", cioè con il "$\leq$" al posto del "$<$".

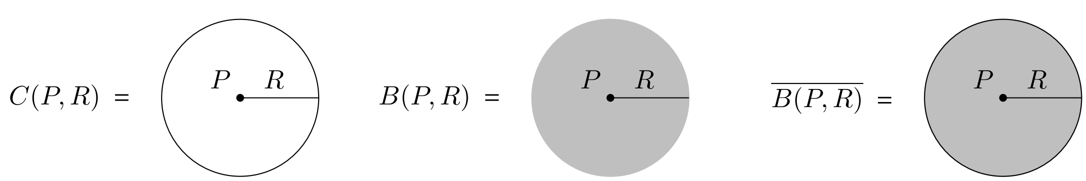


FIGURA 2. Cerchi e palle in $\mathbb{R}^2$

Spesso, la palla chiusa si indica con D, come **disco**, oppure con una B sormontata da un trattino:
$D(P,R) = \overline{B(P,R)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq R\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{dist}((x,y),P) \leq R\}$. Chiaramente $\overline{B(P,R)} = B(P,R) \cup C(P,R)$.

La distanza Euclidea di $\mathbb{R}^2$ esprime un concetto di vicinanza quantificata: un punto che sta dentro la palla di centro P e raggio 1 è più vicino a P di quanto lo sia un punto sul cerchio di centro P e raggio 25. Ancora, quando diciamo che "(x_n) converge a x" intendiamo dire semanticamente che i punti x_n si fanno sempre più vicini a x al crescere di n. Usando la terminologia delle palle, possiamo dire che (x_n) converge a x se, per quanto piccolo sia il raggio R, la successione (x_n) sta dentro la palla $B(x,R)$ da un certo n in poi.

Diciamo che una funzione f è continua se, ogni qual volta che $x_n \to x$, si ha $f(x_n) \to f(x)$. Ciò formalizza la nostra idea intuitiva di funzione continua come una funzione che "manda punti vicini in punti vicini".

La distanza serve anche a misurare la lontananza/vicinanza tra sottoinsiemi del piano. In generale, se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e $x \in \mathbb{R}^2$ diciamo che la distanza tra x e A è

$$\mathrm{dist}(x,A) = \inf_{a \in A} \mathrm{dist}(x,a)$$

e se B è un altro sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ poniamo

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} \mathrm{dist}(a,b)$$

In questo modo, la distanza tra la palla di centro $(0,0)$ e raggio 1 e quella di centro $(3,0)$ e raggio 1, è esattamente 1, come ci si aspetterebbe.

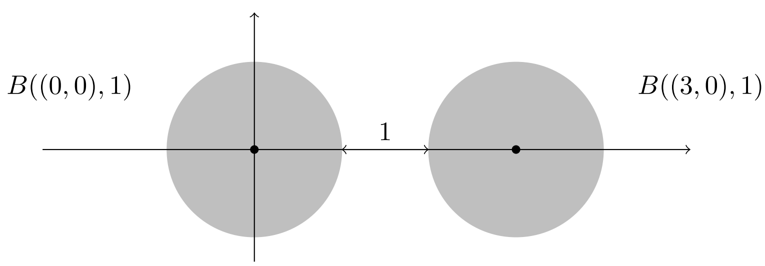


FIGURA 3. Distanza tra insiemi in $\mathbb{R}^2$

Per ogni punto $a \in A$, la distanza tra a e A è zero. Non vale però il viceversa: La distanza tra $B(P,R)$ e $C(P,R)$ è esattamente zero. I punti di $C(P,R)$ non stanno dentro la palla $B(P,R)$, ma ne sono infinitamente vicini, *aderenti* come la pellicola protettiva al display di uno smartphone.

0.2. La nozione di distanza in matematica

Quello che abbiamo visto per $\mathbb{R}^2$ lo possiamo fare in ogni spazio ove sappiamo misurare la distanza tra punti. Tali spazi si chiamano **spazi metrici**. Ma andiamo con ordine.

Definizione 0.2.1. Sia X un insieme. Una **distanza** è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che, quali che siano $x,y,z \in X$ si abbia:

(1) $d(x,y) \geq 0$ (*Positività*);
(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*Distinzione dei punti*);
(3) $d(x,y) = d(y,x)$ (*Simmetria*);
(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (*Disuguaglianza triangolare*).

Un insieme X dotato di una funzione distanza d si dice **spazio metrico**, e spesso le parole "metrica" e "distanza" sono sinonimi.

Questa definizione merita qualche commento:

Sulla positività. Innanzi tutto, notiamo che misuriamo le distanze con numeri non negativi. In alcuni contesti si accettano anche distanze a valori in $[0, \infty]$, cioè si ammettono punti a distanza infinita! Visto che lavoriamo con numeri positivi, ciò non crea troppi scompigli, se si sta attenti all'aritmetica. Porremo $x + \infty = \infty$, ma un'espressione del tipo $\infty - \infty$ richiederà più attenzione. Un altro modo di trattare tali "distanze" è quello di restringere l'insieme in zone in cui la distanza è finita. Se d è una distanza su X a valori in $[0, \infty]$, per ogni $x \in X$ si pone $M_x = \{y \in X : d(x, y) < \infty\}$. La restrizione di d a M_x è una distanza vera e propria.

Sulla distinzione dei punti. La distinzione dei punti ci dice che se due punti sono a distanza zero tra loro, allora sono invero lo stesso punto. Quando questa condizione viene meno, si suole parlare di **pseudo distanza**. In matematica se ne incontrano spesso di pseudo distanze. Un modo per ottenere una vera distanza da una pseudo distanza è quella di quozientare lo spazio per la relazione d'equivalenza data dall'avere distanza nulla. Se d è una pseudo distanza su X, si dichiara $x \sim y$ se e solo se $d(x, y) = 0$. A questo punto d induce una distanza vera e propria sul quoziente $X/\sim$.

Sulla simmetria. La simmetria è una condizione naturale sotto certi punti di vista ma non da altri. Se si pensa al piano $\mathbb{R}^2$ è chiaro che la lunghezza del segmento che unisce due punti non dipende dall'ordine in cui i punti son presi. D'altronde, si pensi alla distanza del viaggiatore: quanto ci vuole per andare da A a B? Non è detto che la strada che usiamo per andare da A a B sia la stessa che usiamo per tornare (per esempio se ci sono dei sensi unici in circolazione) e quando usiamo i programmi di navigazione satellitare questa situazione è quotidiana. Quando una funzione soddisfa tutte le condizioni per essere una distanza, tranne la simmetria, si parla di distanza **asimmetrica** e in questo caso la disuguaglianza triangolare va scritta nel verso giusto! Di distanze asimmetriche in matematica ce ne sono molte. Anche queste non creano molti problemi e si può sempre ottenere una distanza da una distanza asimmetrica per simmetrizzazione: se d è una distanza asimmetrica la funzione $\delta(x, y) = d(x, y) + d(y, x)$ è una distanza vera e propria.

La disuguaglianza triangolare è il nòcciolo del concetto matematico di distanza. Non se ne può fare a meno. La disuguaglianza triangolare asserisce che un lato di un triangolo è sempre minore della somma degli altri due. Questa condizione è naturale anche dal punto di vista del viaggiatore: Per andare da A a B, se passo da C, nel migliore dei casi ci metto lo stesso tempo, ma di sicuro non ho un guadagno netto. Succede spesso in matematica di trovarsi di fronte a una **distanza moltiplicativa** in cui la disuguaglianza triangolare diventa $d(x, y) \leq d(x, z)d(z, y)$. Nelle distanze moltiplicative di solito si richiede $d(x, y) \geq 1$ e $d(x, y) = 1$ se e solo se $x = y$. In questo caso, se d è una distanza moltiplicativa allora $\log(d)$ è una distanza vera e propria.

Vediamo adesso alcuni semplici ma importanti esempi di spazi metrici.

Esempio 0.2.2. La metrica **Euclidea** (o standard) su $\mathbb{R}$ è data da $d(x, y) = |x - y|$. (Si noti che $|a| = \sqrt{a^2}$.)

Esempio 0.2.3. La metrica **Euclidea** (o standard) su $\mathbb{R}^n$ è data da

$$d(v, w) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

(ove $v = (x_1, \dots, x_n)$ e $w = (y_1, \dots, y_n)$).

Definizione 0.2.4. Le sfere S^n e i dischi D^n sono per convenzione i seguenti insiemi

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \quad D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Si noti che S^1 altro non è che il cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$ e che S^2 è la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$ (che presta il nome "sfera" a tutte le altre dimensioni). D^n non è altro che la palla chiusa di $\mathbb{R}^n$, centrata nell'origine e di raggio unitario.

Esempio 0.2.5. Su S^2 si possono mettere varie metriche naturali, per esempio la distanza $d_{\mathbb{R}^3}$ indotta da $\mathbb{R}^3$ e quella angolare: $d_{\text{ang}}(x, y)$ è la lunghezza minima di un arco di cerchio che connette x e y. Tali distanze sono diverse in quanto, per esempio, le distanze tra polo nord $N = (0, 0, 1)$ e polo sud $S = (0, 0, -1)$ sono:

$$d_{\mathbb{R}^3}(N, S) = 2 \qquad d_{\text{ang}}(N, S) = \pi$$

Esempio 0.2.6 (La metrica della città.). Sia X una città. Si definisce $d(P, Q)$ come la distanza minima per andare a piedi da P a Q.

Esempio 0.2.7 (I raggi di bicicletta). In $\mathbb{R}^2$, la cui origine chiamiamo O, sia X l'insieme formato da 36 rette equidistribuite angolarmente:

$$X = \{\lambda(\cos\frac{k\pi}{36}, \sin\frac{k\pi}{36}) : \lambda \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

La metrica dei raggi di su X è definita come

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_{\mathbb{R}^2}(P, Q) & \text{se } P \text{ e } Q \text{ giacciono sulla stessa retta} \\ d_{\mathbb{R}^2}(P, O) + d_{\mathbb{R}^2}(O, Q) & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

La metrica dei raggi di bicicletta è simile a quella della città: la distanza tra P e Q infatti è la distanza che si deve percorrere per andare da P a Q senza uscire da X.

Esempio 0.2.8. Su $\mathbb{R}^2$ definiamo la **metrica dei raggi** come

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_{\mathbb{R}^2}(P, Q) & \text{se } \exists\lambda \in \mathbb{R} : P = \lambda Q \\ d_{\mathbb{R}^2}(P, O) + d_{\mathbb{R}^2}(O, Q) & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

La metrica dei raggi è simile a quella di una ruota di bicicletta con infiniti raggi: per andare da P a Q, se essi non sono sullo stesso raggio, si deve per forza passare dall'origine.

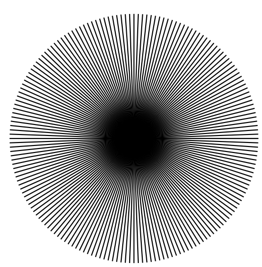


FIGURA 4. Rappresentazione visiva della metrica dei raggi su $B(O, 1)$

Esempio 0.2.9 (Distanza $0/1$). La **distanza** $0/1$ su un insieme X è definita come

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Negli spazi metrici le nozioni di palla, di successione convergente e funzione continua si danno come in $\mathbb{R}^2$.

Definizione 0.2.10. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per ogni $x \in X$ e $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ la **palla** di centro x e raggio ε è definita come

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Tale definizione ammette anche la versione "chiusa" con il "$\leq$" al posto di "$<$". È comodo usare la notazione "D" per le palle chiuse

$$D(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

Esercizio 0.2.11. Dimostrare che tutte le distanze sopra descritte rispettano le condizioni della Definizione 0.2.1. Descrivere le palle di ognuna di esse.

Definizione 0.2.12. Sia (X,d) uno spazio metrico. Una successione (x_n) in X **converge** a $x \in X$, e si scrive $x_n \to x$, se e solo se $d(x_n,x) \to 0$.

Definizione 0.2.13. Siano X, Y due spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** se ogni qual volta $x_n \to x$, si ha $f(x_n) \to f(x)$.

Esempio 0.2.14. Sia $X = \mathbb{R}^2$ e sia $x_n = (1, \frac{1}{n})$. La successione (x_n) converge a $(1,0)$ per la metrica standard di $\mathbb{R}^2$ ma non per la metrica dei raggi.

0.3. Uno spazio ordinato: $\mathbb{R}$

Dati due punti distinti $x, y \in \mathbb{R}$ è possibile dire qual è il più grande. Così 1 è minore di 2 che è minore di e che è minore di π. La cosa vale anche se i numeri sono negativi: -4 è minore di -2 che è minore di 0. Si noti che la stessa cosa non la possiamo fare con $\mathbb{C}$: chi è il più grande tra 1 e i?

Attraverso l'ordine di $\mathbb{R}$ si possono definire gli intervalli, che possono essere aperti, chiusi o semi aperti/chiusi a destra/sinistra:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \qquad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \qquad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Si suole fare uso anche dei simboli $\pm\infty$, volendo semanticamente indicare quantità che sono rispettivamente la più grande di tutti (∞), e la più piccola di tutti ($-\infty$). Si noti che malgrado l'uso comune, $\pm\infty$ non sono numeri reali. Si definiscono gli intervalli infiniti

$$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R} \qquad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \qquad (a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \qquad [a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

Talvolta si possono usare anche intervalli "chiusi all'infinito", tipo $(0,\infty]$, quando il significato ne sia chiaro dal contesto.

Nel caso di $\mathbb{R}$ le nozioni di distanza e di ordine coesistono senza entrare in competizione. Si noti infatti che le palle metriche aperte/chiuse non sono altro che intervalli aperti/chiusi e viceversa:

$$B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \qquad \overline{B(x,\varepsilon)} = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$$

$$(a,b) = B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}) \qquad \text{(per } a < b\text{)}$$

La nozione di successione convergente si può dare usando l'ordine: $x_n \to x$ se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ per ogni n sufficientemente grande. In $\mathbb{R}$ si possono anche definire successioni "divergenti", ossia convergenti a $\pm\infty$: $x_n \to +\infty$ se per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha $x_n > M$ per ogni n sufficientemente grande (e similmente per $-\infty$). Si noti che in $\mathbb{R}^2$ non ha senso dire che una successione converge a $-\infty$.

0.4. La nozione d'ordine in matematica

Per definire gli intervalli non abbiamo usato particolari proprietà di $\mathbb{R}$, tranne l'ordine.

Definizione 0.4.1. Sia X un insieme. Una relazione d'ordine su X, o semplicemente **ordine**, è una relazione binaria $\leq$ tale che:

(1) $x \leq x$ (*Riflessività*);
(2) $(x \leq y$ e $y \leq x) \Rightarrow x = y$ (*Antisimmetria*);
(3) $(x \leq y$ e $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (*Transitività*).

Si usa introdurre il simbolo di "minore stretto" $x < y$ come abbreviazione di "$x \leq y$ e $x \neq y$". Un ordine si dice **totale** o **lineare** se per ogni $x, y \in X$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Spesso un ordine si dice **parziale** per specificare che non è totale.

Esempio 0.4.2. L'ordine usuale di $\mathbb{R}$ è un ordine totale.

Esempio 0.4.3 (Insieme delle parti). Dato un insieme X, l'insieme $\mathcal{P}(X)$ delle sue parti (o sottoinsiemi) risulta parzialmente ordinato dalla relazione d'inclusione $A \subseteq B$. Tale ordine non è totale in quanto due elementi di $\mathcal{P}(X)$ non sono necessariamente uno nell'altro, quindi $\mathcal{P}(X)$ contiene elementi non confrontabili.

Esempio 0.4.4 (Ordine lessicografico). Dati due insiemi ordinati X, Y si definisce l'ordine lessicografico sul prodotto $X \times Y$ ponendo

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \quad \text{oppure} \\ x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 < y_2 \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^2$ l'ordine lessicografico asserisce che $(1, 9) < (2, 1) < (3, 8) < (3, 9)$. L'ordine lessicografico è quello con cui sono ordinate le parole di un vocabolario: prima vengono tutte le parole che iniziano con a, poi quelle con b etc... Se due parole iniziano con la stessa lettera si guarda la seconda e cosi via. L'ordine lessicografico è totale se e solo se lo sono entrambi gli ordini su X e Y.

Esempio 0.4.5 (Ordine prodotto). Dati due insiemi ordinati X, Y si definisce l'ordine prodotto su $X \times Y$ ponendo

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ e } y_1 < y_2)$$

Esercizio 0.4.6. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ con l'ordine prodotto non è totalmente ordinato.

Definizione 0.4.7. Dato un insieme totalmente ordinato $(X, \leq)$ si definiscono gli **intervalli**:

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in X : a \leq x < b\} \qquad (a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\}$$

e, sempre che ∞ non denoti un preciso elemento di X, si suole definire

$$(-\infty, b) = \{x \in X : x < b\} \qquad (a, \infty) = \{x \in X : x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in X : x \leq b\} \qquad [a, \infty) = \{x \in X : x \geq a\}$$

Tali definizioni si usano talvolta anche su insiemi parzialmente ordinati.

Esercizio 0.4.8. Si visualizzino gli intervalli di $\mathbb{R}^2$ munito dell'ordine lessicografico e di quello prodotto. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false (per entrambi gli ordini):

(1) $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2, \forall X \in (P, Q) \exists \varepsilon > 0 : B(X, \varepsilon) \subseteq (P, Q)$.
(2) $\forall X \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q \in B(X, \varepsilon) : (P, Q) \subseteq B(X, \varepsilon)$.
(3) $\forall X \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0 \forall P, Q \in B(X, \varepsilon),\ (P, Q) \subseteq B(X, \varepsilon)$.

0.5. Logicamente!

Per affrontare serenamente lo studio della topologia è bene avere delle solide basi di logica matematica elementare. Il lettore che non si è spaventato di fronte all'Esercizio 0.4.8 (e lo ha saputo risolvere) può stare tranquillo. Per gli altri, ecco un *Bignami* di logica basilare.

La logica matematica si discosta dalla logica comune in quanto la logica matematica deve essere univoca. Per esempio, comunemente si può accettare che la frase "Mario ha gli occhi verdi" sia *una* negazione di "Mario ha gli occhi neri". In matematica invece, ciò è inaccettabile. **La** negazione di una frase A deve essere una frase B che sia vera tutte e sole le volte in cui A è falsa. Mario potrebbe non avere gli occhi, oppure averceli azzurri, ma in entrambi i casi non li avrebbe neri, né verdi. In matematica la negazione di "Mario ha gli occhi verdi" suonerebbe semplicemente "Mario *non* ha gli occhi verdi".

In matematica (semplificando un po' il discorso) le frasi possono avere un solo valore di verità: *vero* o *falso*. I **connettivi** logici servono per costruire nuove frasi a partire da altre. La verità delle frasi costruite dipenderà univocamente dai valori di verità delle frasi componenti. Un connettivo è quindi identificato da quella che si chiama la sua **tavola di verità**. Vediamo i connettivi più comuni.

La negazione: Simbolo $\neg$. Ha il significato semantico di negare. È un connettivo *unario*, cioè ha un solo argomento, dato A si scrive $\neg A$ per indicare la negazione di A. La sua tavola di verità è

A	V	F
$\neg A$	F	V

La congiunzione: Simbolo $\wedge$. Ha il significato semantico della congiunzione "e". È un connettivo *binario*, date A e B si scrive $A \wedge B$. La sua tavola di verità è

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \wedge B$	V	F	F	F

La disgiunzione: Simbolo $\vee$. Ha il significato semantico dell' "o" non esclusivo. È un connettivo *binario*, date A e B si scrive $A \vee B$. La sua tavola di verità è

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \vee B$	V	V	V	F

Si noti che i simboli $\vee, \wedge$ ricordano quelli di $\cup, \cap$ per l'unione e intersezione di insiemi. Ciò è semanticamente coerente in quanto l'insieme dei casi in cui $A \vee B$ è vera è l'unione dei casi in cui A è vera e dei casi in cui B lo è, e un discorso analogo vale per $\wedge$. Similmente, il simbolo di negazione corrisponde al passaggio al complementare: L'insieme dei casi in cui $\neg A$ è vera è il complementare dell'insieme dei casi in cui A lo è.

L'implicazione: Simbolo $\Rightarrow$. Ha il significato semantico della causalità. È un connettivo *binario*, date A e B si scrive $A \Rightarrow B$. La sua tavola di verità è

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Rightarrow B$	V	F	V	V

Si noti che se A è falsa allora $A \Rightarrow B$ è vera. (Semanticamente la frase "se piove prendo l'ombrello" è vera anche nei giorni in cui non piove.) A questo punto il lettore insoddisfatto dall'interpretazione semantica del connettivo $\Rightarrow$, non dovrebbe interrogarsi sul "perché" l'implicazione logica sia definita così, ma accettare il fatto compiuto: La matematica è fatta di convenzioni e questa è una di quelle. Durante le dimostrazioni e gli esercizi ci si deve attenere alla tavola di verità di $\Rightarrow$, non alla propria interpretazione personale della parola "implica"!

L'equivalenza: Simbolo $\Leftrightarrow$. Ha il significato semantico dell'equivalenza. È un connettivo *binario*, date A e B si scrive $A \Leftrightarrow B$. La sua tavola di verità è

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Leftrightarrow B$	V	F	F	V

I connettivi si possono concatenare, per esempio $\neg(A \vee B)$ ha il valore opposto a $(A \vee B)$ quindi

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$\neg(A \vee B)$	F	F	F	V

Si noti che $\neg(A \vee B)$ ha la stessa tavola di verità di $(\neg A) \wedge (\neg B)$

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$\neg A$	F	F	V	V
$\neg B$	F	V	F	V
$\neg(A) \wedge (\neg B)$	F	F	F	V

Possiamo quindi dire che $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$. La lista seguente raccoglie le equivalenze più usate in matematica. Tali equivalenze possono essere facilmente verificate scrivendo le tavole di verità.

- $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$;
- $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$;
- $\neg\neg A = A$;
- $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;
- $A \Rightarrow B = B \vee (\neg A)$;
- $A \Rightarrow B = (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$;
- $\neg(A \Rightarrow B) = (\neg B) \wedge A$;
- $\neg(A \Leftrightarrow B) = (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$;
- $A \Leftrightarrow B = (\neg B) \Leftrightarrow (\neg A)$.

In matematica (come nelle vita) la verità di un'affermazione può dipendere da vari parametri. Si scrive $A(x)$ quando una frase A dipende da un parametro x. Quando si asserisce $A(x)$ si deve specificare se ciò sia vero solo per qualche valore di x o se invece la verità di $A(x)$ non dipende da x. Per esempio "x è un numero pari" è vera solo se x è pari, mentre $x + 1 > x$ è vera sempre. Per questo in matematica si introducono i **quantificatori**.

Quantificatore universale: Simbolo $\forall$. Ha il significato semantico di "per ogni"

$$\forall x A(x)$$

è vera se la frase $A(x)$ è vera per ogni valore di x. Volendo, si può specificare un insieme di valori per cui si richiede che $A(x)$ sia vera

$$\forall x \in \mathbb{N}, 2x \text{ è un numero pari}$$

è una frase vera, ma certamente $2\frac{1}{2} = 1$ non è pari quindi la frase "$\forall x, 2x$ è pari" è falsa.

Quantificatore esistenziale: Simbolo $\exists$. Ha il significato semantico di “esiste almeno un parametro tale che...”

$$\exists x A(x)$$

è vera se esiste almeno un valore di x per cui la frase $A(x)$ sia vera. Volendo, si può restringere la richiesta di esistenza ad un insieme specifico di valori

$$\exists x \in \mathbb{N} : 2x = \pi$$

è una frase falsa, ma ovviamente $2\frac{\pi}{2} = \pi$ e quindi la frase “$\exists x : 2x = \pi$” è vera.

Valgono le seguenti utili regole

$$\neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x) \qquad \neg(\exists x A(x)) = \forall x \neg A(x).$$

Infine, i quantificatori possono essere concatenati e usati insieme ai connettivi, per esempio:

$$\forall x \exists y (A(y) \Rightarrow B(x,y))$$

che, negata, diventa

$$\exists x \forall y \neg\big(A(y) \Rightarrow B(x,y)\big) = \exists x \forall y \big(A(y) \wedge \neg(B(x,y))\big).$$

Come avrete notato spesso, (ma non sempre) si fa seguire il $\forall x$ da una virgola e il $\exists x$ da due punti. La virgola in questo caso ha il significato semantico di “si ha che”. I due punti dopo l’$\exists x$ hanno il significato semantico di “tale che”. Le parentesi, che si possono omettere se non necessarie, servono per fugare eventuali dubbi: $\neg A \Rightarrow B$ significa $\neg(A \Rightarrow B)$ oppure $(\neg A) \Rightarrow B$?

Cocludiamo questa breve carrellata sulla logica dei predicati con qualche commento sull’uso del simbolo “!” in matematica. Messo dopo l’$\exists$ serve a indicare l’unicità.

$$\exists ! x A(x)$$

Significa che esiste un **unico** valore del parametro x tale che $A(x)$ sia vera. Quindi

$$\exists ! x : A(x) = \exists x \Big(A(x) \wedge \big(\forall y (A(y) \Rightarrow x = y)\big)\Big)$$

Esercizio 0.5.1. Negare $\exists ! x A(x)$.

Esercizio 0.5.2. Negare e scrivere la tavola di verità di $(A \vee (B \wedge C))$.

Esercizio 0.5.3. Scrivere la tavola di verità di $(A \wedge B) \vee (\neg(\neg B \Rightarrow A))$.

Esercizio 0.5.4. Scrivere la tavola di verità di $(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)$ e della sua negazione.

Esercizio 0.5.5. Negare $(A \vee B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg C)$.

Esercizio 0.5.6. Negare $\forall x (\exists y (\forall z (A(y) \Rightarrow B(x,z))))$.

Esercizio 0.5.7. Negare $\forall x \in A, P(x)$.

Esercizio 0.5.8. Negare $\exists x \in A : P(x)$.

Esercizio 0.5.9. Negare $\forall x \in A (\exists y \in B : N(x,y))$.

Esercizio 0.5.10. Negare $\forall x \in A \forall y \in B \exists z : C(x,y,z)$.

Esercizio 0.5.11. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Interpretare semanticamente e negare la proposizione $P(\mathcal{A})$, dipendente da $\mathcal{A}$ cosí definita:

$$P(\mathcal{A}) = \forall x \in X \exists A \in \mathcal{A} : x \in A.$$

Esercizio 0.5.12. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Interpretare semanticamente e negare la proposizione $Q(\mathcal{A})$, dipendente da $\mathcal{A}$ cosí definita:

$$Q(\mathcal{A}) = \exists n \in \mathbb{N} : \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} : \forall x \in X \exists k \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_k.$$

Esercizio 0.5.13. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Siano $P(\mathcal{A})$ e $Q(\mathcal{A})$ come negli Esercizi 0.5.11 e 0.5.12. Interpretare semanticamente e negare $P(\mathcal{A}) \Rightarrow Q(\mathcal{A})$.

Esercizio 0.5.14. Sia X un insieme e siano $P(\mathcal{A})$ e $Q(\mathcal{A})$ come negli Esercizi 0.5.11 e 0.5.12. Interpretare semanticamente e negare

$$\forall \mathcal{A}, P(\mathcal{A}) \Rightarrow Q(\mathcal{A}).$$

Esercizio 0.5.15. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Tradurre in formule e negare la frase: "L'intersezione di tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ è non vuota".

Esercizio 0.5.16. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Tradurre in formule e negare la frase: "L'intersezione di un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$ è non vuota".

Esercizio 0.5.17. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Tradurre in formule e negare la frase: "Esiste un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$ la cui intersezione è non vuota".

Esercizio 0.5.18. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Tradurre in formule e negare la frase: "Se l'intersezione di ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{A}$ è non vuota, allora esiste un elemento di X comune a tutti gli elementi di $\mathcal{A}$".

Esercizio 0.5.19. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Tradurre in formule e negare la frase: "L'intersezione di un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$ sta in $\mathcal{A}$". Si dia un esempio concreto di insieme X e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ per cui tale frase risulti vera.

Esercizio 0.5.20. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Tradurre in formule e negare la frase: "Unione di elementi di $\mathcal{A}$ sta in $\mathcal{A}$". Si dia un esempio concreto di insieme X e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ per cui tale frase risulti vera.

Esercizio 0.5.21. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Tradurre in formule e negare la frase: "Il complementare di ogni elemento di $\mathcal{A}$ sta in $\mathcal{A}$". Si dia un esempio concreto di insieme X e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ per cui tale frase risulti vera.

Esercizio 0.5.22. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Tradurre in formule e negare la frase: "$\mathcal{A}$ contiene un elemento il cui complementare sta in $\mathcal{A}$". Si dia un esempio concreto di insieme X e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ per cui tale frase risulti vera.

Esercizio 0.5.23. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Tradurre in formule e negare la frase: "Il complementare di nessun elemento di $\mathcal{A}$ sta in $\mathcal{A}$". Si dia un esempio concreto di insieme X e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ per cui tale frase risulti vera.

0.6. Insiemistica spicciola

Ci sono alcune cosette basilari di teoria degli insiemi che a volte creano scompiglio, spesso anche perché si usano espressioni ricche di significato semantico — come "funzione da X a Y" — dimenticando la definizione matematica. L'uso di queste abbreviazioni semantiche è indispensabile, altrimenti per esempio questo libro sarebbe di 3000 pagine, ma non si deve mai scordare la vera definizione di ciò di cui stiamo parlando.

Mettiamo dei puntini su qualche i. Spesso, quando si ha a che fare con insiemi di sottoinsiemi di un insieme dato, per non attorcigliarsi la lingua si usa parlare di famiglie di sottoinsiemi. Per quanto riguarda gli scopi di questo libro, le parole "famiglia" e "insieme" sono sinonimi. Un insieme per noi sarà caratterizzato dagli elementi che esso contiene, in particolare vi sarà un unico **insieme vuoto**, denotato con $\emptyset$. Adotteremo la notazione delle parentesi graffe: dentro le parentesi graffe si (de)scrivono gli elementi di un insieme. Si noti che la scrittura $\{x, x\}$ denota l'insieme che contiene solo l'elemento x (anche se esso appare ripetuto) esattamente come la scrittura $\{x\}$. Le due scritture denotano quindi lo stesso insieme. I simboli $\in, \subseteq, \subset$ denotano l'appartenenza, l'inclusione e l'inclusione stretta rispettivamente. Li useremo anche da destra verso sinistra: "$X \ni x$" è equivalente a "$x \in X$". Mentre l'appartenenza viene insieme alla definizione di insieme, l'inclusione si può definire da essa:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Dato un insieme X, l'**insieme delle parti** di X, denotato $\mathcal{P}(X)$, è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X: $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$.

Esempio 0.6.1. Se $X = \{a, b, c\}$ allora $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. Si noti che $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e anche $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si noti che $X \in \mathcal{P}(X)$ ma $X \not\subseteq \mathcal{P}(X)$.

Esempio 0.6.2. Se $X = \emptyset$, allora $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{X\}$. In questo caso X è sia un elemento che un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$.

Esempio 0.6.3. Se $X = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, allora $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, X\}$. Anche in questo caso X è sia un elemento che un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$.

Come abbiamo visto, X è un elemento di $\mathcal{P}(X)$ ma non necessariamente un suo sottoinsieme. Vi è però una "fotocopia" di X in $\mathcal{P}(X)$. Per ogni $x \in X$, il **singoletto** $\{x\}$ è il sottoinsieme di X che ha x come unico elemento. L'insieme dei singoletti di X è in corrispondenza biunivoca con X e, per definizione, è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$. Con abuso di linguaggio, succede spesso di trattare i punti di un insieme X anche come elementi di $\mathcal{P}(X)$: è bene sapere che quello che si sta facendo non è altro che associare ad ogni elemento $x \in X$ il suo singoletto $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$.

Attraverso gli insiemi si definiscono le nozioni di base. Per esempio, la **coppia ordinata** (x, y) si può definire alla Kuratowski come l'insieme $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ (si noti che $(x, x) = \{\{x\}\}$). Il **prodotto cartesiano** $X \times Y$ di due insiemi è l'insieme di tutte le coppie ordinate il cui primo elemento sta in X e il secondo in Y:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

L'**unione** e l'**intersezione** di due insiemi sono definite in modo naturale da

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \vee (x \in B) \qquad\qquad x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \wedge (x \in B)$$

equivalentemente,

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \qquad\qquad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

La **differenza** è data da

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

e, se $A \subseteq B$, il **complementare** di A in B è definito come

$$A^c = B \setminus A.$$

Si noti che la scrittura A^c non menziona B, ma il complementare è **di A in B**. In particolare, nel caso in cui $A \subset B \subset C$ il complementare di A in B è diverso dal complementare di A in C. Di solito è chiaro dal contesto in quale ambiente si faccia il complementare, altrimenti si dovrà specificare. Il complementare del vuoto è il tutto, il complementare del tutto è il vuoto e $(A^c)^c = A$.

Capita di voler fare quella che si chiama l'**unione disgiunta** di due insiemi A, B, che comunemente è denotata $A \sqcup B$. Con questo si intende che si fa l'unione di A e di B, ma gli elementi comuni si considerano diversi. È come se dipingessimo A di verde e B di rosso e poi se ne facesse l'unione: di ogni elemento di $A \cap B$ avremmo la copia verde e quella rossa. In matematica, per *dipingere* le cose, basta fare il prodotto cartesiano con un insieme di etichette, come si fa in informatica per *taggare* le cose. L'unione disgiunta di A e B si può quindi formalmente definire (se A e B sono diversi) come

$$A \sqcup B = (A \times \{A\}) \cup (B \times \{B\}) \subseteq (A \cup B) \times \{A, B\}$$

Esempio 0.6.4. Se $A = [0, 2]$ e $B = [1, 3]$ sono comuni intervalli di $\mathbb{R}$, allora $A \cup B = [0, 3]$ mentre $A \sqcup B$ è fatto di elementi del tipo (x, A) o (x, B). Per esempio il punto $(1, A)$ e il punto $(1, B)$ indicano il punto 1 *taggato* una volta con A e una volta con B.

Se si vuol fare l'unione disgiunta di due o più copie dello stesso insieme, basta avere l'accortezza di usare come insieme di etichette un insieme opportuno di indici.

Esempio 0.6.5. L'unione disgiunta di due copie di $\mathbb{R}$ può essere definita, usando etichette nell'insieme $\{0, 1\}$, come

$$\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} = \{(x, e) : x \in \mathbb{R}, e = 0, 1\}.$$

Un altro concetto con un nome semanticamente intuitivo, ma la cui definizione formale spesso sfugge, è quello di relazione. Una **relazione** su un insieme X è semplicemente un sottoinsieme R di $X \times X$. Si dice che "x è in relazione con y", e si scrive usualmente xRy, come sinonimo di "$(x, y) \in R$".

Esempio 0.6.6. Una relazione di equivalenza su X è una relazione che sia:

Riflessiva: per ogni $x \in X$ si ha xRx, cioè $(x, x) \in R$. Graficamente si sta chiedendo che R contenga la diagonale di $X \times X$.

Simmetrica: per ogni $x, y \in X$ si ha $xRy \Leftrightarrow yRx$, cioè $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$. Graficamente, si chiede che R coincida con il suo simmetrico rispetto alla diagonale.

Transitiva: per ogni $x, y, z \in X$ si ha $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$, cioè $((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$.

Esercizio 0.6.7. Si cerchi di visualizzare graficamente il significato della proprietà transitiva.

Esempio 0.6.8. La relazione di equivalenza banale è quella definita da: xRy se e solo se $x = y$. In termini di sottoinsiemi, è la diagonale di $X \times X$.

Esempio 0.6.9. La relazione di equivalenza totale, cioè quella per cui ogni x è equivalente ad ogni y, corrisponde a tutto $X \times X$.

Per le relazioni di equivalenza si usa solitamente la notazione $x \sim y$ per indicare che x è equivalente a y. Dato una qualsiasi relazione R su X, la relazione di equivalenza **generata da** R è la più piccola relazione d'equivalenza contenente R. Ciò ha senso perché le relazioni sono insiemi e le condizioni di simmetria, riflessività e transitività sono chiuse per intersezione; in particolare la relazione d'equivalenza generata da R è l'intersezione di tutte le relazioni di equivalenza contenenti R (si noti che la relazione di equivalenza totale contiene R).

Una relazione si può dare anche su più copie di X e anche su collezioni di insiemi diversi tra loro. Per esempio una relazione binaria su X e Y sarà un sottoinsieme di $X \times Y$.

Veniamo adesso al concetto di **funzione**. Matematicamente, una funzione $f : X \to Y$ è un sottoinsieme $F \subseteq X \times Y$ tale che per ogni $x \in X$ esiste un unico $y \in Y$ tale che $(x, y) \in F$. La frase "$f(x) = y$" è un perfetto sinonimo di $(x, y) \in F$. In pratica F è quello che comunemente si chiama il grafico di f. (Nel linguaggio delle relazioni, le funzioni si chiamano anche **relazioni funzionali**).

Esempio 0.6.10. La funzione identità da un insieme X in sé, cioè $f(x) = x$ per ogni $x \in X$, corrisponde alla diagonale di $X \times X$.

Anche se la definizione di funzione è data attraverso il grafico e nonostante le confusioni che possono derivare dal loro uso, il familiare formalismo $f : X \to Y$ e la corrispondente scrittura $f(x) = y$ sono troppo comodi per abbandonarli, e anche noi ci atterremo a quest'usanza.

Si noti che una funzione $f : X \to Y$ è definita per ogni elemento $x \in X$. In alcune materie, per esempio l'analisi, a volte si parla di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ anche se non sono definite ovunque. Non è un problema, basta saperlo.

Esempio 0.6.11. La funzione $f(x) = 1/x$ è comunemente considerata una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non definita in $x = 0$. Sarebbe più preciso dire che è una funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

Una funzione si dice **iniettiva** se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. In termini di grafici, $F \subseteq X \times Y$ rappresenta una funzione iniettiva se (oltre a essere una funzione) per ogni $y \in Y$ esiste al massimo un $x \in X$ tale che $(x, y) \in F$. Volendo visualizzare, l'iniettività corrisponde al fatto che F interseca le rette "orizzontali" di $X \times Y$ in al più un punto.

Una funzione si dice **suriettiva** se per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$. In termini di grafici, $F \subseteq X \times Y$ rappresenta una funzione suriettiva se (oltre a essere una funzione) per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $(x, y) \in F$. Cioè, f è suriettiva se F interseca ogni retta orizzontale.

Una funzione si dice **biunivoca** se per ogni $y \in Y$ esiste un unico x tale che $f(x) = y$. In termini di grafici, $F \subseteq X \times Y$ rappresenta una funzione biunivoca se (oltre a essere una funzione) per ogni $y \in Y$ esiste un unico $x \in X$ tale che $(x, y) \in F$. Si noti la somiglianza tra la condizione di biunivocità e la definizione di funzione.

Una funzione biunivoca si dice anche **invertibile**, l'inversa di f si denota con f^{-1} ed è una funzione $f^{-1} : Y \to X$. In termini di grafici F è praticamente lo stesso sottoinsieme, solo che lo si considera come sottoinsieme di $Y \times X$.

Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ la **composizione** di f con g, denotata da $g \circ f : X \to Z$ è definita come $g \circ f(x) = g(f(x))$. In termini di grafici, $(x, z) \in G \circ F$ se esiste $y \in Y$ tale che $(x, y) \in F$ e $(y, z) \in G$.

Esempio 0.6.12. La fuzione $(1 + x)^2$ è la composizione di $f(x) = 1 + x$ e $g(y) = y^2$.

Un buon trucco per ricordarsi che nella composizione $g \circ f$ si applica prima la f e poi la g, è quello di *leggere* il simbolo $\circ$ come *dopo*. Così, leggendo $g \circ f$ si dice g *dopo* f. Sembra una bazzecola, ma risulta comodissimo.

Esempio 0.6.13. Se $f : X \to Y$ è invertibile, allora $f \circ f^{-1}$ è l'identità di Y. La funzione $f^{-1} \circ f$ è invece l'identità di X.

Esercizio 0.6.14. Dimostrare che $f : X \to Y$ è invertibile se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che $f \circ g = Id_Y$ e $g \circ f = Id_X$. Dimostrare che in tal caso si ha $g = f^{-1}$.

Esercizio 0.6.15. Dimostrare che $f : X \to Y$ è iniettiva se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che $g \circ f = Id_X$. (Una tale g si chiama **inversa sinistra**).

Esercizio 0.6.16. Dimostrare che $f : X \to Y$ è suriettiva se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che $f \circ g = Id_Y$. (Una tale g si chiama **inversa destra**).

Esercizio 0.6.17. Trovare un esempio di funzione $f : X \to Y$ che ammetta un'inversa destra ma non un'inversa sinistra e viceversa.

Adesso che abbiamo chiarito un po' le cose, ricomplichiamole. Non per masochismo, ma perché a volte ci sono notazioni che, pur imprecise, sono estremamente comode da usare.

Ogni funzione $f : X \to Y$ induce una funzione, sempre chiamata f, ma questa volta

$$f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$$

definendo naturalmente, per ogni $A \subseteq X$,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

In altre parole, $f(A)$ è l'insieme di tutti gli elementi del tipo $f(x)$ al variare di x in A. Tale insieme si chiama comunemente l'**immagine** di A o l'immagine di A tramite f, o anche la f-immagine di A.

Allo stesso modo si definiscono le **preimmagini** (dette talvolta controimmagini) di insiemi in Y, usando la notazione

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$

e definendo

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

In altre parole, $f^{-1}(B)$ è l'insieme degli elementi di X la cui f-immagine appartiene a B.

Usando la "fotocopia" di X in $\mathcal{P}(X)$ data dai singoletti, possiamo dire che $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ estende $f : X \to Y$ in quanto $f(\{x\}) = \{f(x)\}$. Ma $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ non estende l'inversa di $f : X \to Y$: essa infatti esiste sempre, anche quando f non è invertibile!!!

Ci sono un paio di trappole a cui si deve stare **mooooooolto** attenti quando si maneggiano funzioni e loro inverse, che elenchiamo qui in forma di esercizio:

Esercizio 0.6.18.

(1) Dimostrare che vale sempre $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(2) Dimostrare che non è sempre vero che $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. (Suggerimento, si consideri una funzione non iniettiva, tipo $f(x) = x^2$).
(3) Dimostrare che vale sempre $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
(4) Dimostrare che vale sempre $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Un ritornello da ricordare è dunque: *L'inversa commuta con unione e intersezione, la f invece lo fa solo con l'unione.*

Esercizio 0.6.19. Sia $f : X \to Y$ e siano $A, B \subseteq X$. Dimostrare che $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Esercizio 0.6.20. Dimostrare che se $f : X \to Y$ è iniettiva allora $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ per ogni $A, B \subseteq X$.

E ancora:

Esercizio 0.6.21. Sia $f : X \to Y$. Dimostrare che per ogni $B \subseteq Y$ si ha $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

Esercizio 0.6.22. Dimostrare che non è sempre vero che $f(A^c) = (f(A))^c$ (si provi con $f(x) = x^2$).

Esercizio 0.6.23. Sia $f : X \to Y$ e sia $B \subseteq Y$. Dimostrare che $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Esercizio 0.6.24. Dimostrare che se $f : X \to Y$ è suriettiva allora $f(f^{-1}(B)) = B$ per ogni $B \subseteq Y$.

Esercizio 0.6.25. Sia $f : X \to Y$ e sia $A \subseteq X$. Dimostrare che $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

Esercizio 0.6.26. Dimostrare che se $f : X \to Y$ è iniettiva allora $f^{-1}(f(A)) = A$ per ogni $A \subseteq X$.

CAPITOLO 1

Spazi topologici

1.1. Topologie: aperti, chiusi e compagnia bella

Definizione 1.1.1. Una **topologia** su un insieme X è una famiglia di insiemi $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che

(1) $\emptyset, X \in \tau$;
(2) τ è chiusa per unione qualsiasi: Per ogni famiglia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ si ha

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau;$$

(3) τ è chiusa per intersezioni finite: Per ogni $A_1, \ldots, A_n \in \tau$ si ha

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau.$$

Se τ è una topologia su X allora (X, τ) si chiama spazio topologico. Se non ci sono fraintendimenti possibili si dirà spesso che X è uno spazio topologico, senza menzionare τ. Gli elementi di τ si chiamano **aperti**.

Si noti che la condizione (3) può essere sostituita dalla chiusura per intersezioni semplici (cioè $\forall A, B \in \tau$ si richiede $A \cap B \in \tau$).

Teorema 1.1.2. *Sia X un insieme. Una famiglia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una topologia su X se e solo se $\emptyset, X \in \tau$, è chiusa per unioni qualsiasi e per intersezioni semplici.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è immediata usando il principio di induzione. □

Esempio 1.1.3. La **topologia banale** su un insieme X è $\tau = \{\emptyset, X\}$: Gli unici aperti sono quindi il vuoto e X.

Esempio 1.1.4. La **topologia discreta** su un insieme X è $\tau = \mathcal{P}(X)$. Ogni insieme è aperto.

Definizione 1.1.5. Sia (X, τ) uno spazio topologico, un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice **chiuso** (o chiuso di τ) se il suo complementare è un aperto:

$$A \text{ è chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad A^c \in \tau.$$

Esempio 1.1.6. Il vuoto e tutto lo spazio sono entrambi sia aperti che chiusi in ogni topologia.

Esempio 1.1.7. Nella topologia banale gli unici chiusi sono il vuoto e X (che sono anche aperti).

Esempio 1.1.8. Nella topologia discreta ogni insieme è chiuso (ed è anche aperto).

Vi sono ovviamente topologie in cui ci sono dei chiusi che non sono aperti.

Esempio 1.1.9. Sia X un insieme e sia $A \subsetneq X$ non vuoto. La famiglia $\tau = \{\emptyset, X, A\}$ è una topologia su X; A è l'unico aperto non banale e il suo complementare è l'unico chiuso non banale.

Si noti che ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi; *e.g.* se nell'Esempio 1.1.9 poniamo $X = \mathbb{R}$ e $A = [0, 1]$, allora $(2, 3)$ non è né aperto né chiuso.

Esempio 1.1.10 (Topologia delle palle annidate in $\mathbb{R}^2$). In $\mathbb{R}^2$ sia $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{B(O, 2^n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Essa è una topologia in quanto l'intersezione di un numero finito di palle centrate nell'origine è la più piccola di esse e l'unione di palle centrate nell'origine è la più grande di esse o tutto $\mathbb{R}^2$. I chiusi di τ sono il vuoto, il tutto e gli insiemi del tipo $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \geq 2^n\}$. In particolare non ci sono insiemi contemporaneamente aperti e chiusi tranne il vuoto e il tutto.

Esercizio 1.1.11. Sia X un insieme e sia $x \in X$. Sia τ_x la famiglia ti tutti i sottoinsiemi di X contenenti x, più il vuoto. Si dimostri che τ_x è una topologia. Si descrivano i chiusi di τ_x. Tale topologia viene denotata talvolta come **topologia del punto particolare**.

Teorema 1.1.12 (Degli aperti metrici)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia τ la famiglia dei sottoinsiemi A di X che soddisfano la seguente condizione:*

$$\forall a \in A \exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subseteq A.$$

Allora τ è una topologia su X.

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente il vuoto e X stanno in τ. Vediamo che τ è chiusa per unione qualsiasi. Sia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, dobbiamo far vedere che $\cup_i A_i \in \tau$. Sia $x \in \cup_i A_i$; allora esiste $j \in I$ tale che $x \in A_j$. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq A_j$ ma siccome $A_j \subseteq \cup_i A_i$ si ha $B(x, \varepsilon) \subseteq \cup_i A_i$.

Passiamo alle intersezioni finite. Siano A_1, A_2 elementi di τ e sia $x \in A_1 \cap A_2$. Allora $x \in A_1$ e $x \in A_2$, quindi esistono $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tali che $B(x, \varepsilon_i) \subseteq A_i, i = 1, 2$. Sia $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Siccome ε è il minimo di due numeri strettamente positivi, esso è strettamente positivo. Inoltre, per ogni $i = 1, 2$, siccome $\varepsilon \leq \varepsilon_i$, si ha $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_i) \subseteq A_i$ e dunque $B(x, \varepsilon) \subseteq A_1 \cap A_2$. □

Definizione 1.1.13 (Topologia indotta da una metrica)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico. La topologia indotta da d su X è la famiglia τ descritta nel Teorema 1.1.12. Se non specificato diversamente, uno spazio metrico si intende sempre dotato della topologia indotta dalla distanza.

Distanze diverse sullo stesso insieme possono (o no) indurre topologie diverse.

Esempio 1.1.14. Sia $X = \mathbb{R}^2$, siano $A = \{(x, 0) : 1 < x < 5\}$ e $B = \{(x, 0) : -1 < x < 5\}$. L'insieme A è aperto per la topologia indotta dalla metrica dei raggi, mentre non è aperto per la topologia Euclidea. L'insieme B non è aperto in nessuna delle due topologie (lo zero non è interno).

Esercizio 1.1.15. Trovare due metriche su S^1 che inducono la stessa topologia.

Un errore comune è pensare che gli aperti e i chiusi di $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$) standard siano tutti semplici, per esempio intervalli.

Esempio 1.1.16. L'**insieme di Cantor** è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito ricorsivamente come segue. Si parte da $[0, 1]$; lo si divide in tre parti uguali e si toglie la parte interna del terzo centrale; ad ogni passo si divide ogni intervallo superstite in tre e si toglie l'interno del terzo centrale: Ciò che resta è

FIGURA 1. L'insieme di Cantor

l'insieme di Cantor.

Il complementare del Cantor è formato da un'unione di intervalli aperti e dunque è aperto. Quindi il Cantor è un chiuso. L'insieme di Cantor si può anche descrivere come l'insieme dei numeri decimali in $[0, 1]$ che si possono scrivere in base 3 senza usare il simbolo 1 (si noti che $1/3 = 0,1$ ma anche $0,02222222222222\dots$).

Esempio 1.1.17. Il **tappeto di Sierpinski** è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito ricorsivamente, tipo il Cantor, come segue: Si parte dal quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Si divide il quadrato in nove quadratini uguali e si comincia col togliere la parte interna del quadratino centrale. Ad ogni passo si divide ogni quadrato superstite in nove e si toglie l'interno del quadratino centrale:

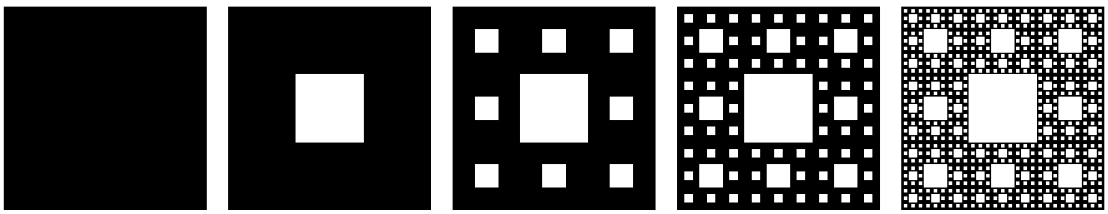


FIGURA 2. Il tappeto di Sierpinski.

Esempio 1.1.18. Il **Sierpinski gasket** (in italiano "guarnizione", meglio noto come triangolo di Sierpinski) è costruito come il tappeto, ma usando triangoli al posto dei quadrati. (Figura 3.)

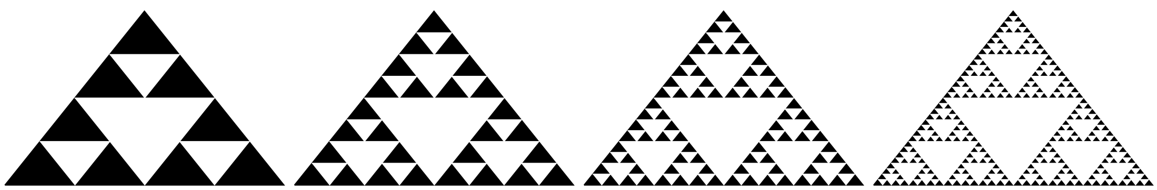


FIGURA 3. Il triangolo di Sierpinski.

Come il Cantor, il tappeto e la guarnizione di Sierpinski sono chiusi perché il complementare è aperto in quanto unione di aperti.

Teorema 1.1.19 (Della famiglia dei chiusi)**.** *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico. Detta* $\sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ *la famiglia dei chiusi di* τ*, si ha:*

(1) $\emptyset, X \in \sigma$;
(2) *σ è chiusa per intersezione qualsiasi: Per ogni famiglia $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \sigma$ l'intersezione $\cap_i A_i$ è un elemento di σ;*
(3) *σ è chiusa per unioni finite: Per ogni $A_1, \dots, A_n \in \sigma$ si ha $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \sigma$.*

Viceversa, se σ è una famiglia di sottoinsiemi di X che soddisfa le condizioni $(1), (2), (3)$ *allora la famiglia $\tau = \{A^c : A \in \sigma\}$ dei complementari degli elementi di σ è una topologia su X.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla definizione di topologia per passaggio al complementare. □

Come nel Teorema 1.1.2, la condizione (3) puè essere rimpiazzata dalla chiusura per unione semplice.

Esempio 1.1.20 (La **topologia cofinita**). Sia X un insieme. La topologia cofinita è quella i chiusi sono X e tutti i sottoinsiemi di X con un numero finito di elementi. Cioè

$$\tau = \{A \subseteq X : \sharp(A^c) < \infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

Che la cofinita sia effettivamente una topologia segue dal Teorema 1.1.19. Infatti è immediato verificare che i chiusi, cioè gli insiemi finiti, costituiscono una famiglia chiusa per unione finita e intersezione qualsiasi.

Esercizio 1.1.21. Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ e sia

$$\tau = \{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}, \emptyset\}$$

Si dica se τ sia o meno una topologia. In caso contrario, si dica se si può rendere τ una topologia aggiungendo dei sottoinsiemi di X. Se si, qual è il numero minimo di insiemi da aggiungere a τ affinché diventi una topologia?

Teorema 1.1.22. *Sia $\{\tau_i\}_{i\in I}$ una famiglia di topologie su X. Allora $\cap_i\tau_i$ è una topologia su X.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome la relazione di appartenenza è stabile per intersezione, si ha:

- $\forall i(\emptyset, X \in \tau_i) \Rightarrow \emptyset, X \in \cap_i\tau_i$.
- Per ogni $\{A_j\}_{j\in J} \subseteq \cap_i\tau_i$, si ha $\forall i\forall j(A_j \in \tau_i) \Rightarrow \forall i(\cup_{j\in J}A_j \in \tau_i) \Rightarrow \cup_{j\in J}A_j \in \cap_i\tau_i$.
- $A, B \in \cap_i\tau_i \Rightarrow \forall i(A, B \in \tau_i) \Rightarrow \forall i(A \cap B \in \tau_i) \Rightarrow A \cap B \in \cap_i\tau_i$.

□

Esempio 1.1.23. Sia X un insieme e per ogni $x \in X$ sia τ_x la topologia del punto particolare (Esercizio 1.1.11). Per il Teorema 1.1.22 si ha dunque che per ogni $A \subset X$ la famiglia $\tau_A = \cap_{a\in A}\tau_a$ è una topologia su X.

Esercizio 1.1.24. Dimostrare che τ_A, definita come nell'Esempio 1.1.23, non è altro che la famiglia dei sottoinsiemi di X che contengono A, più il vuoto. Dimostrare che essa è una topologia senza fare uso del Teorema 1.1.22).

Esercizio 1.1.25. Dimostrare che l'intersezione di tutte le topologie su $\mathbb{R}$ è la topologia banale.

Esercizio 1.1.26. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le topologie su $\mathbb{R}$ che hanno un numero finito di aperti. Dimostrare che $\cap_{\tau\in\mathcal{F}}\tau$ è la topologia banale.

Esercizio 1.1.27. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le topologie su $\mathbb{R}$ che hanno un numero infinito di aperti. Dimostrare che $\cap_{\tau\in\mathcal{F}}\tau$ è la topologia banale.

Si noti che l'unione di due topologie non è necessariamente una topologia.

Esempio 1.1.28. Sia X un insieme e siano x, y, z tre elementi distinti di X. Allora $\tau_x \cup \tau_y$ non è una topologia (ove τ_x è definita come in 1.1.11). Infatti l'insieme $A = \{x, z\}$ sta in τ_x e quindi in $\tau_x \cup \tau_y$, l'insieme $B = \{y, z\}$ sta in τ_y, dunque in $\tau_x \cup \tau_y$, ma la loro intersezione $A \cap B = \{z\}$ non sta né in τ_x né in τ_y, ergo nemmeno in $\tau_x \cup \tau_y$.

Definizione 1.1.29. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$.

- $x \in X$ si dice **interno** ad A se esiste $B \in \tau$ tale che $x \in B \subseteq A$;
- $x \in X$ è un punto di **aderenza** di A se per ogni $B \in \tau$, se $x \in B$ allora $B \cap A \neq \emptyset$. In altre parole x è di aderenza se non è un punto interno di A^c.
- $x \in X$ è un punto di **accumulazione** di A se per ogni $B \in \tau$ contenente x esiste $y \neq x$ tale che $y \in A \cap B$. In altre parole, x è di accumulazione se è un punto di aderenza di $A \setminus \{x\}$. (Si noti che i punti di accumulazione sono anche di aderenza.)
- Un punto di aderenza di A che non sia di accumulazione si dice punto **isolato**.

Dalla definizione si evince immediatamente che i punti interni di A sono punti di A. I punti di aderenza di A invece possono non essere punti di A, ma tutti i punti di A sono di aderenza. Se A è aperto, tutti i suoi punti sono interni. Se A è chiuso, esso contiene tutti i suoi punti di aderenza (perché tutti i punti di A^c sono interni ad A^c). Si noti che se $A = X$, un punto $x \in A$ è isolato se e solo se $\{x\}$ è aperto (e diverso da X).

Esempio 1.1.30. In $\mathbb{R}^2$ con la metrica Euclidea sia B la palla di centro l'origine e raggio 1 e sia D la palla chiusa di centro l'origine e raggio 1. B è aperto e D è chiuso; l'origine è un punto interno di entrambi; $(0,1)$ è un punto di aderenza di entrambi. Si noti che $(0,1) \in D$ ma $(0,1) \notin B$. In entrambi i casi tutti i punti di aderenza sono anche di accumulazione.

Esempio 1.1.31. In $\mathbb{R}$ Euclideo sia $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Tutti i punti di A tranne lo zero sono isolati. Lo zero è l'unico punto di accumulazione di A.

Esempio 1.1.32. In $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi l'insieme $A = \{(x,0) : 1 < x < 3\}$ è aperto in quanto è la palla di centro $(2,0)$ e raggio 1, mentre $Y = \{(x,0) : -1 < x < 1\}$ no perché l'origine non è un punto interno di Y. Il punto $(1,0)$ è di aderenza per entrambi.

Esempio 1.1.33. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo, sia C_n il cerchio di raggio $1/2^n$ centrato nell'origine e sia $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Se B è una palla di raggio $\varepsilon > 0$ centrata nell'origine, allora per $2^{-n} < \varepsilon$ il cerchio C_n è contenuto in B. Ne segue che l'origine è un punto di aderenza di X. Si noti che l'origine appartiene a X^c ma non ne è punto interno.

Esercizio 1.1.34. Sia X come nell'Esempio 1.1.33. Si dimostri che tutti i punti di X^c diversi dall'origine sono interni a X^c.

Definizione 1.1.35. Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia A un sottoinsieme di X.

- La **parte interna** di A è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A. Si denota con $\mathrm{Int}(A)$ o $\mathring{A}$.
- la **chiusura** di A è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti A. Si denota con $\bar{A}$.
- La **frontiera** di A è $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Teorema 1.1.36. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Allora*

- $\mathrm{Int}(A)$ *è il più grande aperto contenuto in A;*
- $\bar{A}$ *è il più piccolo chiuso contenente A.*

DIMOSTRAZIONE. Vediamo la prima affermazione. Per definizione $\mathrm{Int}(A)$ è unione di aperti contenuti in A, ergo è aperto e contenuto in A. Se $B \in \tau$ è contenuto in A, allora $B \subseteq \mathrm{Int}(A)$ per definizione quindi $\mathrm{Int}(A)$ è il più grande di tali insiemi.

Vediamo la seconda. Per definizione $\bar{A}$ è intersezione di chiusi contenenti A, ergo è chiuso e contiene A. Se C è un chiuso che contiene A allora $C \supseteq \bar{A}$ per definizione. □

Si noti che A è aperto in (X,τ) se e solo se $\mathrm{Int}(A) = A$ ed è chiuso se e solo se $\bar{A} = A$. Possono essere utili le seguenti caratterizzazioni di parte interna, chiusura e frontiera.

Teorema 1.1.37. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e $A \subseteq X$. Allora*

- $\mathrm{Int}(A) = (\overline{A^c})^c$ *e coincide con l'insieme dei punti interni di A;*
- $\bar{A} = (\mathrm{Int}(A^c))^c$ *e coincide con l'insieme dei punti di aderenza di A;*
- $\partial A = \partial A^c = (\mathrm{Int}(A^c) \cup \mathrm{Int}(A))^c$.

DIMOSTRAZIONE. Siccome $A^c \subseteq \overline{A^c}$, che è un chiuso, $(\overline{A^c})^c$ è un aperto contenuto in A; per cui

$$\mathrm{Int}(A) \supseteq (\overline{A^c})^c. \tag{1}$$

Siccome $\mathrm{Int}(A^c)$ è un aperto contenuto in A^c allora $(\mathrm{Int}(A^c))^c$ è un chiuso contenente A, per cui

$$(\mathrm{Int}(A^c))^c \supseteq \bar{A}. \tag{2}$$

Sostituendo A con A^c nelle formule (1) e (2), si ottengono le altre inclusioni.

I punti interni di A stanno in $\mathrm{Int}(A)$ per definizione di parte interna. Viceversa, essendo $\mathrm{Int}(A)$ una aperto contenuto in A, tutti i punti di $\mathrm{Int}(A)$ sono interni ad A. Quindi $\mathrm{Int}(A)$ coincide con l'insieme dei punti interni di A.

Sia ora $Ad(A)$ l'insieme dei punti di aderenza di A. Per definizione esso è il complementare dell'insieme dei punti interni di A^c, quindi

$$Ad(A) = (\mathrm{Int}(A^c))^c = \bar{A}.$$

Per quanto riguarda la frontiera si ha

$$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap (\mathring{A})^c = (\mathrm{Int}(A^c))^c \cap \mathrm{Int}(A)^c = (\mathrm{Int}(A^c) \cup \mathrm{Int}(A))^c$$

e tale espressione è simmetrica in A e A^c (cioè applicando lo stesso ragionamento ad A^c si ottiene $\partial A^c = (\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(A^c))^c = (\mathrm{Int}(A^c) \cup \mathrm{Int}(A))^c = \partial A$.) □

Esempio 1.1.38. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo la chiusura di $B(P,R)$ è $\overline{B(P,R)}$ (la notazione è quindi coerente). La parte interna di $\overline{B(P,R)}$ è $B(P,R)$. La frontiera di entrambi è il cerchio $C(P,R)$.

Esempio 1.1.39. L'insieme di Cantor, il tappeto e la guarnizione di Sierpinski non hanno parte interna. Né punti isolati. In quanto chiusi, tutti i loro punti sono di aderenza (e di accumulazione).

Esempio 1.1.40. Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ la funzione $f(x) = (\arctan(x)\cos(x), \arctan(x)\sin(x))$ e sia X l'immagine di f. X è una spirale che parte dall'origine e si accumula sul cerchio C di raggio $\pi/2$ centrato nell'origine. La chiusura di X è l'unione di X e C. La parte interna di X è il vuoto e la frontiera di X coincide quindi con la sua chiusura.

Esercizio 1.1.41. Sia X come nell'esempio precedente. Trovare la parte interna, la chiusura e la frontiera del complementare di X.

Definizione 1.1.42. Sia X uno spazio topologico. $Y \subseteq X$ si dice **denso** in X se $\bar{Y} = X$.

Esempio 1.1.43. Ogni insieme non vuoto è denso nella topologia banale, nessun sottoinsieme che non sia il tutto è denso nella topologia discreta.

Esempio 1.1.44. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo, $B(x,r)$ è denso in $\overline{B(x,r)}$.

Esempio 1.1.45. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo, $\overline{B(x,r)} \setminus B(x,r)$ non è denso in $\overline{B(x,r)}$.

Esempio 1.1.46. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ Euclideo (per definizione di $\mathbb{R}$ tramite le sezioni di Dedekind, ogni numero reale è approssimabile con numeri razionali).

Esempio 1.1.47. Il complementare di $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ Euclideo.

Esempio 1.1.48. L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile. Sia $q_1, q_2, \dots$ una sua numerazione. L'insieme dei **razionali cioccioni** è definito come

$$\cup_{i\in\mathbb{N}} B(q_i, \frac{1}{2^i})$$

Tale insieme è un sottoinsieme aperto (perché unione di aperti) e denso in $\mathbb{R}$ (perché contiene $\mathbb{Q}$ che è denso). Cosa meno banale è dimostrare che non è tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.1.49. Dimostrare che $\mathbb{Q}^2$ è denso in $\mathbb{R}^2$ Euclideo.

Esempio 1.1.50. In $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita, consideriamo $Y = [0,1]$. Siccome i chiusi della cofinita sono gli insiemi finiti e tutto $\mathbb{R}$, l'unico chiuso che contiene Y è $\mathbb{R}$. Quindi $\bar{Y} = \mathbb{R}$ e dunque $[0,1]$ è denso in $\mathbb{R}$ per la cofinita. Chiaramente $[0,1]$ è chiuso per la topologia Euclidea e quindi non è denso in $\mathbb{R}$ Euclideo.

Esercizio 1.1.51. Dimostrare che $\mathbb{Z}$ è denso in $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita. Dimostrare che $\mathbb{Z}$ non è denso in $\mathbb{R}$ Euclideo.

Definizione 1.1.52. Siano τ, σ due topologie su un insieme X. Diciamo che τ è **più fine** di σ se

$$\sigma \subseteq \tau.$$

In altre parole, τ è più fine di σ se ogni aperto di σ è anche aperto di τ. In pratica possiamo dire che τ è più fine se "ha più aperti". La topologia banale è la meno fine di tutte le topologie, la discreta è la più fine.

Esercizio 1.1.53. Siano X un insieme e τ, σ due topologie su X. Dimostrare che τ è più fine di σ se e solo se ogni chiuso di σ è anche un chiuso di τ.

Esempio 1.1.54. La topologia cofinita è meno fine della topologia Euclidea di $\mathbb{R}^2$. Infatti per la toplologia Euclidea i punti son chiusi e quindi un numero finito di punti, in quanto unione di chiusi, è un chiuso.

Esempio 1.1.55. La topologia Euclidea su $\mathbb{R}^2$ è meno fine della topologia indotta dalla metrica dei raggi. Sia infatti B una palla Euclidea e sia $x \in B$. Mostriamo che x è interno a B rispetto alla metrica dei raggi (e ciò implicherà che ogni aperto Euclideo è anche aperto per la metrica dei raggi). Se x è l'origine allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset B$ (si noti che le palle centrate nell'origine coincidono per le due metriche). Altrimenti esiste $\varepsilon > 0$ tale che $O \notin B_{Eucl}(x, \varepsilon) \subset B$. Il raggio R_x passante per x interseca $B_{Eucl}(x, \varepsilon)$ in un segmento aperto rispetto alla metrica dei raggi. Quindi $x \in R_x \cap B_{Eucl}(x, \varepsilon) \subset B_{Eucl}(x, \varepsilon) \subset B$ risulta punto interno (per la metrica dei raggi) di B.

Due topologie non sono necessariamente confrontabili.

Esempio 1.1.56. Siano x, y due punti distinti di $\mathbb{R}$. Allora le topologie del punto particolare τ_x e τ_y (Esercizio 1.1.11) non sono confrontabili. Infatti $\{x\}$ è aperto in τ_x ma non in τ_y e vice versa.

Esempio 1.1.57. Sia $x \in \mathbb{R}^2$. La topologia del punto particolare τ_x non è confrontabile con la topologia Euclidea. Infatti $\{x\}$ è aperto in τ_x ma non nella Euclidea, mentre una qualsiasi palla metrica $B(P, r)$ che non contiene x è aperta nella Euclidea ma non in τ_x.

Esempio 1.1.58. Dati due spazi topologici (X, τ) e (Y, σ), la topologia unione disgiunta $\tau \sqcup \sigma$, definita sull'unione disgiunta $X \sqcup Y$ è

$$\tau \sqcup \sigma = \{A \subseteq X \sqcup Y : A \cap X \in \tau \text{ e } A \cap Y \in \sigma\}$$

(verificare che è una topologia) Siano ora $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}$. $X \sqcup Y$ non è altro che un insieme formato da due copie disgiunte di $\mathbb{R}$. Siano σ la topologia standard su $\mathbb{R}$ e τ quella cofinita. Sia $\alpha = \tau \sqcup \sigma$ e $\beta = \sigma \sqcup \tau$. Nessuna tra α e β è più fine dell'altra.

Esercizio 1.1.59. Sia $X = \mathbb{R}^2$. Sia τ la topologia Euclidea e sia $\sigma = \{A \in \tau : \ O \notin A\} \cup \{X\}$. Dimostrare che σ è una topologia, si dica se τ e σ sono confrontabili, se sono uguali o se una è più fine dell'altra.

Esercizio 1.1.60. In $\mathbb{R}$ sia $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : [x, x+\varepsilon) \in A\}$. Si dimostri che τ è una topologia e che è strettamente più fine di quella Euclidea.

1.2. Basi. Topologia di Zariski e altri esempi

Definizione 1.2.1. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una **base** di τ è una famiglia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tale che ogni elemento di τ sia unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Esempio 1.2.2. In uno spazio metrico (X, d), le palle $B(x, \varepsilon)$ al variare di $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ formano una base per la topologia indotta da d.

Lemma 1.2.3. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Per ogni $A \subseteq X$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) Per ogni $x \in A$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq A$.
b) A è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo a). Per ogni $x \in A$ sia $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subseteq A$. Allora $A = \cup_{x \in A} B_x$ risulta essere unione di elementi di $\mathcal{B}$. Viceversa, supponiamo b). Sia $x \in A$. Siccome A è unione di elementi di $\mathcal{B}$, ne esiste almeno uno, che chiamiamo B_x, che contiene x. Ovviamente $x \in B_x \subseteq A$. $\square$

Teorema 1.2.4. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora $\mathcal{B}$ è base per una topologia su X se e solo se*
(1) $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;
(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *e per ogni* $x \in B_1 \cap B_2$ *esiste* $B_3 \in \mathcal{B}$ *tale che* $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
Inoltre, in tal caso la topologia τ di cui $\mathcal{B}$ è base è la famiglia delle unioni qualsiasi di elementi di $\mathcal{B}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia base per una topologia τ su X. Allora ogni aperto è unione di elementi di $\mathcal{B}$, in particolare X lo è e $\tau = \{\cup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$. Inoltre, gli elementi di $\mathcal{B}$ sono aperti e quindi $B_1 \cap B_2$ è aperto, ergo unione di elementi di $\mathcal{B}$ e il Lemma 1.2.3 conclude.

Viceversa, supponiamo che $\mathcal{B}$ goda delle due proprietà (1) e (2) e sia $\tau = \{\cup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B}, I$ insieme di indici qualsiasi$\}$. Se dimostriamo che τ è una topologia allora abbiamo finto perché in tal caso $\mathcal{B}$ ne è una base tautologicamente. $\emptyset \in \tau$ perché per convenzione l'unione vuota è vuota e $X \in \tau$ per la proprietà (1). Osserviamo che τ è chiusa per unioni qualsiasi per come è definita.

Vediamo che τ è chiusa per intersezione. Siano $A_1, A_2 \in \tau$. Esistono quindi I_1, I_2 insiemi di indici e $B_i^j \in \mathcal{B}$ tali che $A_j = \cup_{i \in I_j} B_i^j$, $j = 1, 2$. Da cui

$$A_1 \cap A_2 = \left(\cup_{i \in I_1} B_i^1\right) \cap \left(\cup_{i \in I_2} B_i^2\right) = \bigcup_{i_1 \in I_1, i_2 \in I_2} B_{i_1}^1 \cap B_{i_2}^2.$$

Per la proprietà (2), e per il Lemma 1.2.3, $B_{i_1}^1 \cap B_{i_2}^2$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$. Quindi $A_1 \cap A_2 = \cup(B_{i_1}^1 \cap B_{i_2}^2)$ è anch'esso unione di elementi di $\mathcal{B}$ e dunque sta in τ. $\square$

Esempio 1.2.5. Per ogni $x, a \in \mathbb{Z}$ sia $S(x, a)$ la successione aritmetica che parte da x con passo a:

$$S(x, a) = \{x + \mathbb{Z}a\} = \{x + na : n \in \mathbb{Z}\}.$$

L'insieme delle successioni aritmetiche soddisfa le condizioni (1) e (2) del Teorema 1.2.4. Infatti la (1) è ovvia e per la (2) basta osservare che se $c \in S(x, a) \cap S(y, b)$ allora, detto d il minimo comune multiplo tra a e b, si ha $S(c, d) \subseteq S(x, a) \cap S(y, b)$. Quindi l'insieme delle successioni aritmetiche è base di una topologia su $\mathbb{Z}$, detta **topologia delle successioni aritmetiche**.

OSSERVAZIONE 1.2.6. La topologia delle successioni aritmetiche è stata inventata nel 1955 da Furstenberg, che la usò per dare una dimostrazione topologica dell'esistenza di infiniti numeri primi. Infatti, usando questa topologia si può arguire come segue. Siccome $S(x, a)^c$ è l'unione di $S(x + i, a)$ con $i = 1, ..., a - 1$, ogni $S(x, a)$ è chiuso (oltre che aperto). Sia A l'unione di tutti gli insiemi $S(0, p)$ al variare di p primo (1 non è un primo). Chiaramente $A^c = \{-1, 1\}$. Ma se i primi fossero in numero finito, A sarebbe unione finita di chiusi e dunque chiuso. Quindi A^c sarebbe aperto, ergo unione di elementi della base. Ma A^c contiene solo due elementi, mentre ogni aperto della base è infinito. Assurdo.

Piuttosto che il Teorema 1.2.4, nella vita capita spesso di usare il seguente corollario, le cui ipotesi sono generalmente semplici da verificare.

Corollario 1.2.7. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia chiusa per intersezione e tale che $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$. Allora $\tau = \{\cup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B}, I$ insieme qualsiasi$\}$ è una topologia su X di cui $\mathcal{B}$ è base.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome $\mathcal{B}$ è chiusa per intersezione, la condizione (2) del Teorema 1.2.4 è tautologicamente verificata (ponendo $B_3 = B_1 \cap B_2$). $\square$

Vediamo ora, come esempio di applicazione del Corollario 1.2.7, una topologia molto importante in matematica, specialmente in geometria algebrica: La **topologia di Zariski**.

Esempio 1.2.8. Sia $\mathbb{K}$ un campo (per esempio $\mathbb{R}$). Per ogni polinomio $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ poniamo
$$Z(p) = \{x \in \mathbb{K}^n : \ p(x) = 0\} \quad \text{e} \quad A(p) = \{x \in \mathbb{K}^n : \ p(x) \neq 0\} = Z(p)^c.$$
Si noti che
$$Z(1) = \emptyset \qquad Z(0) = \mathbb{K}^n \qquad Z(pq) = Z(p) \cup Z(q) \qquad A(pq) = A(p) \cap A(q).$$
In particolare la famiglia degli insiemi $A(p)$, al variare di $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, è chiusa per intersezione e quindi per il Corollario 1.2.7 è una base per una topologia su $\mathbb{K}^n$, detta topologia di Zariski.

Gli insiemi $Z(p)$ sono chiusi e gli $A(p)$ aperti. Per questa topologia i chiusi sono gli zeri di sistemi di polinomi. Cioè per ogni insieme di polinomi $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si pone
$$Z(S) = \cap_{p \in S} Z(p) = \{x \in \mathbb{K}^n : p(x) = 0 \forall p \in S\}$$
gli insiemi $Z(S)$ sono tutti i chiusi della topologia di Zariski [1].

La topologia di Zariski è una buona palestra per allenare il cervello al fatto che al mondo non esiste solo la topologia Euclidea.

Esempio 1.2.9. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia di Zariski, la parte interna della palla $B(P, R)$ è vuota. Questo perché un polinomio, in quanto funzione analitica, se si annulla su un aperto Euclideo di $\mathbb{R}^2$, allora è il polinomio nullo. Quindi la chiusura del complementare di $B(P, R)$, per la topologia di Zariski, è tutto $\mathbb{R}^2$. (Stiamo usando $\mathrm{Int}(X) = (\overline{X^c})^c$).

Esercizio 1.2.10. Sia $X \subseteq \mathbb{K}^n$ con la topologia di Zariski. Sia $I(X)$ l'insieme dei polinomi che si annullano su X, cioè $I(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : x \in X \Rightarrow f(x) = 0\}$. Si dimostri che la chiusura di X è $Z(I(X))$.

Esercizio 1.2.11. Si dimostri che la topologia di Zariski su $\mathbb{R}$ coincide con la topologia cofinita.

Le basi sono spesso utili per confrontare due topologie.

Teorema 1.2.12. *Siano τ, σ due topologie su un insieme X. Allora σ è meno fine di τ se e solo se ammette una base $\mathcal{B}_\sigma$ fatta di aperti di τ, se e solo se ogni base di σ è fatta di elementi di τ. In particolare se $\mathcal{B}_\sigma, \mathcal{B}_\tau$ sono basi di σ e τ rispettivamente, allora σ è meno fine di τ se e solo se ogni elemento di $\mathcal{B}_\sigma$ è unione di elementi di $\mathcal{B}_\tau$ se e solo se*
$$\forall x \in A \in \mathcal{B}_\sigma \exists B \in \mathcal{B}_\tau : \ x \in B \subseteq A.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\sigma \subseteq \tau$ allora in particolare gli elementi di ogni base di σ sono anche elementi di τ. Viceversa, se σ ha una base $\mathcal{B}_\sigma \subseteq \tau$, allora ogni aperto di σ, in quanto unione di elementi di $\mathcal{B}_\sigma$, è anche unione di elementi di τ e quindi è in τ. Le altre affermazioni dell'enunciato seguono dal fatto che ogni aperto è unione degli elementi di base. □

Esempio 1.2.13. La topologia di Zariski è meno fine della Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Infatti i polinomi sono funzioni continue $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per la metrica Euclidea, quindi per ogni polinomio p, il teorema della permanenza del segno per funzioni continue a valori reali implica che l'insieme $A(p)$ è aperto Euclideo. Quindi la Zariski ha una base fatta di aperti Euclidei.

Esempio 1.2.14. Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la famiglia degli insiemi "chiusi a sinistra e aperti a destra", cioè del tipo $[a, b)$. Essa soddisfa le condizioni del Corollario 1.2.7. La topologia τ di cui $\mathcal{F}$ è base è talvolta chiamata **topologia degli intervalli semiaperti a destra** o **topologia del limite destro** (questo secondo nome sarà più chiaro in seguito). Essa è più fine della Euclidea. Infatti $(a, b) = \cup_{x \in (a,b)}[x, b)$ quindi la topologia Euclidea ha una base fatta di elementi di τ. $\mathbb{R}$ dotato della topologia del limite destro si chiama anche *retta di Sorgenfrey*.

Esercizio 1.2.15. Dimostrare che la topologia del limite destro è quella dell'Esercizio 1.1.60.

[1] In generale S può a priori essere infinito, ma siccome $\mathbb{K}$ è un campo, per il Teorema della base di Hilbert, possiamo sempre ridurci al caso di S finito.

Definizione 1.2.16. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La **topologia generata** da $\mathcal{A}$ è l'intersezione di tutte le topologie contenenti $\mathcal{A}$. (Si noti che la discreta contiene $\mathcal{A}$.)

Teorema 1.2.17. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La topologia generata da $\mathcal{A}$ è la meno fine di tutte le topologie contenenti $\mathcal{A}$. Esplicitamente, i suoi aperti sono tutte e sole le unioni qualsiasi di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{A}$:*

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{\cup_{j \in J} \cap_{i=1}^{k} A_i^j : \ A_i^j \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}, J \text{ insieme qualsiasi}\} \cup \{X\}$$

e una sua base è formata dalle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^{k} A_i : \ A_i \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{X\}.$$

DIMOSTRAZIONE. La topologia generata da $\mathcal{A}$ è la meno fine delle topologie contenenti $\mathcal{A}$ perché ogni topologia contenente $\mathcal{A}$ è usata nell'intersezione che la definisce.

La famiglia $\mathcal{B}$ è chiusa per intersezione finita e contiene X. Per il Corollario 1.2.7 $\tau_{\mathcal{A}}$ è una topologia e $\mathcal{B}$ ne è una base. Ovviamente $\tau_{\mathcal{A}}$ contiene $\mathcal{A}$. Quindi la topologia generata da $\mathcal{A}$ è contenuta in $\tau_{\mathcal{A}}$.

D'altra parte, siccome ogni topologia è chiusa per unioni qualsiasi e intersezioni finite, la famiglia $\tau_{\mathcal{A}}$ è contenuta in ogni topologia che contiene $\mathcal{A}$ e quindi è contenuta nella topologia generata da $\mathcal{A}$. □

Esempio 1.2.18 (Topologia dell'ordine). Sia X un insieme totalmente ordinato. La topologia dell'ordine è quella generata dagli intervalli illimitati, ossia insiemi del tipo $\{x \in X : \ x < b\}$ o $\{x \in X : \ a < x\}$. Si noti che gli intervalli in generale non sono una base per la topologia dell'ordine. Per esempio, in $[0, \infty)$ con l'ordine usuale, l'intervallo $(1, 2)$ non è unione di intervalli illimitati.

Si noti che se $Y = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$ non è tutto X, allora la topologia generata da $\mathcal{A}$ non distingue i punti di $X \setminus Y$, nel senso che per ogni $z \in X \setminus Y$ l'unico aperto che contiene z è X. Quindi in realtà la topologia generata da $\mathcal{A}$ fornisce informazioni solo su $\cup_{\mathcal{A}} A$.

Esempio 1.2.19 (Falsa topologia dell'ordine). Sia X un insieme totalmente ordinato. Sia τ la topologia generata dagli intervalli limitati, ossia insiemi del tipo $(a, b) = \{x \in X : \ a < x < b\}$. Dimostrare che in generale tale topologia non è quella dell'ordine. (Suggerimento: Provare con $X = [0, 1]$. Chi sono gli intorni di 0?) Si diano almeno due esempi in cui τ coincide con la topologia dell'ordine.

Esempio 1.2.20. Sia Y uno spazio topologico, sia $Y^X = \{f : X \to Y\}$ e sia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Per ogni $K \in \mathcal{K}$ e per ogni aperto U di Y sia $A_{K,U} = \{f \in Y^X : f(K) \subseteq U\}$. La topologia generata dagli insiemi $A_{K,U}$ si chiama topologia $\mathcal{K}$-aperta, detta talvolta anche topologia dello slalom. (Figura 4.)

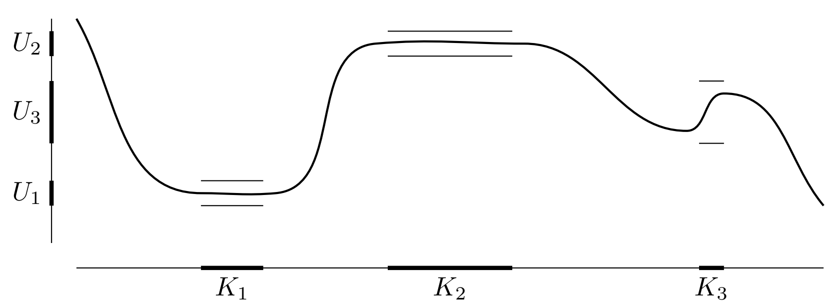


FIGURA 4. Una funzione in $A_{K_1,U_1} \cap A_{K_2,U_2} \cap A_{K_3,U_3}$

1.3. Intorni e convergenza di successioni

In matematica accade spesso di voler studiare uno spazio topologico localmente, interessandosi solamente a cosa succede vicino a un punto dato, per esempio se si vuole capire se una successione converge o meno a un certo limite. Per questo si formalizza il concetto di intorno, o vicinanza, di un punto.

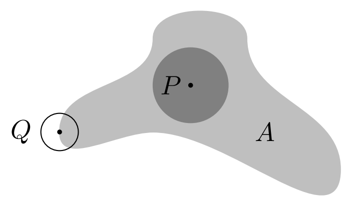
Definizione 1.3.1. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$. Un **intorno** di x è un qualsiasi sottoinsieme N di X tale che x sia un punto interno di N.

Si noti che nella definizione di intorno non si richiede che l'intorno sia aperto.

Esempio 1.3.2. Un aperto è un intorno di ogni suo punto.

Esempio 1.3.3. In $\mathbb{R}$ standard l'insieme $[0, 2]$ è un intorno di 1 ma non lo è di 0 né di 2.

Il disegno classico che si fa per spiegare gli intorni è il seguente:



A è intorno di P ma non di Q

Questo disegno, che va benissimo per $\mathbb{R}^2$ Euclideo, va interpretato *cum grano salis* altrimenti potrebbe risultare fuorviante. Per esempio, se si considera la topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$, la palla metrica di centro P e raggio R non è un intorno di P. (Si veda l'Esempio 1.2.9).

Teorema 1.3.4. *Sia X uno spazio topologico, sia $x \in X$ e siano A, B due intorni di x. Allora $A \cap B$ è un intorno di x. Se $C \supseteq A$ allora C è un intorno di x.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome x è interno sia ad A che a B, esistono aperti U, V tali che

$$x \in U \subseteq A \qquad x \in V \subseteq B.$$

L'insieme $U \cap V$ è aperto e $x \in U \cap V \subseteq A \cap B$. Quindi x è interno a $A \cap B$. La seconda affermazione discende tautologicamente dalla definizione di punto interno e di intorno. □

La famiglia di tutti gli intorni di x si indica con $\mathcal{I}(x)$ (tipicamente nei testi italiani) o $\mathcal{V}(x)$ (dal francese *voisinage*) o $\mathcal{N}(x)$ (dall'inglese *neighborhood*). Essa ha la proprietà di filtro (Teorema 1.3.4):

Definizione 1.3.5. Dato un insieme X, un **filtro** di sottoinsiemi di X è una famiglia non vuota $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{P}(X)$ chiusa per intersezione e passaggio a soprainsiemi:

$$\forall A, B \in \mathcal{F} \text{ si ha } A \cap B \in \mathcal{F} \qquad \forall A \subseteq B,\ (A \in \mathcal{F}) \Rightarrow (B \in \mathcal{F}).$$

Definizione 1.3.6. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$. Un **sistema fondamentale di intorni** di x (detta anche base locale) è una famiglia F_x di intorni di x tale che per ogni $A \in \mathcal{I}(x)$ esiste $B \in F_x$ tale che $B \subseteq A$.

Tautologicamente, la famiglia $\mathcal{I}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni di x.

Esempio 1.3.7. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per ogni x definiamo $B_x = \{B(x, \varepsilon) : 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$. Per ogni $x \in X$, la famiglia B_x è un sistema fondamentale di intorni (aperti) di x.

Esempio 1.3.8. Se $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X, allora per ogni $x \in X$ la famiglia $B_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di x.

Definizione 1.3.9. Un **insieme diretto** è un insieme ordinato $(X, \leq)$ tale che per ogni $x, y \in X$ esiste $z \in X$ tale che $x \leq z$ e $y \leq z$.

$\mathbb{N}$ è un insieme diretto, ed è questo il punto chiave per definire le successioni (x_n) e i loro limiti[2]. I sistemi fondamentali di intorni, ordinati con l'inclusione inversa $A \leq B \Leftrightarrow B \subseteq A$, sono insiemi diretti e si usano per dare la nozione di convergenza in spazi topologici.

Definizione 1.3.10 (Convergenza di successioni)**.** Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una successione $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X converge a $x \in X$ se per ogni intorno A di x si ha $x_i \in A$ definitivamente in i. Equivalentemente, dato un sistema fondamentale di intorni N_x di x, si ha $x_i \to x$ se per ogni $A \in N_x$ si ha $x_i \in A$ definitivamente in i.

Se (X, τ) è uno spazio metrico allora la nozione di convergenza topologica coincide con quella metrica. In topologie strane però, le successioni possono avere comportamenti assai bizzarri.

Esempio 1.3.11. Sia X un insieme e sia τ la topologia generata da una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tale che $\cup_{A \in \mathcal{A}} A \neq X$. Sia $x \in X \setminus \cup_{A \in \mathcal{A}} A$. Allora ogni successione converge a x. (L'unico intorno di x è X).

Esempio 1.3.12. In $\mathbb{R}$ con la topologia di Zariski (che coincide con la cofinita) la successione $x_n = 1/n$ converge a qualsiasi punto: dato un qualsiasi insieme aperto A non vuoto, essendo A cofinito si ha che $x_n \in A$ definitivamente. Lo stesso dicasi per una qualsiasi successione di punti distinti tra loro.

Esempio 1.3.13. In $\mathbb{Z}$ con la topologia delle successioni aritmetiche, la successione $x_n = n!$ converge a zero. Infatti, per ogni successione $S(0, a)$ si ha che $x_n \in S(0, a)$ definitivamente.

Esempio 1.3.14. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la topologia del limite destro (Esempio 1.2.14). Allora una successione x_n converge a x se e solo se converge a x "da destra" per la topologia Euclidea. Infatti, $x_n \to x$ se e solo se per ogni intorno U di x si ha $x_n \in U$ definitivamente. In particolare ciò vale per gli intorni $U_\varepsilon = [x, x + \varepsilon)$ (che sono aperti per la topologia del limite destro). Quindi dal fatto che $x_n \in U_\varepsilon$ definitivamente si deduce che $x_n \to x$ "da destra" per la topologia Euclidea.

Teorema 1.3.15. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e supponiamo di aver fissato, per ogni x, un sistema fondamentale di intorni F_x. Sia $\mathcal{F} = \cup_x F_x \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora ogni aperto di τ è unione di elementi di $\mathcal{F}$. In particolare, se tutti gli elementi degli F_x sono aperti, allora $\mathcal{F}$ è una base di τ.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A aperto. Allora esso è intorno di ogni suo punto. Per ogni $a \in A$ esiste quindi $U_a \in F_a$ tale che $U_a \subseteq A$. Ne segue che $A = \cup_{a \in A} U_a$. $\square$

Viceversa, una topologia si può descrivere dando un sistema fondamentale di intorni per ogni punto. Questo è un procedimento standard, specialmente in Analisi Funzionale.

Teorema 1.3.16. *Sia X un insieme e per ogni $x \in X$ sia data una famiglia non vuota $F_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ di insiemi contenenti x e diretti per l'inclusione inversa, cioè:*

$$\forall A, B \in F_x \; \exists C \in F_x : \; C \subseteq A \cap B.$$

Allora la famiglia

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in A \; \exists B \in F_x : \; B \subseteq A\}$$

è una topologia su X; per ogni $x \in X$ la famiglia F_x è un sistema fondamentale di intorni di x, e se ogni $F_x \subseteq \tau$ allora $\mathcal{F} = \cup_x F_x$ è una base di τ.

[2] La teoria delle successioni si generalizza infatti rimpiazzando il ruolo di $\mathbb{N}$ con insiemi diretti qualsiasi. Si veda a tal proposito l'Appendice B.

DIMOSTRAZIONE. La famiglia τ contiene X ed il vuoto per come è definita, così come è evidente dalla definizione che τ sia chiusa per unioni qualsiasi. Vediamo l'intersezione. Siano $A_1, A_2 \in \tau$ e sia $x \in A_1 \cap A_2$. Per definizione esistono $B_1, B_2 \in F_x$ con $B_i \subseteq A_i, i = 1, 2$. Siccome F_x è diretto, esiste $C \in F_x$ tale che $C \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$ e quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Sia ora $x \in X$ e N un suo intorno. Essendo x interno a N, esiste un aperto $A \in \tau$ con $x \in A \subseteq N$ e per definizione di τ esiste $B \in F_x$ tale che $B \subseteq A$. Quindi F_x è un sistema fondamentale di intorni di x. Se ogni $F_x \subseteq \tau$ allora $\mathcal{F} \subseteq \tau$ e l'ultima affermazione segue dal Teorema 1.3.15. □

Esempio 1.3.17 (Topologia della convergenza puntuale). Sia (Y, d) uno spazio metrico (per esempio $\mathbb{R}$) e sia A un insieme (per esempio $\mathbb{R}$). Sia $X = Y^A = \{f : A \to Y\}$. Per ogni $f \in X$ definiamo un sistema fondamentale di intorni. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, per ogni $a = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, per ogni $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in (0, \infty)^k$ definiamo

$$N_{a,\varepsilon}(f) = \{g \in X : \ d(f(a_i), g(a_i)) < \varepsilon_i : \forall i = 1, \dots, k\}$$

La topologia che ha gli insiemi $N_{a,\varepsilon}(f)$ come sistema fondamentale di intorni è la topologia della convergenza puntuale. Secondo questa topologia infatti $f_n \to f$ se e solo se per ogni $x \in A$ la successione $f_n(x)$ converge in Y a $f(x)$.

Esempio 1.3.18 (Topologia della convergenza uniforme). Sia (Y, d) uno spazio metrico e sia A un insieme. Sia $X = Y^A = \{f : A \to Y\}$. Per ogni $f \in X$, per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo

$$N_\varepsilon(f) = \{g \in X : \ d(f(a), g(a)) < \varepsilon : \forall a \in A\}$$

La topologia che ha gli insiemi $N_\varepsilon(f)$ come sistema fondamentale di intorni è la topologia della convergenza uniforme. Secondo questa topologia infatti $f_n \to f$ se e solo se per ogni la successione $\sup_{a\in A} d(f_n(x), f(x))$ converge a zero in $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.3.19. Si dimostri che la topologia della convergenza puntuale su $\mathbb{R}^A$ è la topologia $\mathcal{K}$-aperta se $\mathcal{K}$ è la famiglia dei singoletti $\mathcal{K} = \{\{a\}, a \in A\}$.

Esercizio 1.3.20. Si dimostri che la topologia della convergenza uniforme sullo spazio delle funzioni continue da $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$ è la topologia $\mathcal{K}$-aperta se $\mathcal{K}$ è la famiglia degli intervalli chiusi di $[0, 1]$.

1.4. Sottospazi

Teorema 1.4.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$. La famiglia $\tau|_Y \subseteq \mathcal{P}(Y)$ definita da*

$$\tau|_Y = \{B \cap Y : B \in \tau\}$$

è una topologia su Y. Inoltre, se $\mathcal{B}$ è una base di τ allora l'insieme

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

è una base di $\tau|_Y$.

DIMOSTRAZIONE. Siccome τ contiene il vuoto e X, allora $\tau|_Y$ contiene il vuoto e $Y = Y \cap X$. Se $\{A_i\} \subseteq \tau|_Y$ è una famiglia di elementi di $\tau|_Y$, allora esistono $B_i \in \tau$ tali che $A_i = B_i \cap Y$. Siccome τ è una topologia allora $\cup_i B_i \in \tau$. Ma allora $\cup_i(B_i \cap Y) = (\cup_i B_i) \cap Y \in \tau|_Y$. Un discorso analogo vale per l'intersezione.

Sia ora $A \in \tau|_Y$. Allora esiste $B \in \tau$ tale che $A = B \cap Y$. Esistono quindi $B_i \in \mathcal{B}$ tali che $B = \cup_i B_i$. Quindi $A = B \cap Y = (\cup_i B_i) \cap Y = \cup_i(B_i \cap Y)$ è unione di elementi di $\mathcal{B}_Y$. □

Definizione 1.4.2 (Sottospazio)**.** Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$. La topologia $\tau|_Y$ si chiama restrizione di τ ad Y, oppure topologia indotta da X su Y, oppure topologia di Y come sottospazio di X. Lo spazio topologico $(Y, \tau|_Y)$ si dice sottospazio di (X, τ). Se non ci sono ambiguità si può indicare $\tau|_Y$ anche semplicemente con τ.

Teorema 1.4.3. *Sia Y un sottospazio di (X, τ) allora:*

(1) *I chiusi di Y sono le intersezioni con Y dei chiusi di X.*
(2) *Se un sottoinsieme di Y è aperto (o chiuso) in X, allora lo è anche in Y.*
(3) *Se Y è aperto (risp. chiuso) in X allora gli aperti (risp. chiusi) di Y sono anche aperti (risp. chiusi) di X.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Dire che $C \subseteq Y$ è chiuso in $\tau|_Y$ equivale a dire che $Y \setminus C$ è un aperto di $\tau|_Y$ e cioè che esiste $B \in \tau$ tale che $Y \setminus C = B \cap Y$. Siccome $Y = (B \cap Y) \cup (B^c \cap Y)$ si ha che $C = B^c \cap Y$. Ma per definizione B è aperto se e solo se B^c è un chiuso di τ.

(2) Se $A \subseteq Y$ è aperto in X allora $A = A \cap Y$ è aperto in Y per definizione di topologia indotta. Stessa cosa, per il punto (1), se A è chiuso.

(3) Per definizione $A \subseteq Y$ è aperto in $\tau|_Y$ se e solo se esiste $U \in \tau$ d tale che $A = U \cap Y$. Ma se Y è aperto in X, allora $U \cap Y$ è un aperto di X. Per il punto (1), lo stesso ragionamento vale se Y è chiuso e A è chiuso in Y. □

ATTENZIONE: a parte i casi elencati nel Teorema 1.4.3 in generale può succedere di tutto ed è bene ricordare che la nozione di essere aperto/chiuso ha una natura **relativa**.

Esempio 1.4.4. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Non importa se A sia aperto, chiuso o nessuno dei due, ma A è sempre sia aperto che chiuso per $\tau|_A$.

Esempio 1.4.5. $[0, 1)$ non è né aperto né chiuso in $\mathbb{R}$, ma è chiuso in $(-1, 1)$ ed è aperto in $[0, \infty)$.

Esempio 1.4.6. Sia $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$ non è un chiuso di $\mathbb{R}^2$, ma è un chiuso di Y con la topologia indotta.

Esempio 1.4.7. Sia $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, y = 0\}$ non è un aperto di $\mathbb{R}^2$ ma è un aperto di Y con la topologia indotta.

Allo stesso modo, quando si parla di parte interna e chiusura in una situazione $A \subseteq Y \subseteq X$, si deve sempre specificare se si sta considerando la topologia di X o quella indotta su Y. Lo si può fare usando le notazioni apicali e pedicali $\overline{A}^Y, \overline{A}^X$ e $\mathrm{Int}_Y(A), \mathrm{Int}_X(A)$.

Esempio 1.4.8. Il punto 2 non è interno a $[2, 3)$ rispetto alla topologia di $\mathbb{R}$ ma è un punto interno di $[2, 3)$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}$ su $[2, \infty)$.

Teorema 1.4.9. *Sia Y un sottospazio di (X, τ). Per ogni $A \subseteq Y$ si ha $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione $\overline{A}^X \cap Y$ è un chiuso di $\tau|_Y$ contenente A quindi $\overline{A}^Y \subseteq \overline{A}^X \cap Y$. D'altronde $\overline{A}^Y$ è un chiuso di $\tau|_Y$ contenente A quindi esiste un chiuso C di τ, contenente A, tale che $\overline{A}^Y = C \cap Y$. Siccome $\overline{A}^X \subseteq C$ si ha $\overline{A}^X \cap Y \subseteq C \cap Y = \overline{A}^Y$. □

Corollario 1.4.10. *Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Allora A è denso in $\bar{A}$ rispetto alla topologia indotta da X su $\bar{A}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 1.4.9, ponendo $Y = \bar{A}$, si ha che la chiusura di A per la topologia di $\bar{A}$ non è altro che $\bar{A} \cap \bar{A} = \bar{A}$. □

Bisogna però usare cautela ché in generale non è vero che $\overline{A \cap Y}^Y = \overline{A}^X \cap Y$:

Esempio 1.4.11. In $\mathbb{R}^2$ sia Y la palla chiusa di centro l'origine e raggio 1 e sia $A = Y^c$. Chiaramente $\overline{A \cap Y} = \overline{\emptyset} = \emptyset$; ma $\overline{A} \cap Y$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Con la parte interna le cose non vanno meglio e in generale $\mathrm{Int}_Y(A) \neq \mathrm{Int}_X(A) \cap Y$:

Esempio 1.4.12. In $\mathbb{R}^2$ sia $Y = \{(x, y) : y = 0\}$ e sia $A = Y$. Chiaramente $\mathrm{Int}_Y(A) = Y$; ma $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}^2}(A) \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset$.

Non ci sono problemi invece con le catene di inclusioni.

Teorema 1.4.13. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e siano $B \subseteq A \subseteq X$. Allora*
$$\tau|_B = (\tau|_A)|_B.$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione $C \in \tau|_B$ se e solo se esiste $D \in \tau$ tale che $C = B \cap D$. Ma $B \cap D = B \cap (A \cap D)$ quindi (ponendo $E = A \cap D$) si ha che $C \in \tau|_B$ se e solo se esiste $E \in \tau|_A$ tale che $C = B \cap E$, che per definizione equivale a dire che $C \in (\tau|_A)|_B$. □

Il passaggio a sottospazio mantiene le distanze...

Teorema 1.4.14. *Sia (X,d) uno spazio metrico e sia τ_d la topologia indotta da d su X. Sia $Y \subseteq X$. Sia d_Y la restrizione della funzione distanza a Y e sia τ_{d_Y} la topologia che essa induce su Y. Allora*
$$(\tau_d)|_Y = \tau_{d_Y}.$$

DIMOSTRAZIONE. Una base per entrambe le topologie è data dalle palle metriche. □

... ma non rispetta gli ordini!

Esempio 1.4.15. Sia $X = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$. L'ordine naturale $\leq$ di $\mathbb{R}$ induce un ordine $\leq_X$ su X. (La topologia indotta su $\mathbb{R}$ da $\leq$ è quella Euclidea.) l'intervallo $(-1, 0]$ è un aperto di X per la topologia indotta da $\mathbb{R}$ su X perché $(-1, 0] = (-1, 1) \cap X$. Ma rispetto alla topologia dell'ordine $\leq_X$, ogni intervallo aperto contenente 0 deve contenere anche qualche punto in $(1, 1+\varepsilon)$. Quindi 0 non è interno a $(-1, 0]$ che quindi non è aperto per la topologia indotta da $\leq_X$. Ne segue che la topologia indotta da $\mathbb{R}$ su X è diversa dalla topologia indotta su X da $\leq_X$. In versione scioglilingua: la topologia indotta dall'ordine indotto non è la topologia indotta dalla topologia indotta dall'ordine.

Esercizio 1.4.16. Nell'esempio precedente, quale topologia induce $\leq_X$ su X?

1.5. Assiomi di numerabilità

Definizione 1.5.1 (Assiomi di numerabilità)**.** Uno spazio topologico (X,τ) si dice a **base numerabile** se τ ammette una base numerabile; si dice **localmente numerabile** se ogni $x \in X$ ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile. È in uso la seguente terminologia:

- Primo assioma di numerabilità: X è localmente numerabile. (In inglese X si dice *First countable*, in riferimento al primo assioma, ma in italiano rende proprio male);
- Secondo assioma di numerabilità: X è a base numerabile. (In inglese *Second countable*. Come sopra, "secondo numerabile" suona da far ribrezzo).

Chiaramente il secondo implica il primo.

Esempio 1.5.2. Se τ è numerabile, allora è ovviamente a base numerabile. Per esempio la topologia della palle annidate su $\mathbb{R}^2$ lo è (Esempio 1.1.10).

Esempio 1.5.3. La topologia delle successione aritmetiche (Esempio 1.2.5) è a base numerabile perché l'insieme delle successioni aritmetiche $\{S(x,a), x, a \in \mathbb{Z}\}$ è numerabile.

Esempio 1.5.4. $\mathbb{R}^2$ è localmente numerabile, così come ogni spazio metrico: basta considerare le palle di raggio razionale. (Come nell'Esempio 1.3.7).

Esempio 1.5.5. La topologia discreta è localmente numerabile, infatti ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni fatto da un solo elemento: il singoletto di sé stesso.

Non tutti gli spazi localmente numerabili hanno base numerabile.

Esempio 1.5.6. La topologia discreta su $\mathbb{R}$ non è a base numerabile. Infatti ogni base della topologia discreta deve contenere la famiglia dei singoletti $\{\{x\}, x \in \mathbb{R}\}$, che non è numerabile perché $\mathbb{R}$ non lo è. La stessa cosa vale per la discreta su un qualunque insieme non numerabile.

Ci sono alcune proprietà degli spazi topologici che, pur suonando come "intuitivamente vere" non lo sono in generale. Ciò dipende dal fatto che spesso si è abituati a pensare che tutto funzioni come in $\mathbb{R}^2$ Euclideo. I seguenti teoremi ci dicono che, per quanto riguarda il comportamento delle successioni, negli spazi localmente numerabili le cose funzionano come ci si aspettava.

Teorema 1.5.7 (Degli intorni inscatolati)**.** *Sia X uno spazio topologico localmente numerabile. Allora ogni $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni (numerabile) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inscatolati, cioè*

$$n > m \Rightarrow B_n \subseteq B_m.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x numerabile. Per ogni n definiamo $B_n = N_1 \cap \cdots \cap N_n$. In quanto intersezione finita di intorni, B_n è intorno di x. Inoltre se $A \in \mathcal{I}(x)$ esiste N_i tale che $N_i \subseteq A$. Ma per ogni $n > i$ si ha $B_n \subseteq N_i$. Quindi la famiglia numerabile $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di x. Per come sono definiti, se $n > m$ allora $B_n \subseteq B_m$. □

Teorema 1.5.8. *Sia X uno spazio topologico localmente numerabile (per esempio uno spazio metrico) e sia $A \subseteq X$. Allora $x \in X$ è un punto di aderenza di A se e solo se è il limite di una successione in A.*

DIMOSTRAZIONE. Se x è il limite di una successione $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A$ allora non è interno ad A^c e quindi è di aderenza per A. Viceversa, se $x \in \bar{A}$, allora per ogni intorno N di x esiste $a \in N \cap A$. Sia $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni inscatolati di x e sia $a_i \in N_i \cap A$. Per ogni intorno B di x esiste $N_i \subseteq B$ e quindi $a_n \in N_n \subseteq N_i \subseteq B$ per ogni $n > i$. Quindi $a_i \to x$. □

Definizione 1.5.9. Uno spazio topologico (X, τ) si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme denso numerabile.

Esempio 1.5.10. Ogni spazio numerabile è separabile in quanto esso è denso in sé stesso.

Esempio 1.5.11. $\mathbb{R}$ è separabile perché $\mathbb{Q}$ è numerabile e denso in $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ è separabile perché $\mathbb{Q}^n$ è numerabile e denso in $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1.5.12. Sia τ la topologia delle palle annidate di $\mathbb{R}^2$ (Esempio 1.1.10). Sia x l'origine di $\mathbb{R}^2$. La chiusura di $\{x\}$ è $\mathbb{R}^2$ perché ogni aperto non vuoto contiene x. In particolare $\mathbb{R}^2$ con tale topologia è separabile perché $\{x\}$ — che è numerabile perché contiene un solo elemento — è denso in $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.5.13. *Sia X uno spazio topologico a base numerabile. Allora X è separabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{B} = \{B_i\}$ una base numerabile per la topologia di X. Non è restrittivo supporre ogni B_i non vuoto. Sia $b_i \in B_i$. L'insieme $B = \{b_i\}$ è un insieme numerabile perché $\mathcal{B}$ lo è. Vediamo che è denso. Sia $x \in X$ e sia U un intorno di x. Esiste quindi un aperto A tale che $x \in A \subseteq U$. Siccome A è unione di aperti della base esiste almeno un $B_i \in \mathcal{B}$ tale che $B_i \subseteq A$, in particolare $b_i \in U$. □

Teorema 1.5.14. *Sia (X, d) uno spazio metrico separabile. Allora X ha una base numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $Q \subseteq X$ un insieme denso numerabile e sia $B_{q,n} = B(q, \frac{1}{n})$. Dimostriamo che $\mathcal{B} = \{B_{q,n} : q \in Q, n \in \mathbb{N}\}$ è una base della topologia generata da d. Sia A un aperto di X e sia $x \in A$. Per definizione esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Sia n tale che $1/n < \varepsilon$ e sia $q \in Q \cap B(x, 1/2n)$. Con queste scelte si ha $x \in B_{q,2n} \subseteq A$. Ne segue che A è unione di elementi di $\mathcal{B}$. □

Teorema 1.5.15. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Se τ contiene una famiglia non numerabile $\mathcal{A}$ di aperti non vuoti a due a due disgiunti, allora X non è separabile (e non può quindi avere una base numerabile).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $Q \subseteq X$ un insieme numerabile. Siccome gli elementi di $\mathcal{A}$ sono disgiunti, ogni $q \in Q$ appartiene al più ad un $A \in \mathcal{A}$. Siccome $\mathcal{A}$ non è numerabile esiste un aperto $A \in \mathcal{A}$ che non interseca Q. Quindi Q non è denso in X. □

Esempio 1.5.16. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico l'insieme $R_x = \{x\} \times \mathbb{R}$ è aperto per ogni x. Quindi la famiglia $\mathcal{R} = \{R_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ è una famiglia più che numerabile di aperti disgiunti. Quindi $\mathbb{R}^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico non è separabile e quindi non ha una base numerabile.

Esercizio 1.5.17. Si dica se $\mathbb{R}^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico è localmente numerabile.

Esercizio 1.5.18. Si dimostri che $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi non è separabile. (In particolare è un esempio di spazio metrico senza basi numerabili.)

Esempio 1.5.19. La topologia cofinita su $\mathbb{R}$ non è a base numerabile. Infatti, sia $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di aperti. Allora $B_i = C_i^c$ con C_i insieme finito. Allora $C = \cup_i C_i$ è unione numerabile di insiemi finiti e quindi è numerabile. Siccome $\mathbb{R}$ non è numerabile esiste $x \notin C$. Se l'aperto $A = \{x\}^c$ fosse unione di elementi di $\mathcal{B}$ avremmo $\{x\}^c = A = \cup_{i\in I\subseteq\mathbb{N}} B_i = \cup_i (C_i^c) = (\cap C_i)^c$ e quindi $\{x\} = \cap C_i \subseteq C$ contraddicendo $x \notin C$.

Esercizio 1.5.20. Dimostrare che la topologia cofinita su $\mathbb{R}$ non è localmente numerabile.

Esempio 1.5.21. $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita è separabile. Infatti $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$ in quanto essendo i chiusi gli insiemi finiti e il tutto, l'unico chiuso che contiene $\mathbb{N}$ è il tutto. (In particolare tale topologia è separabile ma non ha una base numerabile. In particolare non è indotta da una metrica.)

Esempio 1.5.22. Sia ω_1 il primo ordinale non numerabile[3], dotato della topologia dell'ordine. Esso non è separabile. Infatti ogni sottoinsieme numerabile di ω_1 è limitato. Quindi non può essere denso.

Esempio 1.5.23. ω_1 è localmente numerabile, infatti ogni intervallo limitato di ω_1 è numerabile e per ogni $x \in \omega_1$ una base locale di intorni di x è formata dai sottointervalli di $[0, x+1)$ contenenti x.

Esercizio 1.5.24. Dimostrare che ω_1 non è a base numerabile.

1.6. Spazi di Hausdorff

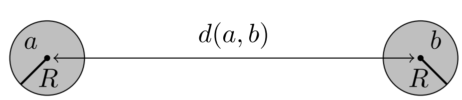
Definizione 1.6.1. Uno spazio topologico X si dice T_2 o di **Hausdorff** se per ogni $x \neq y \in X$ esistono aperti U, V con $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

In generale esistono nozioni di spazi $T_0, T_1, T_3, T_{3/2}, \dots$. Sono tutte proprietà dette di *separazione* (note anche come assiomi di separazione) e si esprimono in genere con formule del tipo "oggetti di tipo tale si separano attraverso insiemi di tipo tal altro". La nozione T_2 ad esempio si può parafrasare dicendo che i punti si separano con aperti. Malgrado il nome, le proprietà di separazione non c'entrano nulla con la separabilità. In questo testo ci occuperemo solo della proprietà T_2 (e un po' di T_3, in seguito).

Esempio 1.6.2. La topologia banale su un insieme con almeno due elementi non è T_2.

Esempio 1.6.3. La topologia discreta è sempre T_2.

Esempio 1.6.4. $\mathbb{R}^2$ e gli spazi metrici in generale sono T_2. Infatti se $a \neq b$, detto $R = d(a,b)/10$, le palle $B(a,R)$ e $B(b,R)$ sono disgiunte. (Si noti che anche le palle di raggio $d(a,b)/2$ sono disgiunte.)



Esempio 1.6.5. $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita non è T_2. Infatti due aperti non vuoti della topologia cofinita si intersecano sempre.

Esercizio 1.6.6. Dimostrare che la topologia di Zariski su $\mathbb{R}^n$ non è T_2.

[3]Si veda l'Appendice A per una breve introduzione all'aritmetica ordinale.

Esempio 1.6.7. La topologia della palle annidate di $\mathbb{R}^2$ (Esempio 1.1.10) non è T_2. Infatti per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$, per ogni coppia di aperti U, V $x \in U$ e $y \in V$ l'origine è contenuta in $U \cap V$ che quindi non è vuota.

Esercizio 1.6.8. Si dimostri che la topologia del punto particolare (Esercizio 1.1.11) su un insieme con almeno due elementi non è T_2.

Esempio 1.6.9. La topologia delle successioni aritmetiche su $\mathbb{Z}$ (Esempio 1.2.5) è T_2. Infatti se $n, m \in \mathbb{Z}$ sono diversi, allora le successioni $S(n, 100(m-n))$ e $S(m, 100(m-n))$ sono disgiunte.

Esercizio 1.6.10. Si dimostri che la topologia dello slalom (Esempio 1.2.20) sullo spazio delle funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$, usando come $\mathcal{K}$ la famiglia dei singoletti, è T_2. (Se due funzioni f, g sono diverse, allora esiste almeno un $x \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(x) \neq g(x)$ e siccome $\mathbb{R}$ è T_2...)

Teorema 1.6.11 (Unicità del limite)**.** *Sia X uno spazio T_2 e sia $x_i \to x$ una successione convergente. Se $x_i \to y$ allora $x = y$.*

DIMOSTRAZIONE. Se X è T_2 e $x \neq y$ allora esistono U, V intorni di x, y rispettivamente, tali che $U \cap V = \emptyset$. Ne segue che se $x_i \to x$ allora (x_i) non può convergere a y. □

Teorema 1.6.12. *I punti di uno spazio T_2 sono chiusi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio T_2 e sia $x \in X$. Dimostriamo che il complementare di x è aperto in X. Se $y \neq x$ allora esiste U_y intorno aperto di y tale che $x \notin U_y$. In particolare $\{x\}^c = \cup_{y \neq x} U_y$ è aperto. □

Il viceversa non è vero in generale (gli spazi i cui punti son chiusi sono i T_1).

Esempio 1.6.13. La topologia cofinita su $\mathbb{R}$ ha la proprietà che i punti sono chiusi ma non è T_2.

Esercizio 1.6.14. Dimostrare che nella topologia di Zariski i punti sono chiusi.

Esercizio 1.6.15. Si dia un esempio di spazio topologico X (non T_2) tale che esista una successione x_n convergente a due limiti diversi contemporaneamente. (Eventualmente si guardi l'Esempio 1.3.12).

1.7. Continuità, funzioni aperte e omeomorfismi

In topologia la definizione di continuità non si dà tramite le successioni ma tramite gli aperti. Questo perché gli spazi topologici sono in genere più complicati di $\mathbb{R}^2$ e se uno volesse usare il linguaggio delle successioni dovrebbe usare le successioni generalizzate definite tramite gli insiemi diretti. Il lettore interessato ad approfondire questo punto di vista può dare un'occhiata all'Appendice B.

Definizione 1.7.1. Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** se per ogni $A \in \sigma$ si ha $f^{-1}(A) \in \tau$.

In altre parole, una funzione è continua se le preimmagini degli aperti sono aperte. Quella appena data è la definizione classica di continuità per spazi topologici. Il Teorema 1.7.10 qui sotto fornisce una formulazione equivalente che è forse più aderente all'intuizione nutrita dalla definizione di continuità tramite successioni (ma che risulterà inesorabilmente meno naturale al topologo adulto).

Esempio 1.7.2. Se X ha la topologia discreta, ogni funzione da X a un qualsiasi spazio è continua.

Esempio 1.7.3. Se Y ha la topologia banale, ogni funzione da qualsiasi spazio verso Y è continua.

Esempio 1.7.4. Siano τ e σ due topologie su X. Allora τ è più fine di σ se e solo se l'identità da (X, τ) a (X, σ) è continua.

La continuità può essere controllata solo su una base.

Teorema 1.7.5. *Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici e sia $\mathcal{B}$ una base di σ. Una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $B \in \mathcal{B}$ si ha $f^{-1}(B) \in \tau$.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome $\mathcal{B} \subseteq \sigma$, se f è continua e $B \in \mathcal{B}$ allora $f^{-1}(B) \in \tau$. Viceversa, sia $A \in \sigma$. Esistono $B_i \in \mathcal{B}$ tali che $A = \cup_i B_i$. Quindi $f^{-1}(A) = f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$ è unione di aperti e quindi è aperto. □

Teorema 1.7.6. *Siano X e Y due spazi topologici. Allora una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni C chiuso in Y si ha che $f^{-1}(C)$ è chiuso in X.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è un facile esercizio lasciato al lettore (si passi ai complementari nella definizione di continuità). □

Definizione 1.7.7 (Continuità in un punto)**.** Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici e sia $x \in X$. Una funzione $f : X \to Y$ si dice continua in x se per ogni intorno A di $f(x)$ si ha che $f^{-1}(A)$ è un intorno di x.

Le due definizioni sono coerenti:

Teorema 1.7.8. *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo se è continua in ogni punto di X.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo f continua e sia $x \in X$. Sia A un intorno di $f(x)$. Allora per definizione $f(x)$ è interno ad A e quindi esiste un aperto B tale che $f(x) \in B \subseteq A$. In particolare $x \in f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$. Siccome f è continua $f^{-1}(B)$ è un aperto. Ne segue che $f^{-1}(A)$ è un intorno di x.

Viceversa, supponiamo f continua in ogni punto. Sia A un aperto di Y, dunque esso è un intorno di ogni suo punto. Sia $x \in f^{-1}(A)$. Siccome f è continua in x e A è un intorno di $f(x)$, si ha che $f^{-1}(A)$ è un intorno di x. Quindi ogni punto di $f^{-1}(A)$ è interno, ergo $f^{-1}(A)$ è aperto. □

Teorema 1.7.9 (Continuità vs successioni)**.** *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra spazi topologici e sia $x_n \to x$ in X. Allora $f(x_n) \to f(x)$ in Y.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome f è continua, per ogni intorno A di $f(x)$ in Y, $f^{-1}(A)$ è un intorno di x. Siccome $x_n \to x$, allora definitivamente $x_n \in f^{-1}(A)$. Quindi $f(x_n) \in A$ definitivamente. □

Teorema 1.7.10 (Continuità per chiusura)**.** *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ si ha*

$$x \in \bar{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$$

ossia se

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

In altre parole, f è continua se e solo se l'immagine di un punto di aderenza è di aderenza per l'immagine.

Prima della dimostrazione, un commento su quest'enunciato è d'uopo. Per il Teorema 1.5.8, in spazi localmente numerabili un punto è di aderenza di A se e solo se è limite di una successione $x_n \in A$, e la stessa cosa vale per $f(A)$. Ci troviamo quindi di fronte a una generalizzazione dell'abituale "$x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$". E infatti vale il seguente, rassicurante

Corollario 1.7.11. *Negli spazi metrici le nozioni di continuità topologica e metrica coincidono.*

DIMOSTRAZIONE. Siano X, Y due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Se f è topologicamente continua allora per il Teorema 1.7.9 è anche metricamente continua.

Viceversa supponiamo che f sia metricamente continua, sia $A \subseteq X$ e sia x un punto di aderenza di A. Per il Teorema 1.5.8, i punti di aderenza di A (o di $f(A)$) sono i limiti di successioni a valori in A (o in $f(A)$). In particolare esiste $x_n \to x$ con $x_n \in A$. Siccome f è metricamente continua allora $(x_n \to x) \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. Ne segue che $f(x) = \lim f(x_n)$ è un punto di aderenza di $f(A)$. Abbiamo quindi dimostrato che $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ e quindi f è topologicamente continua. □

Si noti che la dimostrazione di questo risultato usa solo il fatto che gli spazi metrici sono spazi localmente numerabili e quindi vale anche per tali spazi.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.7.10. Supponiamo f continua; sia $A \subseteq X$ e $x \in X$. Se $f(x)$ non è un punto di aderenza di $f(A)$ allora esiste un intorno N di $f(x)$ con $N \subseteq f(A)^c$. Quindi $f^{-1}(N)$ è un intorno di x contenuto in A^c e dunque, in quanto interno ad A^c, x non è di aderenza per A.

Viceversa, supponiamo che per ogni A si abbia $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ e dimostriamo che f è continua in ogni punto. Sia $x \in X$ e sia N un intorno di $f(x)$. Per definizione $f(x)$ non è di aderenza per N^c. Ergo x non è di aderenza per $f^{-1}(N^c) = (f^{-1}(N))^c$. Dunque x è interno a $f^{-1}(N)$, che quindi è un intorno di x. □

Il Corollario 1.7.11 fornisce un buon metodo per dimostrare che certi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ Euclideo sono aperti o chiusi.

Corollario 1.7.12. *Sia X uno spazio topologico e sia $F : X \to \mathbb{R}$ continua. Allora gli insiemi di livello $F^{-1}((a,b))$ sono aperti e gli insiemi di livello $F^{-1}([a,b])$ sono chiusi (in entrambi i casi sono ammesse le possibilità $a = -\infty$ e $b = \infty$; nel secondo caso è ammesso $a = b$).*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che (a,b) è aperto e $[a,b]$ è chiuso. □

Esempio 1.7.13. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme $A = \{1 < 3x^2 + 5y^2 < 2\}$ è aperto perché $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2$ è continua e $A = f^{-1}((1,2))$.

Esempio 1.7.14. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme $A = \{1 \leq 3x^2 + 5y^2 \leq 2\}$ è chiuso perché $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2$ è continua e $A = f^{-1}([1,2])$.

Esempio 1.7.15. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme, $A = \{xy < 1\}$ è aperto perché $f(x,y) = xy$ è continua e $A = f^{-1}((-\infty,1))$.

Esempio 1.7.16. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme $A = \{x^2 - y^2 > -2\}$ è aperto perché $f(x,y) = x^2 - y^2$ è continua e $A = f^{-1}((-2,\infty))$.

Esempio 1.7.17. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme $A = \{x^2 - y^2 = -2\}$ è chiuso perché $f(x,y) = x^2 - y^2$ è continua e $A = f^{-1}(-2)$.

Esempio 1.7.18. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme, $A = \{xy \geq 1\}$ è chiuso perché $f(x,y) = xy$ è continua e $A = f^{-1}([1,\infty])$.

Esempio 1.7.19. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme $A = \{x^2 - y^2 \leq -2\}$ è chiuso perché $f(x,y) = x^2 - y^2$ è continua e $A = f^{-1}([-\infty,-2])$.

Esempio 1.7.20. In $\mathbb{R}$ l'insieme $A = \{\cos(x) > \sin(x)\}$ è aperto perché la funzione $F(x) = \cos(x) - \sin(x)$ è continua e $A = F^{-1}(0,\infty)$.

Esempio 1.7.21. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme $A = \{(x,y) : y > x\sin(1/x)\}$ è aperto (la funzione $x \sin 1/x$ si considera estesa in zero con continuità). Infatti la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $F(x,y) = y - x\sin 1/x$ è continua e $A = F^{-1}(0,\infty)$.

Esempio 1.7.22. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme $A = \{(x,y) : \cos(x) \leq \sin(y)\}$ è chiuso perché la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $F(x,y) = \cos(x) - \sin(y)$ è continua e $A = F^{-1}([-\infty,0])$.

Teorema 1.7.23. *La composizione di funzioni continue è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $(X,\tau), (Y,\sigma), (Z,\eta)$ tre spazi topologici e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ continue. Per ogni $A \in \eta$ si ha $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Siccome g è continua $g^{-1}(A) \in \sigma$ e siccome f è continua $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \tau$. □

Definizione 1.7.24. Siano (X,τ) e (Y,σ) due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **omeomorfismo** se è invertibile e se sia f che f^{-1} sono continue.

Esempio 1.7.25. Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sup\{|x|,|y|\} = 1\}$ e sia Y la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$, entrambi con la topologia indotta da $\mathbb{R}^2$. X è un quadrato e Y un cerchio, ma la funzione $f : X \to Y$ definita da

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

è un omeomorfismo tra X e Y. (Controllare per esercizio che sia f che f^{-1} sono continue.)

Esempio 1.7.26. Sia $X = [-1,0] \cup (1,2]$ e $Y = [0,2]$ entrambi con la metrica Euclidea. Sia $f : X \to Y$ definita da $f(x) = |x|$. Chiaramente f è invertibile con inversa

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x \in (1,2] \\ -x & x \in [0,1] \end{cases}$$

La funzione f è continua perché restrizione di una funzione continua, ma la sua inversa non è continua. Infatti $x_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ ma $f^{-1}(x_n) = x_n$ non converge a $-1 = f^{-1}(1)$.

Due spazi omeomorfi sono equivalenti dal punto di vista topologico. Infatti un omeomorfismo $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ non solo è una biiezione tra X e Y, ma trasforma τ in σ. Due spazi omeomorfi però, possono essere anche visibilmente diversi tra loro. Per dimostrare che due spazi sono omeomorfi, non c'è modo più convincente che esibire un omeomorfismo esplicito. Mentre l'inverso, cioè dimostrare che due spazi non sono omeomorfi, è un problema ben più complicato. Per distinguere due spazi diversi si usano i cosiddetti *invarianti topologici*.

Definizione 1.7.27 (Invarianti)**.** Una proprietà P si dice invariante topologico, o invariante per omeomorfismi, se ogni qual volta X è omeomorfo a Y si ha che X gode di P se e solo se Y gode di P.

Esempio 1.7.28. L'essere a base numerabile è un invariante topologico.

Esempio 1.7.29. L'essere localmente numerabile è un invariante topologico.

Esempio 1.7.30. L'essere T_2 è un invariante topologico.

Esempio 1.7.31. $\mathbb{R}^2$ con la topologia di Zariski non gode di nessuna di queste proprietà e non è quindi omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ Euclideo, che gode di tutte e tre queste proprietà.

Esempio 1.7.32. $\mathbb{R}^2$ con la topologia delle palle annidate 1.1.10 non è T_2 e quindi non è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ Euclideo che è T_2. (Entrambi sono a base numerabile, ergo localmente numerabili).

Esempio 1.7.33. $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi non è a base numerabile. Non è quindi omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ che lo è. (Entrambi sono metrici, ergo T_2 e localmente numerabili).

Esempio 1.7.34. La cardinalità è un invariante topologico.

Esempio 1.7.35. La cardinalità di τ è un invariante topologico: se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo tra spazi topologici essa induce una relazione biunivoca tra le loro topologie.

Esempio 1.7.36. $\mathbb{R}$ con la topologia discreta, che ha un'infinità di aperti, non è omeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topologia banale, che ha solo due aperti. (Ma tautologicamente $\mathbb{R}$ ha la stessa cardinalità di sé stesso.)

Definizione 1.7.37. Siano (X,τ) e (Y,σ) due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **aperta** se manda aperti in aperti (cioè se per ogni $A \in \tau$, si ha $f(A) \in \sigma$). Si dice **chiusa** se manda chiusi in chiusi.

Esempio 1.7.38. La proiezione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x$ è aperta. Infatti per ogni aperto A di $\mathbb{R}^2$ e per ogni $P \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(P,\varepsilon) \subseteq A$. Ne segue che $B(f(x),\varepsilon) \subseteq f(A)$ e quindi ogni punto di $f(A)$ è interno.

Esempio 1.7.39. La proiezione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x$ non è chiusa. Infatti l'insieme $\{xy = 1\}$ è un chiuso di $\mathbb{R}^2$ ma la sua proiezione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che non è un chiuso di $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.7.40. La funzione $f(x) = x^2$ non è aperta da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Lo è da $\mathbb{R}$ a $[0, \infty)$.

Esercizio 1.7.41. L'inclusione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ data da $f(x) = (x, 0)$ è chiusa ma non è aperta.

Teorema 1.7.42. *Una funzione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se è continua, biunivoca e aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Se f è un omeomorfismo allora è biunivoca e continua. Inoltre, siccome f^{-1} è continua, per ogni aperto A di X si ha $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ è aperto in Y e dunque f è anche aperta. Viceversa se f è continua e biunivoca, dire che f è aperta equivale a dire che f^{-1} è continua. □

Teorema 1.7.43. *Una funzione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se è continua, biunivoca e chiusa.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è uguale alla precedente ed è lasciata per esercizio. □

Il seguente è un teorema importante, la cui dimostrazione esula dagli scopi di questo libro.

Teorema 1.7.44 (Teorema dell'invarianza del dominio)**.** *Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e iniettiva è aperta. (Si intende che $\mathbb{R}^n$ sia dotato della usuale topologia Euclidea.)*

Corollario 1.7.45. *Se $n \neq m$ allora $\mathbb{R}^n$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^m$. (Con le usuali topologie Euclidee.)*

DIMOSTRAZIONE. Se $n \neq m$ possiamo supporre $m > n$. L'inclusione $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ data da

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

è continua rispetto alle topologie Euclidee ed inoltre è ovviamente iniettiva. Se esistesse un omeomorfismo $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, allora la composizione $g = i \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sarebbe continua e iniettiva e dunque aperta. Ma l'immagine di g è contenuta in $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m$ che ha parte interna vuota in $\mathbb{R}^m$ e quindi g non può essere aperta. Ciò contraddirebbe il teorema di invarianza del dominio. □

Data una funzione f, la si può sempre rendere continua nel modo più economico possibile. Il seguente enunciato è una Definizione/Teorema che rende precisa tale affermazione.

Teorema 1.7.46 (Definizione di topologia indotta da f)**.** *Siano X, Y insiemi qualsiasi e sia $f : X \to Y$ una funzione qualsiasi.*

(1) *Se τ è una topologia su X allora*
$$\sigma = \{A \subseteq Y : \ f^{-1}(A) \in \tau\}$$
è una topologia su Y. Essa rende continua f ed è la più fine tra le topologie che rendono continua f. Tale topologia si chiama topologia indotta da f su Y.

(2) *Se σ è una topologia su Y allora la topologia pull-back su X, o topologia indotta da f su X è la topologia τ meno fine che rende la f continua. Esplicitamente, τ è l'intersezione di tutte le topologie che rendono continua la f, e si ha*
$$\tau = \{f^{-1}(A) : \ A \in \sigma\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se A_i è una famiglia di sottoinsiemi di Y si ha

$$f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i) \qquad f^{-1}(\cap_i A_i) = \cap_i f^{-1}(A_i).$$

Ne segue che, nel primo caso σ e nel secondo τ, entrambe sono topologie. Esse rendono continua f per come sono definite. Dalla definizione di continuità segue che, nel primo caso, σ contiene ogni topologia che rende continua f; nel secondo, τ è contenuta in ogni topologia che rende continua f. □

Esempio 1.7.47. Se (X, τ) è uno spazio topologico e $Y \subset X$, allora la topologia indotta da X su Y è la topologia indotta dall'inclusione $i : Y \to X$.

Definizione 1.7.48. Una funzione $f : X \to Y$ tra spazi topologici si dice **immersione topologica** (in inglese *embedding*[4]) se è un omeomorfismo tra X e $f(X)$ (ove $f(X)$ è dotato della topologia indotta da Y).

Lemma 1.7.49. *Un'immersione topologica è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : X \to Y$ un'immersione topologia e sia $A \subseteq Y$ un aperto. Dobbiamo mostrare che $f^{-1}(A)$ è aperto in X. Sia $B = A \cap f(X)$, esso è un aperto di $f(X)$ per la topologia indotta da Y su $f(X)$. Siccome f è un omeomorfismo tra X e $f(X)$ allora $f^{-1}(B)$ è aperto in X. Chiaramente $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$ per come è definito B. □

In altre parole un'immersione f da (X, τ) in uno spazio topologico Y è una funzione continua, iniettiva e tale che la topologia indotta da f su X coincida con τ.

Esempio 1.7.50. L'inclusione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ con le topologie standard è un'immersione.

Esempio 1.7.51. Sia $X = (-\infty, \pi)$ con la topologia standard e sia

$$f(x) = \begin{cases} (x, 0) & x < -\pi \\ \pi(\cos x, \sin x) & x \in [-\pi, \pi) \end{cases}$$

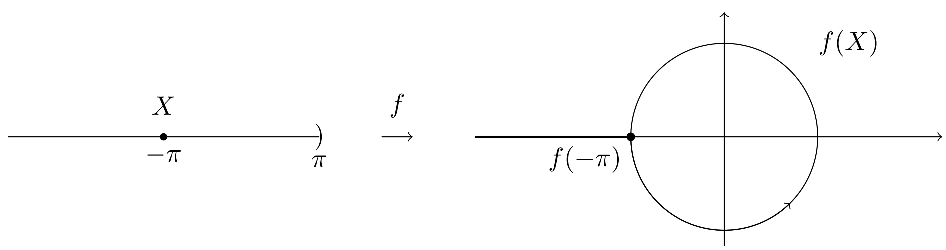


FIGURA 5. La funzione f

La funzione f non è un'immersione da X in $\mathbb{R}^2$ standard perché gli intorni di $-\pi$ con la topologia indotta contengono tutti insiemi del tipo $(\pi - \varepsilon, \pi)$. Si noti che f è continua e iniettiva, quindi è una biiezione continua tra Y e la sua immagine.

Esempio 1.7.52. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'inclusione $f(x) = (x, 0)$. Se $\mathbb{R}$ è dotato della topologia Euclidea e $\mathbb{R}^2$ di quella di Zariski, allora f è continua e iniettiva, ma non è un'immersione.

Teorema 1.7.53 (Teorema dell'immersione aperta)**.** *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e iniettiva tra spazi topologici. Se f è aperta allora è un'immersione.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome f è aperta $f(X)$ è un aperto di Y e chiaramente f è una biiezione tra X e $f(X)$. In particolare, la topologia di X coincide con quella indotta da f e quindi X è omeomorfo a $f(X)$ tramite f. □

Esercizio 1.7.54 (Teorema dell'immersione chiusa). Dimostrare che se $f : X \to Y$ è una funzione continua, iniettiva e chiusa tra spazi topologici, allora è un'immersione.

[4]Vale la pena ricordare che spesso, e specialmente in topologia differenziale, il termine "immersione" si usa con una valenza locale (l'iniettività viene richiesta solo localmente). In inglese tale differenza è resa esplicita attraverso i termini "embedding" e "immersion".

Definizione 1.7.55 (Immersioni aperte/chiuse)**.** Un'immersione topologica aperta si dice immersione aperta. Un'immersione topologica chiusa si dice immersione chiusa.

Visto che le immersioni sono parametrizzazioni di sottospazi topologici, le immersioni aperte corrispondono a sottospazi aperti, quelle chiuse a sottospazi chiusi.

Esempio 1.7.56. L'immersione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $(x, y) \to (x, y, 0)$ è un'immersione chiusa.

Esempio 1.7.57. L'immersione $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ data da $(x, y) \to (x, y)$ è un'immersione aperta.

Esempio 1.7.58. L'immersione $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = 1/z$ è un'immersione aperta.

Esempio 1.7.59. La funzione $f(x, y) = (e^x, e^y)$ è un'immersione aperta da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1.8. Esercizi

Esercizio 1.8.1. In $\mathbb{R}$ Euclideo sia $X = \{x \in \mathbb{R} : \exists 0 \neq n \in \mathbb{Z} : |x - 1/n| < 1/n^2\}$. Si dica se X è aperto. Si dica se X è chiuso. Si determini la frontiera di X.

Esercizio 1.8.2. In $\mathbb{R}$ Euclideo sia $X = \{x \in \mathbb{R} : \exists 0 \neq n \in \mathbb{Z} : |x - 1/n| < 1/2^n\}$. Si dica se X è aperto. Si dica se X è chiuso. Si determini la frontiera di X.

Esercizio 1.8.3. Dimostrare che $\mathbb{Q}$ non è né aperto né chiuso in $\mathbb{R}$, che $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Esercizio 1.8.4 (non banale). Si provi che i razionali ciccioni (Esempio 1.1.48) non sono tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.8.5. Sia $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Si calcoli la chiusura di X e la sua frontiera.

Esercizio 1.8.6. Sia $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset (0, \infty)$. Si calcoli la chiusura di X e la sua frontiera.

Esercizio 1.8.7. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia $X = \{(x, 2^n x^2), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}$. Si determinino $\overline{X}$ e ∂X.

Esercizio 1.8.8. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia $X = \{x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0\} \cup \{x^2 + y^2 < 1, y < 0\}$. Si determinino parte interna, chiusura e frontiera di X.

Esercizio 1.8.9. Per $n \in \mathbb{Z}$ sia C_n il cerchio di $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine e di raggio 2^n. Sia $X = \cup_{n \geq 0} C_n$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.10. Per $n \in \mathbb{Z}$ sia C_n il cerchio di $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine e di raggio 2^n. Sia $X = \cup_{n \leq 0} C_n$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.11. Per $n \in \mathbb{Z}$ sia C_n il cerchio di $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine e di raggio 2^n. Sia $Y = \cup_{n \in \mathbb{Z}} C_n$ e sia $X = Y^c$ il suo complementare. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.12. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo siano $A = \{(x, y) : \sup(|x|, |y|) \leq 1\}$ e $B = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. Sia $X = A \setminus B$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.13. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo siano $A = \{(x, y) : \sup(|x|, |y|) \leq 1\}$ e $B = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$. Sia $X = A \setminus B$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.14. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo siano $A = \{(x, y) : \sup(|x|, |y|) < 1\}$ e $B = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. Sia $X = A \setminus B$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.15. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo siano $A = \{(x, y) : \sup(|x|, |y|) < 1\}$ e $B = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$. Sia $X = A \setminus B$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.16. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo siano $A = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$ e $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sia $X = A \setminus B$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.17. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo siano $A = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$ e $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Sia $X = A \setminus B$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.18. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo siano $A = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 < 4\}$ e $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sia $X = A \setminus B$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.19. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo siano $A = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 < 4\}$ e $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Sia $X = A \setminus B$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.20. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia $X = \{(x, y) : x > 0$ e $0 \leq y \leq \frac{\sin x}{x}\}$ Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.21. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia $X = \{(x, y) : \cos x \leq y < \sin x\}$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.22. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia $X = \{(x, y) : \cos x \leq y \leq \sin x\}$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.23. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia $X = \{(x, y) : 1 \leq y < \sin x\}$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.24. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia $X = \{(x, y) : 1 \leq y \leq \sin x\}$. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.25. Sia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la funzione $f(t) = \arctan t(\cos t, \sin t)$, sia G la sua immagine ($G = \{f(t), t \in (0, \infty)\}$) e sia $X = G^c$ il suo complementare. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.26. Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la funzione $f(t) = t(\cos t, \sin t)$, sia G la sua immagine ($G = \{f(t), t \in (0, \infty)\}$) e sia $X = G^c$ il suo complementare. Si dica se X è aperto e/o chiuso, si determinino $\overline{X}, \mathring{X}, \partial X$.

Esercizio 1.8.27. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia X il grafico di $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(1/x)$. Si dica se X è aperto o chiuso, si determinino $\bar{X}$, $\mathring{X}$ e ∂X.

Esercizio 1.8.28. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia X il complementare del grafico di $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(1/x)$. Si dica se X è aperto o chiuso, si determinino $\bar{X}$, $\mathring{X}$ e ∂X.

Esercizio 1.8.29. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia X il complementare della chiusura del grafico di $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(1/x)$. Determinare $\bar{X}$, $\mathring{X}$ e ∂X.

Esercizio 1.8.30. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo, sia $A = \{(x, 0) : 1 < x < 2\}$. Dimostrare che A non è né aperto né chiuso in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 1.8.31. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia X la striscia verticale $X = (1, 2) \times \mathbb{R}$ e sia $A = \{(x, 0) : 1 < x < 2\}$. Dimostare che A è chiuso in X ma non è aperto in X.

Esercizio 1.8.32. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia X l'insieme $X = (1, 2) \times \mathbb{Z}$ e sia $A = \{(x, 0) : 1 < x < 2\}$. Dimostrare che A è aperto e chiuso in X.

Esercizio 1.8.33. Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$. Dimostrare che ∂A è un chiuso.

Esercizio 1.8.34. Sia X uno spazio topologico e siano $A \subseteq B$ sottoinsiemi di X. Dimostrare che se A è denso in X allora anche B lo è. Si discuta la validità del viceversa.

Esercizio 1.8.35. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva tra spazi topologici. Dimostrare che se A è denso in X allora $f(A)$ è denso in Y.

Esercizio 1.8.36. Descrivere gli insiemi di $\mathbb{R}^2$ che sono aperti per la metrica dei raggi.

Esercizio 1.8.37. Descrivere gli aperti di $\mathbb{R}^2$ per topologia indotta dall'ordine lessicografico.

Esercizio 1.8.38. Descrivere gli aperti di $\mathbb{R}^2$ per topologia indotta dall'ordine prodotto.

Esercizio 1.8.39. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi. Sia $A = \{(x, 0) : x \in 1 < x < 2)\}$. Dimostrare che A è aperto in X.

Esercizio 1.8.40. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi. Sia $A = \{(x, 0) : x \in 1 < x < 2)\}$. Dimostrare che A non è chiuso in X.

Esercizio 1.8.41. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi e sia O l'origine. Dimostrare che l'insieme

$$C = D_{Euclid}(O, 1) \setminus \{(x, 0) : \ 0 < x < 1\}$$

è chiuso. Dimostrare che l'insieme

$$C = D_{Euclid}(O, 1) \setminus \{(x, 0) : \ -1 < x < 1\}$$

non lo è.

Esercizio 1.8.42. Sia τ la topologia su $\mathbb{R}^2$ indotta dall'ordine lessicografico. Si descriva un sistema fondamentale di intorni dell'origine per τ. Si dica se τ e quella Euclidea sono una più fine dell'altra. Si dica se esiste una metrica su $\mathbb{R}^2$ che induce τ e nel caso se ne esibisca una.

Esercizio 1.8.43. Sia τ la topologia su $\mathbb{R}^2$ indotta dall'ordine prodotto. Si descriva un sistema fondamentale di intorni dell'origine per τ. Si dica se τ e quella Euclidea sono una più fine dell'altra. Si dica se esiste una metrica su $\mathbb{R}^2$ che induce τ e nel caso se ne esibisca una.

Esercizio 1.8.44. Dimostrare che l'insieme $(-\infty, 0] \cup (53, \infty)$ con la topologia dell'ordine (indotto da $\mathbb{R}$) è omeomorfo a $\mathbb{R}$ Euclideo.

Esercizio 1.8.45. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia di Zariski sia $X = \{xy > 0\}$. Si dica se X è aperto. Si determini la chiusura di X.

Esercizio 1.8.46. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia di Zariski sia $X = \{xy \neq 0\}$. Si dica se X è aperto. Si determini la chiusura di X.

Esercizio 1.8.47. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia di Zariski sia $X = \{y - e^x \neq 0\}$. Si dica se X è aperto. Si determini la chiusura di X.

Esercizio 1.8.48. Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia di Zariski. Sia $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di chiusi ognuno dei quali diverso da X. Dimostrare che $\cup_n A_n \neq X$.

Esercizio 1.8.49. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la topologia di Zariski. Sia $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di chiusi ognuno dei quali diverso da X. Dimostrare che $\cup_n A_n \neq X$.

Esercizio 1.8.50. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la topologia Euclidea. Trovare una famiglia $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ numerabile di chiusi ognuno dei quali diverso da X e tali che $\cup_n A_n = X$.

Esercizio 1.8.51. Trovare un insieme X con due topologie τ e σ. Con σ che non sia a base numerabile ma τ più fine di σ (e quindi con più aperti) e a base numerabile.

Esercizio 1.8.52. Siano τ, σ due topologie su un insieme X tali che $\sigma < \tau$. È vero che se τ è localmente numerabile allora anche σ lo è? È vero che se σ è localmente numerabile allora anche τ lo è?

Esercizio 1.8.53. Sia X un insieme, sia $x \in X$ e sia τ_x la topologia del punto particolare (Esercizio 1.1.11). Si dimostri che x è denso in X per τ_x. Se ne deduca che la topologia del punto particolare è sempre separabile.

Esercizio 1.8.54. Sia τ la topologia dell'ordine lessicografico su $\mathbb{R}^2$ e sia $X = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. L'ordine lessicografico di $\mathbb{R}^2$ induce l'ordine lessicografico su X. Sia σ la topologia dell'ordine lessicografico su X. Dimostrare che $\tau|_X \neq \sigma$.

Esercizio 1.8.55. Dimostrare che un sottospazio di uno spazio a base numerabile ha base numerabile.

Esercizio 1.8.56. Dimostrare che un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è Hausdorff.

Esercizio 1.8.57. Siano σ, τ due topologie su un insieme X tali che $\sigma \subseteq \tau$. Si dimostri che se σ è T_2 allora anche τ lo è. È vero il viceversa?

Esercizio 1.8.58. È vero che un sottospazio di uno spazio separabile è separabile?

Esercizio 1.8.59. Sia (X, τ) uno spazio topologico, sia $*$ un nuovo punto e sia $Y = X \cup \{*\}$ con la seguente topologia $\sigma = \{A \cup \{*\}, A \in \tau\} \cup \{\emptyset\}$. Si dimostri che σ è una topologia e che $*$ è denso in Y. (Si noti che X potrebbe non essere separabile).

Esercizio 1.8.60. Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici e sia $\mathcal{B}$ una base di τ. Dimostrare che una funzione $f : X \to Y$ è aperta se e solo se per ogni $B \in \mathcal{B}$ si ha $f(B) \in \sigma$. (Si veda il Teorema 1.7.5).

Esercizio 1.8.61. Dimostrare che la topologia del limite destro su $\mathbb{R}$ (Esempio 1.2.14) è localmente numerabile.

Esercizio 1.8.62. Dimostrare che la topologia del limite destro su $\mathbb{R}$ (Esempio 1.2.14) non ha una base numerabile. (Suggerimento: si consideri per assurdo una base numerabile e per ogni x si tenti di scrivere $[x, \infty)$ come unione degli aperti di base).

Esercizio 1.8.63. Dimostrare che la topologia del limite destro su $\mathbb{R}$ (Esempio 1.2.14) è separabile. Se ne deduca che non è indotta da una metrica.

Esercizio 1.8.64. Sia $X = \mathbb{R}$ dotato della topologia del limite destro (Esempio 1.2.14) e sia $Y = \mathbb{R}$ Euclideo. Dimostrare che una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo se è continua da destra per la topologia Euclidea su X.

Esercizio 1.8.65. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ (Euclideo) il grafico della funzione e^x e sia $f : X \to \mathbb{R}$ la restrizione della proiezione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si dica se f è aperta/chiusa.

Esercizio 1.8.66. Sia $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (Euclideo) la circonferenza unitaria e sia $f : S^1 \to \mathbb{R}$ la restrizione della proiezione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si dica se f è aperta/chiusa.

Esercizio 1.8.67. La funzione $f(x) = x^2$ è chiusa da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (Euclidei)?

Esercizio 1.8.68. Si dimostri che $\mathbb{R}$ e $(0,1)$ (Euclidei) sono omeomorfi.

Esercizio 1.8.69. Si dimostri che $\mathbb{R}^2$ e $\{x^2 + y^2 < 1\}$ sono omeomorfi (topologie Euclidee).

Esercizio 1.8.70. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ con le topologie standard sono omeomorfi?

Esercizio 1.8.71. Esiste una topologia su $\mathbb{R}$ che lo rende omeomorfo a $\mathbb{Q}$?

Esercizio 1.8.72. Esiste una topologia su $\mathbb{R}$ che lo rende omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ Euclideo?

Esercizio 1.8.73. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ con le topologie standard sono omeomorfi?

Esercizio 1.8.74. Esiste una topologia su $\mathbb{Q}$ che lo rende omeomorfo a $\mathbb{Z}$ con la topologia standard?

Esercizio 1.8.75. Siano τ e σ due topologie su X. Se τ è meno fine di σ si dimostri che ogni successione σ-convergente è anche τ-convergente.

Esercizio 1.8.76. Siano τ e σ due topologie su X e sia Y uno spazio topologico. Se τ è meno fine di σ si dimostri che ogni funzione $f : X \to Y$ che sia τ-continua è anche σ-continua.

Esercizio 1.8.77. Siano τ e σ due topologie su X e sia Y uno spazio topologico. Se τ è meno fine di σ si dimostri che ogni funzione $f : Y \to X$ che sia σ-continua è anche τ-continua.

Esercizio 1.8.78. Su $\mathbb{R}$ sia τ la topologia generata dagli intervalli del tipo $(a, b]$. (1) Si descrivano gli aperti di τ. (2) Si dica se τ è più fine della topologia Euclidea. (3) Si dica se la topologia Euclidea è più fine di τ. (4) Si descrivano le successioni τ-convergenti. (5) Si caratterizzino le funzioni τ-continue.

Esercizio 1.8.79. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo, dimostrare che un quadrato, un cerchio e un triangolo sono sempre omeomorfi tra loro (considerati come figure unidimensionali).

Esercizio 1.8.80. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo, dimostrare che un quadrato, un cerchio e un triangolo sono sempre omeomorfi tra loro (considerati come figure bidimensionali).

Esercizio 1.8.81. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo, dimostrare che due poligoni qualsiasi sono omeomorfi.

Esercizio 1.8.82. In $\mathbb{R}^2$ Euclideo sia X l'immagine di $(0, \infty)$ tramite la funzione

$$f(t) = e^{-1/t^2}(\cos(t + 1/t), \sin(t + 1/t)).$$

Si dica se X è omeomorfo a $\mathbb{R}$ Euclideo. Si dica se la chiusura di X è omeomorfa a $\mathbb{R}$ Euclideo.

Esercizio 1.8.83. Sia $X = \mathbb{R}^2$ dotato della topologia delle palle annidate (Esempio 1.1.10). Dimostrare che la funzione $f : X \to X$ data da $f(x) = 2x$ è un omeomorfismo.

Esercizio 1.8.84. Sia $X = \mathbb{R}^2$ dotato della topologia delle palle annidate (Esempio 1.1.10) e sia $Y = \mathbb{R}^2$ Euclideo. Dimostrare che la funzione $f : Y \to X$ data da $f(x) = 2x$ è continua, biunivoca, ma non è un omeomorfismo.

Esercizio 1.8.85. Sia $X = \mathbb{R}^2$, sia O l'origine e sia $\tau = \{B(O, 2^{-n}), n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, X\}$. Dimostrare che τ è una topologia.

Esercizio 1.8.86. Sia $X = \mathbb{R}^2$ e τ come nell'Esercizio 1.8.85. Dimostrare che $f : X \to X$ definita da $f(x) = 2x$ è continua e biunivoca, ma non è un omeomorfismo.

Esercizio 1.8.87. Si esibisca uno spazio topologico X tale che esista un punto $x \in X$ tale che nessuna successione non costante possa convergere a x.

Esercizio 1.8.88. Si esibisca uno spazio topologico X, con la proprietà che i punti non siano aperti, tale che esista un punto $x \in X$ tale che nessuna successione non costante possa convergere a x.

Esercizio 1.8.89. Sia $(X, <)$ un insieme ben ordinato e sia $x \in X$. Sia $\tau = \{[t, x], t < x\} \cup \{\emptyset, X\}$. Si dimostri che τ è una topologia su X. La si confronti con la topologia dell'ordine.

Esercizio 1.8.90. Sia $X = [0, 1]$, sia $x = 1$ e sia τ definita come nell'esercizio 1.8.89. Si dica se τ è una topologia.

Esercizio 1.8.91. Sia $X = \mathbb{N}$, sia $x = 51$ e sia τ come nell'esercizio 1.8.89. Si dica se τ è T_2. Si dica se τ soddisfa gli assiomi di numerabilità.

Esercizio 1.8.92. Sia X un insieme ben ordinato avente un elemento massimale x. Sia τ come nell'esercizio 1.8.89. Si dica se i punti di X sono aperti.

Esercizio 1.8.93. Sia X un insieme ben ordinato avente un elemento massimale x. Sia τ come nell'esercizio 1.8.89. Si discuta l'esistenza di successioni convergenti a x.

Esercizio 1.8.94. Sia $X = \omega_1 + 1 = \omega_1 \cup \{\omega_1\}$ e sia $x = \omega_1$ il suo massimo. Sia τ come nell'esercizio 1.8.89. Si discutano le proprietà di τ.

CAPITOLO 2

Costruzioni con spazi topologici

2.1. Prodotti di spazi topologici

Cominciamo col caso facile del prodotto di due spazi.

Definizione 2.1.1 (Topologia prodotto)**.** Siano (X,τ) e (Y,σ) due spazi topologici. Sia $X\times Y$ il prodotto cartesiano dei due, ossia $X\times Y=\{(x,y)\ :\ x\in X, y\in Y\}$. Siano $\pi_X : X\times Y\to X$ e $\pi_Y : X\times Y\to Y$ le proiezioni naturali $\pi_X(x,y)=x$ e $\pi_Y(x,y)=y$. La **topologia prodotto** $\tau\times\sigma$ è la topologia meno fine che rende continue π_X e π_Y.

Teorema 2.1.2. *Siano (X,τ) e (Y,σ) due spazi topologici. Allora*

(1) *La topologia prodotto è generata dagli insiemi $A\times B$ con $A\in\tau$ e $B\in\sigma$, che ne costituiscono una base.*
(2) *Se $\mathcal{A}=(A_i)_{i\in I_X}$ è una base di τ e $\mathcal{B}=(B_i)_{i\in I_Y}$ lo è di σ, allora la famiglia $\mathcal{C}=\{A_i\times B_j\ :\ i\in I_X, j\in I_Y\}$ è una base di $\tau\times\sigma$. In particolare, se X,Y sono a base numerabile anche $X\times Y$ lo è.*

DIMOSTRAZIONE. In generale, per ogni A,B,C,D vale

$$(A\times B)\cap(C\times D)=\{(x,y)\in X\times Y :\ x\in A, y\in B,\ \text{e}\ x\in C, y\in D\}=(A\cap C)\times(B\cap D).$$

Ne segue che la famiglia $\mathcal{F}=\{A\times B, A\in\tau, B\in\sigma\}$ è chiusa per intersezione. Per il Corollario 1.2.7, $\mathcal{F}$ è la base di una topologia ρ. Vediamo che $\rho=\tau\times\sigma$. Se A è un aperto di X allora $\pi_X^{-1}(A)=A\times Y$ è un prodotto di aperti e quindi sta in ρ. Quindi π_X è continua per ρ. Stesso discorso per π_Y.

Sia ora η una qualsiasi topologia che rende continua le proiezioni. Siccome π_X è continua, allora per ogni $A\in\tau$ si ha che $A\times Y$ è un aperto di η. Similmente, per ogni $B\in\sigma$ si ha $X\times B\in\eta$. Ne segue che $A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)\in\eta$. Quindi η è più fine di ρ.

Veniamo ora al secondo punto. Siccome $\mathcal{A}$ è una base di τ e $\mathcal{B}$ lo è di σ

$$\forall A\in\tau\ \exists S_A\subseteq I_X :\ A=\bigcup_{i\in S_A}A_i,\qquad \forall B\in\sigma\ \exists S_B\subseteq I_Y :\ B=\bigcup_{i\in S_B}B_i.$$

Ne segue che

$$A\times B=\bigcup_{i\in S_A\ j\in S_B}A_i\times B_j$$

dunque ogni elemento di $\mathcal{F}$ è unione di elementi di $\mathcal{C}$, che è quindi una base di $\rho=\tau\times\sigma$. $\square$

Esercizio 2.1.3. Si dimostri che la topologia Euclidea di $\mathbb{R}^2$ è il prodotto delle topologie Euclidee su $\mathbb{R}$.

È bene non dimenticare che gli aperti della topologia prodotto non sono necessariamente dei prodotti. Per esempio $B(0,1)\subseteq\mathbb{R}^2$ è aperto ma non è un prodotto.

Teorema 2.1.4. *Uno spazio topologico X è T_2 se e solo se la diagonale*

$$\Delta=\{(x,x) :\ x\in X\}\subseteq X\times X$$

è chiusa in $X\times X$ per la topologia prodotto.

DIMOSTRAZIONE. Dire $(x,y) \notin \Delta$ equivale a dire $x \neq y$ e dire $A \cap B = \emptyset$ equivale a dire $(A \times B) \cap \Delta = \emptyset$. La diagonale Δ è chiusa se e solo se il suo complementare Δ^c è aperto, se e solo se ogni $(x,y) \in \Delta^c$ è interno a Δ^c, se e solo se esiste U intorno di (x,y) tale che $U \subseteq \Delta^c$. Siccome la topologia prodotto è generata dai prodotti di aperti, ciò è equivalente a dire che esistono A, B aperti tale che $(x,y) \in A \times B \subseteq \Delta^c$, ma ciò è equivalente a chiedere che $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Esempio 2.1.5. La topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$ è diversa dal prodotto delle topologie di Zariski di $\mathbb{R}$. Infatti $\mathbb{R}$ con la Zariski non è T_2, ma la diagonale di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è chiusa per la topologia di Zariski. (Posto $p(x,y) = x - y$ si ha $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} = Z(p)$.)

Teorema 2.1.6. *Siano X, Y spazi di Hausdorff non vuoti. Allora $X \times Y$ è di Hausdorff se e solo se entrambi X, Y lo sono.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo X, Y di Hausdorff. Siano $(x,y) \neq (x',y')$ due punti diversi di $X \times Y$. Se $x \neq x'$ allora esistono A, A' aperti di X tali che $x \in A$ e $x' \in A'$ con $A \cap A' = \emptyset$. Quindi $A \times Y$ e $A' \times Y$ separano (x,y) e (x',y'). Stesso discorso se $y \neq y'$.

Viceversa, supponiamo $X \times Y$ di Hausdorff. Sia $x \neq x' \in X$ e sia $y \in Y$. I punti (x,y) e (x',y) sono diversi in $X \times Y$. Esistono quindi aperti A, A' in $X \times Y$ tali che $(x,y) \in A$ e $(x',y) \in A'$ con $A \cap A' = \emptyset$. Siccome la topologia prodotto è generata dai prodotti di aperti, esistono U, U' aperti di X con $x \in U$ e $x' \in U'$ e V aperto di Y con $y \in V$ tali che $U \times V \subseteq A$ e $U' \times V \subseteq A'$. Ne segue che $U \cap U' = \emptyset$. Quindi X è T_2. Stesso discorso per Y. $\square$

Il prodotto si può fare di una quantità di spazi qualsiasi.

Esempio 2.1.7. Il toro classico è $T = T^2 = S^1 \times S^1$. Per ogni n si definisce il toro n-dimensionale come

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ volte}}$$

Ça va sans dire, la definizione di topologia prodotto si estende per induzione a tutti i prodotti finiti (cioè prodotti di un numero finito di spazi).

Esercizio 2.1.8. Siano $(X,\tau), (Y,\sigma), (Z,\rho)$ tre spazi topologici, dimostrare su $X \times Y \times Z$ le topologie $(\tau \times \sigma) \times \rho$ e $\tau \times (\sigma \times \rho)$ coincidono.

In generale quindi, se $(X_i)_{i \in I}$ è una famiglia finita di spazi topologici, il loro prodotto può essere definito ricorsivamente. Più in generale ancora, se $(X_i)_{i \in I}$ è una famiglia qualsiasi di insiemi, assumendo l'assioma di scelta si può definire il prodotto

$$\Pi_{i \in I} X_i$$

come l'insieme delle I-uple $(x_i)_{i \in I}$ ove $x_i \in X_i$ per ogni $i \in I$. (L'assioma di scelta ci dice che tale insieme di I-uple è non vuoto.) Nel caso particolare in cui gli X_i siano copie di uno stesso insieme X, allora

$$\Pi_{i \in I} X = X^I = \{f : I \to X\}$$

(e questo è sempre non vuoto perché una funzione da I a X è un sottoinsieme di $I \times X$).

Definizione 2.1.9 (Topologia prodotto infinito)**.** Sia $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ una famiglia qualsiasi di spazi topologici e siano $\pi_i : \Pi_{i \in I} X_i \to X_i$ le proiezioni naturali. La topologia prodotto $\Pi_{i \in I} \tau_i$ è la meno fine che rende continue tutte le proiezioni.

Anche se le definizioni sono uguali, quando si fanno prodotti infiniti c'è una piccola sottigliezza a cui stare attenti.

Teorema 2.1.10. *Sia $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ una famiglia qualsiasi di spazi topologici. Allora la topologia prodotto è generata dagli insiemi $\Pi_{i\in I} A_i$ ove $A_i \in \tau_i$ e*

$$A_i \neq X_i \quad \text{solo per un numero finito di indici.}$$

Inoltre, la famiglia $\mathcal{F}$ di tali insiemi è una base di $\Pi_i \tau_i$.

DIMOSTRAZIONE. Sia ρ la topologia generata dagli elementi di $\mathcal{F}$. La famiglia $\mathcal{F}$ è chiusa per intersezione finita e dunque è una base di ρ. (Corollario 1.2.7 e Teorema 1.2.17).

Per come è definita, ρ rende continue le proiezioni. Sia ora η una topologia che rende continue le proiezioni. Siccome π_i è continua, allora per ogni $A_i \in \tau_i$, ponendo $A_j = X_j$ per $j \neq i$, si ha che $\Pi_{i\in I} A_i$ deve essere aperto. Quindi ogni intersezione finita di tali insiemi deve essere un aperto. Quindi $\eta \supseteq \rho$. □

Teorema 2.1.11. *Sia $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e per ogni i sia $\mathcal{B}_i$ una base di τ_i. Allora una base della topologia prodotto è formata dalla famiglia*

$$\mathcal{C} = \{\Pi_{i\in I} A_i : \ A_i \neq X_i \text{ solo per un numero finito di indici e } A_i \in \mathcal{B}_i\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 2.1.10, una base della topologia prodotto è la famiglia $\mathcal{F}$ degli insiemi del tipo ΠA_i con $\tau_i \ni A_i \neq X_i$ solo per un numero finito di indici. Basta quindi far vedere che ogni elemento di $\mathcal{F}$ è unione di elementi di $\mathcal{C}$.

Sia $A = \Pi_i A_i \in \mathcal{F}$. Per ogni $A_i \neq X_i$ esistono elementi $(B_i^j)_{j\in S_i} \subseteq \mathcal{B}_i$ tali che $A_i = \cup_{j\in S_i} B_i^j$. Quindi, ponendo $S_i = \{1\}$ se $A_i = X$ e $B_i^1 = X_i$; per ogni scelta di $j_i \in S_i$, si ha che $\Pi_i B_i^{j_i}$ è un elemento di $\mathcal{C}$. Chiaramente

$$\Pi_i A_i = \bigcup_{(j_i)\in\Pi_i S_i} \Pi_i B_i^{j_i}.$$

□

Teorema 2.1.12 (Le proiezioni sono aperte). *Sia $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ una famiglia qualsiasi di spazi topologici e sia $X = \Pi X_i$ con la topologia prodotto. Allora ogni proiezione naturale $\pi_i : X \to X_i$ è aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{C}$ la base della topologia prodotto data dal Teorema 2.1.11. Per come è definita $\mathcal{C}$, per ogni $A \in \mathcal{C}$, è ovvio che $\pi_i(A)$ sia aperto. La tesi segue (si veda l'Esercizio 1.8.60). □

Occhio! Ché in generale le proiezioni non son chiuse (si veda a tal proposito l'Esempio 1.7.39).

Teorema 2.1.13. *Sia $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e sia $X = \Pi X_i$ con la topologia prodotto. Sia (x_n) una successione in X. Allora $x_n \to x \in X$ se e solo se per ogni $i \in I$ si ha $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 1.7.9, siccome le proiezioni sono continue, se $x_n \to x$ allora $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$ per ogni $i \in I$. Vediamo il viceversa. Usiamo la base della topologia prodotto data dal Teorema 2.1.10. Per ogni intorno U di x in X esiste un elemento A della base tale che $x \in A$. L'aperto A sarà della forma

$$A = \Pi_i A_i \qquad \sharp(\{i : A_i \neq X_i\}) < \infty.$$

Siccome per ogni i si ha $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$ e siccome $A_i \neq X_i$ solo per un numero finito di indici, esiste $n_0 > 0$ tale che per ogni $n > n_0$ e ogni $i \in I$ si ha

$$\pi_i(x_n) \in A_i.$$

Dunque $x_n \in A$ definitivamente e quindi $x_n \to x$. □

Corollario 2.1.14. *La topologia della convergenza puntuale su X^Y è quella prodotto.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che X^Y è l'insieme delle funzioni da Y a X. Usando il Teorema 2.1.13 ponendo $I = Y$ e $X_i = X$ per ogni $i \in Y$ si ha la tesi. □

Teorema 2.1.15. *Sia $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ una famiglia qualsiasi di spazi topologici e sia $Y = \Pi Y_i$ con la topologia prodotto. Sia X uno spazio topologico e per ogni $i \in I$ sia $f_i : X \to Y_i$ una funzione. Sia $f : X \to Y$ la funzione definita da*

$$f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$$

essa è continua se e solo se ogni f_i lo è.

DIMOSTRAZIONE. Se f è continua, siccome le proiezioni sono continue, allora ogni $f_i = \pi_i \circ f$ è continua. Viceversa, supponiamo che ogni f_i sia continua. Usiamo la base $\mathcal{C}$ del Teorema 2.1.11. Per il Teorema 1.7.5 ci basta dimostrare che $f^{-1}(A)$ è aperto per ogni elemento $A \in \mathcal{C}$. Sia $A = \Pi_i A_i$. Siccome gli A_i sono aperti e le f_i sono continue, $f_i^{-1}(A_i)$ è aperto. In otre $f_i^{-1}(Y_i) = X$. Chiaramente $f^{-1}(A) = \cap_i f_i^{-1}(A_i)$ e siccome solo un numero finito degli A_i è diverso da Y_i, ne segue che $\cap_i f_i^{-1}(A_i)$ è di fatto un'intersezione finita di aperti, ergo aperto. $\square$

Corollario 2.1.16. *Sia Y uno spazio topologico T_2 e sia X uno spazio topologico. Siano $f, g : X \to Y$ funzioni continue. Allora l'insieme $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome f, g sono continue, allora la funzione $f \times g : X \to Y \times Y$ data da $(f(x), g(x))$ è continua per il Teorema 2.1.15. Per il Teorema 2.1.4 la diagonale di $Y \times Y$ è chiusa e per continuità la sua preimmagine, che coincide con $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$, è un chiuso di X. $\square$

2.2. Quozienti

Cominciamo con un po' di terminologia. Se $\sim$ è una relazione di equivalenza su un insieme X, si denota con $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$ la classe di equivalenza di $x \in X$; con $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$ il quoziente di X e con $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione naturale $x \mapsto [x]$.

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice **saturo** se $x \in A, y \sim x \Rightarrow y \in A$. In altre parole A è saturo se è unione di classi di equivalenza. Ancora, A è saturo se $A = \pi^{-1}(\pi(A))$.

Il saturato $\mathrm{sat}(A)$ di un sottoinsieme A è il più piccolo saturo contenente A, esso coincide con l'intersezione di tutti i saturi contenenti A o, equivalentemente, con l'unione di tutte le classi di equivalenza di elementi di A o, in formule, $\mathrm{sat}(A) = \pi^{-1}(\pi(A))$.

Una relazione $\sim$ può essere identificata col sottoinsieme R di $X \times X$ dato dalle coppie $R = \{(x, y) : x \sim y\}$. Non tutte le relazioni, e quindi sottoinsiemi di $X \times X$, sono d'equivalenza: per esempio, la simmetria impone che R contenga la diagonale. Dato un sottoinsieme qualsiasi R, la relazione d'equivalenza da esso generata è la più piccola relazione d'equivalenza contenente R. (Vedasi Sezione 0.6.)

Esempio 2.2.1 (Collasso di un sottoinsieme). L'operazione intuitiva di "collassare un sottoinsieme a un punto" si formalizza con il linguaggio dei quozienti. Sia X un insieme e $A \subseteq X$. Sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $x \sim y$ se $x, y \in A$ (come insieme in $X \times X$ si considera quindi $A \times A$ e la relazione d'equivalenza da esso generata). Esplicitamente, la relazione d'equivalenza generata è:

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ oppure} \\ x, y \in A \end{cases}$$

In questo caso il quoziente $X/\sim$ si denota solitamente con X/A. Le classi d'equivalenza sono $[x] = \{x\}$ se $x \notin A$ e $[x] = A$ se $x \in A$. Per ogni $B \subseteq X$ si ha $\mathrm{sat}(B) = B$ se $B \cap A = \emptyset$ e $\mathrm{sat}(B) = B \cup A$ se $B \cap A \neq \emptyset$. (Figura 1.)

Lemma 2.2.2. *Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su un insieme X e sia $A \subseteq X$. Allora A è saturo se e solo se A^c lo è.*

DIMOSTRAZIONE. X è unione disgiunta delle classi di equivalenza. Per definizione A è saturo se e solo se è unione di classi di equivalenza, se e solo se il suo complementare è unione delle rimanenti classi di equivalenza. $\square$

FIGURA 1. Il collasso di un sottoinsieme a un punto

Definizione 2.2.3 (Topologia quoziente)**.** Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X. Per ogni topologia su X, la topologia quoziente è quella indotta da π su $X/\sim$ (cioè la più fine che rende π continua. Si veda il Teorema 1.7.46).

Se $\sim$ è una relazione d'equivalenza su uno spazio topologico (X, τ), allora la topologia quoziente si descrive esplicitamente:

$$\{A \subseteq X/\sim \ \text{ t.c. } \pi^{-1}(A) \in \tau\}.$$

Gli aperti di $X/\sim$ corrispondono quindi agli aperti saturi di X. La topologia pull-back tramite π, della topologia quoziente, è la topologia su X formata da tutti gli aperti saturi di τ. Tale topologia si chiama talvolta la **saturata** di τ ed è chiaramente meno fine di τ.

Similmente, i chiusi di $X/\sim$ corrispondono ai chiusi saturi di X. (Ciò dipende dal fatto che $\pi^{-1}(A^c) = (\pi^{-1}(A))^c$ e dal Lemma 2.2.2).

Esempio 2.2.4. Sia (X, τ) uno spazio topologico, sia $A \subseteq X$ e sia $\sim$ la relazione d'equivalenza che definisce il collasso di A a un punto. La topologia saturata su X (che corrisponde alla topologia quoziente di X/A) è formata dagli elementi di τ che, se intersecano A allora lo contengono interamente.

Definizione 2.2.5. Sia X uno spazio topologico, sia $Y = X \times [0, 1]$ e sia $A = X \times \{0\} \subset Y$. Il **cono** su X è lo spazio Y/A. (Figura 2.)

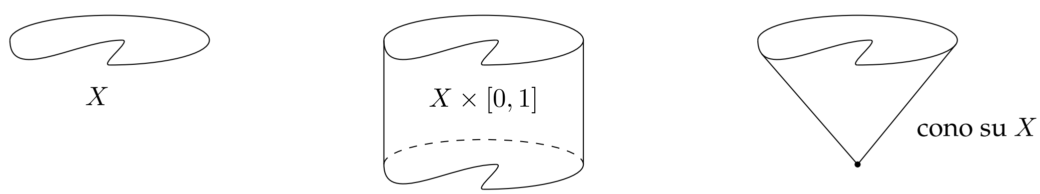


FIGURA 2. Cono su uno spazio topologico X

Esempio 2.2.6. Il cono su S^1 è D^2. (L'identificazione di D^2 col cono su S^1 è data dalle coordinate polari.)

I quozienti servono anche per formalizzare l'operazione intuitiva di "incollamento": si dichiarano equivalenti i punti che si vorrebbero incollare.

Esempio 2.2.7 (Nastro di Moebius chiuso). Sia $X = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ e sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $(0, t) \sim (2\pi, -t)$ per ogni $t \in [-1, 1]$. Lo spazio quoziente è il nastro di Moebius. (Figura 3.)

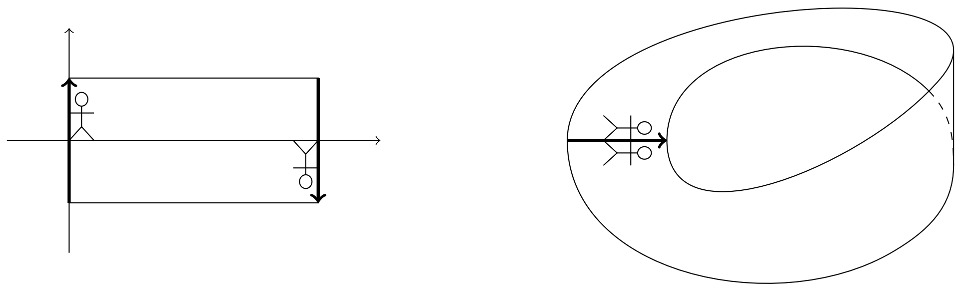


FIGURA 3. Nastro di Moebius

La costruzione del nastro di Moebius appena descritta è in realtà un caso particolare di un procedimento generale, noto in inglese come *mapping torus*, traducibile con "toro dell'applicazione", noto anche come "toro di sospensione di una funzione". Poco importa il nome, vediamone la sostanza.

Dato uno spazio topologico X e un omeomorfismo $f : X \to X$, si considera il prodotto $X \times [0, 1]$ e poi si incolla $(x, 1)$ con $(f(x), 0)$. Cioè si forma la relazione d'equivalenza generata da

$$(x, 1) \sim (f(x), 0)$$

e si definisce il toro di f come il quoziente $T_f = (X \times [0, 1])/ \sim$. Il nastro di moebius è omeomorfo al toro dell'omeomorfismo di $[-1, 1]$ dato da $f(x) = -x$.

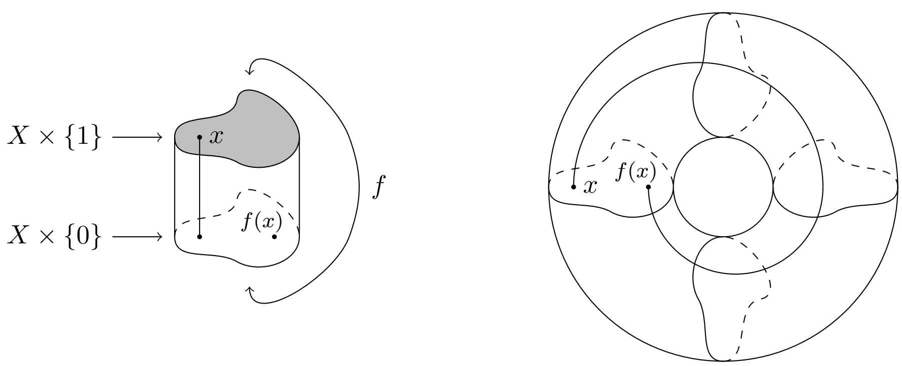


FIGURA 4. Il toro di sospensione di un omeomorfismo $f : X \to X$

Esempio 2.2.8. Sia $X = S^1$. Se $f = Id$ allora T_f è omeomorfo al toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Se f è una riflessione rispetto ad un diametro di S^1 (per esempio considerando $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, possiamo usare $f(x, y) = (x, -y)$) allora T_f è la famosa **Bottiglia di Klein** (un curioso contenitore in cui il "dentro" e il "fuori" coincidono).

I quozienti si usano in generale anche per definire strutture matematiche.

Esempio 2.2.9 (Il proiettivo). In $\mathbb{R}^3$ privato dell'origine si pone la relazione d'equivalenza $v \sim w$ se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $v = \lambda w$. Il quoziente $\mathbb{R}^3/ \sim$ è il piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$. La topologia del proiettivo è quella quoziente.

Con in quozienti si possono produrre molti esempi interessanti.

Esempio 2.2.10 (La retta con due zeri). Sia $X = \mathbb{R} \times \{0,1\} \subset \mathbb{R}^2$ con la relazione d'equivalenza generata da
$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = x' \neq 0.$$
$(x, 0)$ è identificato con $(x, 1)$ per ogni $x \neq 0$, ma $(0, 0)$ non è equivalente a $(0, 1)$. Quindi $X/\sim$ assomiglia a una retta con due zeri: $[(0, 0)]$ e $[(0, 1)]$. Gli insiemi saturi sono fatti così: se contengono $(x, 0)$ con $x \neq 0$ allora contengono anche $(x, 1)$ e viceversa. Quindi due intorni saturi qualsiasi di $(0, 0)$ e $(0, 1)$ non sono mai disgiunti. In particolare, $X/\sim$ non è T_2 e la successione $[(1/n, 0)]$ converge simultaneamente sia a $[(0, 0)]$ che a $[(0, 1)]$.

Esempio 2.2.11. Sia Z l'insieme dei numeri interi di $\mathbb{R}$. Lo chiamiamo Z e non $\mathbb{Z}$ perché vogliamo enfatizzare che lo consideriamo solo come un insieme. Sia $X = \mathbb{R}/Z$ (inteso come collasso di Z a un punto); visivamente è formato da infiniti cerchi che passano per un punto. Sia $z = [Z]$ il punto comune a tutti i cerchi. Se $x \neq z$ allora una base di intorni di x è fatta come in $\mathbb{R}$. Altrimenti, affinché un insieme U contenente z sia aperto, è necessario che $\pi^{-1}(U)$ sia un aperto che contenga Z. In particolare, per ogni successione $E = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ di numeri positivi, l'insieme $U_E = \pi(\cup_n B(n, \varepsilon_n))$ è un intorno di z e la famiglia $\{U_E : E \text{ successione di numeri positivi }\}$, è un sistema fondamentale di intorni di z. Tale famiglia è chiaramente non numerabile, ma c'è di più: z non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile (e quindi X non ha una base numerabile). Vediamolo.

Sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una famiglia numerabile di intorni di z. Consideriamo $A_n = \pi^{-1}(U_n) \subseteq \mathbb{R}$. Ogni $k \in Z$ è interno ad A_n per ogni n. Quindi esiste $0 < \varepsilon_n^k$ tale che la palla $B(k, \varepsilon_n^k) \subseteq A_n$. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ scegliamo $0 < \delta_n < \varepsilon_n^n$. Sia $A = \cup_{k\in\mathbb{Z}} B(k, \delta_k)$. A è un aperto saturo e quindi $\pi(A)$ è un aperto. Inoltre nessuno degli A_n è contenuto in A per come è definito δ_n. Quindi nessuno degli U_n è contenuto in $\pi(A)$ e dunque $\{U_n\}$ non è un sistema fondamentale di intorni di z.

Si noti che questo esempio fornisce una topologia su $\mathbb{R}$, quella saturata, meno fine di quella Euclidea (che ha base numerabile) ma che non è a base numerabile.

La proiezione naturale $\pi : X \to X/\sim$ in generale non ha motivi di essere aperta/chiusa. (Lo sarà in casi particolari, come quello del Teorema 6.5.28.)

Esempio 2.2.12. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $(x, y) \sim (x, y')$. Le classi d'equivalenza sono le rette verticali, il quoziente è omeomorfo a $\mathbb{R}$ e la proiezione naturale è la proiezione canonica $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $\pi(x, y) = x$. Che non è chiusa (Esempio 1.7.39).

Esempio 2.2.13. Sia $A = [-2, 2] \subset \mathbb{R}$ e sia $X = \mathbb{R}/A$. La proiezione $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/A$ non è aperta perché $(-1, 1)$ è un aperto ma $\pi(-1, 1) = [A]$, no.

Esempio 2.2.14. Sia $X = [-2, 2] \times [-2, 2] \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $(x, y) \sim (x, y')$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$. Sia U la palla centrata nell'origine e di raggio 1. U è un aperto, ma il suo saturato, che è $U \cup ((\mathbb{Q} \cap (-1, 1)) \times [-2, 2])$, non contiene nessun aperto saturo. In particolare $\pi(U)$ non solo non è aperto, ma addirittura ha parte interna vuota in $X/\sim$.

Teorema 2.2.15. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Se X è a base numerabile e la proiezione π è aperta, allora anche $X/\sim$ è a base numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia B_n una base numerabile di τ e siano $A_n = \pi^{-1}(\pi(B))$ i saturati di B_n. Siccome π è aperta, allora $\pi(B_n)$ è aperto e, per continuità, A_n è aperto. Vediamo che gli A_n formano una base per la topologia saturata di τ. Sia A un aperto saturo. In quanto aperto, è unione di elementi della base
$$A = \cup_{i\in I_A} B_i.$$
Siccome A è saturo, è unione dei saturati dei B_i cioè $A = \cup_i A_i$. Quindi ogni aperto saturo è unione degli A_n. □

Teorema 2.2.16. *Siano X, Y insiemi qualsiasi e sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su X. Sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora esiste $[f] : X/\sim \to Y$ tale che $f = [f] \circ \pi$ se e solo se f è costante sulle classi di equivalenza.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\sim \arrow[r, "{[f]}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Inoltre se X, Y sono spazi topologici e $X/\sim$ è dotato della topologia quoziente, allora $[f]$ è continua se e solo se f lo è.

DIMOSTRAZIONE. Se $f = [f] \circ \pi$ allora $f(x) = [f](\pi(x))$. Se $x \sim y$ allora $\pi(x) = \pi(y)$ e quindi $f(x) = [f](\pi(x)) = [f](\pi(y)) = f(y)$. Viceversa, se f è costante sulle classi, ponendo $[f]([x]) = f(x)$ si ha una ben definita funzione su $X/\sim$. Per come è definita, $f(x) = [f](\pi(x))$.

Vediamo la continuità. Se $[f]$ è continua allora, siccome π è continua la composizione $f = [f] \circ \pi$ è continua. Viceversa, se f è continua e A è un aperto di Y allora $f^{-1}(A)$ è un aperto di X e siccome f è costante sulle classi di equivalenza, esso è saturo. Quindi $\pi(f^{-1}(A)) = [f]^{-1}(A)$ è aperto e dunque $[f]$ è continua. □

Corollario 2.2.17. *Siano X, Y due insiemi e siano $\sim_X$ e $\sim_Y$ relazioni d'equivalenza su X, Y rispettivamente. Sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora esiste $[f] : X/{\sim_X} \to Y/{\sim_Y}$ tale che $[f] \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$ se e solo se $x \sim_X x' \Rightarrow f(x) \sim_Y f(x')$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y \circ f"] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X/{\sim_X} \arrow[r, "{[f]}"'] & Y/{\sim_Y} \end{tikzcd}$$

Inoltre, se X, Y sono spazi topologici e i quozienti sono dotati delle topologie quoziente; se f è continua, allora $[f]$ è continua.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema 2.2.16 con $\pi_Y \circ f$ al posto di f. □

Esempio 2.2.18 (Coordinate polari). Sia $X = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ e sia $Y = D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. La funzione $f : X \to Y$ data da $f(\rho, \theta) = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$ è continua. Se mettiamo su X la relazione d'equivalenza generata da $(0, \theta) \sim (0, \theta')$ e $(\rho, 0) \sim (\rho, 2\pi)$ allora f è costante sulle classi d'equivalenza e induce quindi una funzione continua $[f] : X/\sim \to Y$. Questa non è altro che l'usuale parametrizzazione del disco in coordinate polari.

Se inoltre su Y collassiamo ∂Y a un punto, abbiamo una funzione continua tra $X/\sim$ e $Y/\partial Y$. Se infine in X poniamo la relazione $\sim'$ generata da $\sim$ e $(1, \theta) \sim' (1, \theta')$ (cioè identifichiamo anche $(1, \theta)$ con $(1, \theta')$), otteniamo una funzione continua $[f] : X/\sim' \to Y/\partial Y$ (stiamo parametrizzando una sfera con coordinate polari).

2.3. Varietà topologiche, superfici e grafi

Definizione 2.3.1. Una **varietà topologica di dimensione** n è uno spazio topologico X di Hausdorff, a base numerabile e che sia localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, cioè tale che per ogni $x \in X$ esista un intorno aperto U di x e un omeomorfismo f tra U e un aperto V di $\mathbb{R}^n$. Una **superficie** è una varietà topologica di dimensione due. Gli aperti U, insieme alle loro identificazioni, si chiamano carte locali. (Figura 5).

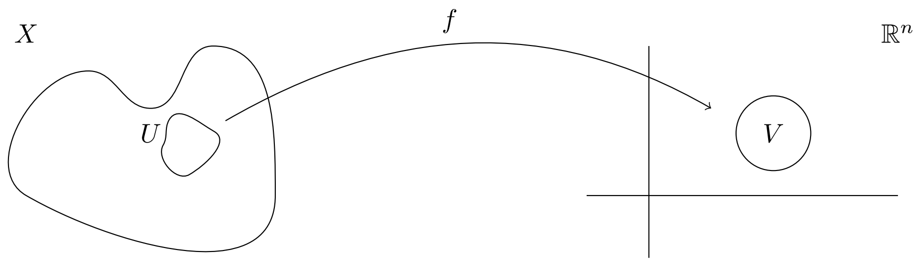


FIGURA 5. Carta locale in una varietà

Esempio 2.3.2. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora il grafico di f è una varietà topologica di dimensione n. L'omeomorfismo locale è dato dalla proiezione $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Le proprietà di essere T_2 e a base numerabile sono ereditate da $\mathbb{R}^{n+1}$.

Esempio 2.3.3. Per ogni n, la sfera n-dimensionale S^n è una varietà topologica di dimensione n. Infatti per il teorema del Dini è localmente un grafico e dunque localmente omeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Essendo un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ l'essere T_2 e a base numerabile sono ovvi. In particolare, S^2 è una superficie.

Esempio 2.3.4. In $\mathbb{R}^3$ sia $C = \{z^2 = x^2 + y^2\}$. Esso non è una superficie in quanto nell'origine non è localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^2$. (Questa cosa è intuitiva, ma per formalizzarla bene serve la nozione connessione. Si veda a tal proposito la Sezione 6.1.)

Esempio 2.3.5. La retta con due zeri (Esempio 2.2.10) è localmente omeomorfa a $\mathbb{R}$, ha base numerabile, ma non è T_2. Quindi non è una varietà.

Esempio 2.3.6 (La retta lunga). Sia ω_1 il primo ordinale non numerabile e sia X lo spazio $\omega_1 \times [0, 1)$ dotato della topologia dell'ordine lessicografico e privato dello zero. X è localmente omeomorfo a $\mathbb{R}$. Per vederlo, per ogni $\alpha < \omega_1$, siccome α è numerabile basta scegliere una successione $\{\varepsilon_\beta\}_{\beta\in\alpha}$ tale che $\varepsilon_\beta > 0$ e $\sum \varepsilon_\beta = 1$. La funzione

$$f(\beta, t) = t\varepsilon_\beta + \sum_{\eta<\beta} \varepsilon_\eta$$

fornisce un omeomorfismo locale tra X e $\mathbb{R}$. Siccome ω_1 non è numerabile, X non è a base numerabile e quindi non è una varietà.

Se X è una varietà topologica, e $f_1 : U_1 \to V_1, f_2 : U_2 \to V_2$ sono carte locali (cioè, gli U_i sono aperti di X, i V_i sono aperti di $\mathbb{R}^n$ e le f_i sono omeomorfismi) la mappa $\varphi_{2,1} = f_2 \circ f_1^{-1} : f_1(U_1 \cap U_2) \to f_2(U_1 \cap U_2)$ si chiama **cambio di carta**; essa è un omeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$. Se $F : X \to Y$ è una funzione, essa può essere *letta* in carte locali come $F \circ f_1^{-1} : f_1(U_1) \to Y$ (nella carta U_1). Si noti che $F \circ f_1^{-1}$ è una funzione definita su un aperto di $\mathbb{R}^n$, quindi usualmente più facile da trattare per fare i calcoli. La terminologia deriva dalle cartine geografiche. Una mappa non è altro che un omeomorfismo locale tra il mondo (S^2) e un foglio di carta. Le funzioni come latitudine, longitudine, altezza etc... si possono leggere in carte locali sulle pagine di un atlante. (Figura 6).

Teorema 2.3.7. *Sia X una varietà topologica di dimensione n e sia Y una varietà topologica di dimensione k. Allora $X \times Y$ è una varietà topologica di dimensione $n + k$.*

DIMOSTRAZIONE. I Teoremi 2.1.2 e 2.1.6 garantiscono che $X \times Y$ è T_2 e a base numerabile. Sia $(x, y) \in X \times Y$. Sia U_x un intorno aperto di $x \in X$ e sia $f_x : U_x \to V_x$ un omeomorfismo tra U_x e un aperto V_x di $\mathbb{R}^n$. Similmente definiamo $f_y : U_y \to V_y$. L'insieme $V_x \times V_y$ è un aperto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, che è omeomorfo a $\mathbb{R}^{n+k}$. La funzione $U_x \times U_y \to V_x \times V_y$ data da

$$(a, b) \mapsto (f_x(a), f_y(b))$$

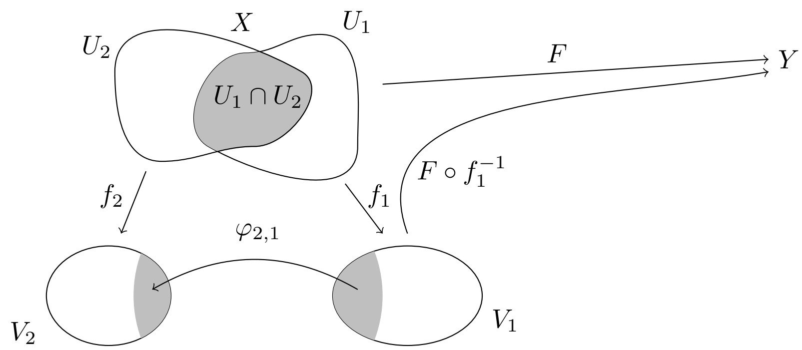


FIGURA 6. Cambi di carta e lettura in carte locali

fornisce un omeomorfismo locale tra $X \times Y$ e $\mathbb{R}^{n+k}$. □

Esempio 2.3.8. Il toro $T^2 = S^1 \times S^1$ è una superficie perché S^1 è una varietà topologica unidimensionale.

Definizione 2.3.9. Una **varietà topologica di dimensione** n **con bordo** è uno spazio topologico X di Hausdorff, a base numerabile e tale che sia localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$, cioè tale che per ogni $x \in X$ esista un intorno aperto U di x e un omeomorfismo tra U e un aperto di $\mathbb{R}^n_+$. Il **bordo** di X è l'insieme dei punti che corrispondono, nelle carte locali, a punti di $\{x_1 = 0\}$. (Si noti che il bordo è ben definito per il teorema dell'invarianza del dominio, vedasi l'Esercizio 2.4.11).

Esempio 2.3.10. Il disco D^2 è una superficie a bordo, il suo bordo è $S^1 = \partial D^2$.

Le varietà sono spazi topologici particolarmente buoni, perché localmente sono spazi che assomigliano ai rassicuranti $\mathbb{R}^n$. In generale, si trattano bene anche spazi singolari, a patto che le singolarità siano controllate. In dimensione uno, ciò porta alla definizione di grafo topologico.

Definizione 2.3.11 (Grafi topologici)**.** Un **grafo** è uno spazio topologico omeomorfo allo spazio ottenuto identificando tra loro alcuni vertici di un'unione disgiunta di segmenti. Più precisamente, sia $\{L_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici omeomorfi a $[0,1]$, detti **lati**. I punti corrispondenti a $\{0\}$ e $\{1\}$ sono detti **vertici**. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza le cui classi d'equivalenza, qualora contengano almeno due punti, siano costituite solo da vertici. Il quoziente di $\sqcup L_i$ per tale relazione è un **grafo**. Un grafo si dice **simpliciale** se ogni lato ha vertici distinti e se per ogni coppia di vertici passa al più un lato. Un grafo si dice **planare** se è omeomorfo a un sottoinsieme del piano Euclideo. La **valenza** di un vertice è il numero di lati che contengono tale vertice (un lato conta doppio se ha entrambi gli estremi sul vertice). Un grafo si dice **finito** se ha un numero finito di lati, si dice **localmente finito** se ogni vertice ha valenza finita.

Esercizio 2.3.12. Sia $G = \sqcup L_i/\sim$ un grafo e sia $[v]$ un suo vertice. Dimostrare che la valenza di v è il numero di elementi di $[v]$ (come sottoinsieme di $\sqcup L_i$).

Esempio 2.3.13. S^1 è un grafo finito planare. Lo si può infatti vedere come due segmenti incollati lungo i vertici.

Esempio 2.3.14. Se $\{L_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di spazi omeomorfi a $[0,1]$, identificando tra loro tutti i vertici "0" si ottiene un grafo a stella. Tale grafo è finito, e localmente finito se e solo se I è finito.

Esempio 2.3.15. Sia X lo spazio topologico omeomorfo a una lettera "ics". Esso è un grafo finito planare.

Esempio 2.3.16. $\mathbb{R}$ è un grafo planare infinito ma localmente finito: Esso è il quoziente dei segmenti $[n, n+1]$ ove il punto $n \in [n, n+1]$ è identificato col punto $n \in [n-1, n]$. Ogni vertice ha valenza 2.

Esempio 2.3.17. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$ (un foglio a quadretti infinito). Esso è un grafo planare infinito ma localmente finito, i cui vertici han tutti valenza 4.

Teorema 2.3.18. *Sia (X, τ) un grafo. Allora esiste una metrica d su X tale che $\tau_d \subseteq \tau$. In particolare X è T_2. Se inoltre X è localmente finito allora $\tau_d = \tau$ (ergo τ è indotta da una metrica).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{L_i\}_{i \in I}$ l'insieme dei lati e sia $\sim$ la relazione d'equivalenza che definisce $X = \sqcup L_i / \sim$. Su ogni L_i mettiamo la metrica Euclidea. Per ogni $x, y \in X$ definiamo $d(x, y)$ come la lunghezza del più piccolo cammino da x a y in X, se ve n'è almeno uno; $d(x, y) = \infty$ altrimenti. È immediato verificare che la funzione d è positiva, simmetrica, distingue i punti e soddisfa la disuguaglianza triangolare. Le palle metriche sono aperte nella topologia quoziente che definisce X. Quindi τ_d è meno fine di τ. Se X è localmente finito, ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni fatto di palle metriche e quindi $\tau_d = \tau$. □

In generale quindi la situazione è questa: i grafi per definizione son dotati della topologia quoziente, che coincide con quella metrica per grafi localmente finiti. Per grafi non localmente finiti la topologia quoziente e quella metrica son diverse e si deve fare attenzione a quale usare.

Si noti che l'Esempio 2.2.11 fornisce l'esempio di un grafo non metrizzabile (non è localmente numerabile). L'unico vertice di tale spazio è lo stereotipo di un vertice di valenza infinita.

Teorema 2.3.19. *Sia X un grafo simpliciale finito. Allora X è omeomorfo a un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ (Euclideo) i cui lati siano segmenti Euclidei.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome X è finito, ha un numero finito di vertici $v_1, \dots, v_n$, che identifichiamo con gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Se L è un lato tra v_i e v_j esso è identificato al segmento che congiunge e_i, e_i. Siccome X è simpliciale ciò definisce un omeomorfismo di X con un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ come richiesto. □

Esercizio 2.3.20. Dimostrare che in un grafo ogni punto ha un intorno omeomorfo al cono su un insieme discreto.

2.4. Esercizi

Esercizio 2.4.1. Sia τ la topologia discreta su $\mathbb{R}$ e σ quella banale. Chi sono gli aperti di $\tau \times \sigma$?

Esercizio 2.4.2. Sia τ la topologia dell'ordine lessicografico su $\mathbb{R}^2$. Su $\mathbb{R}$ siano σ la topologia discreta ed ε quella Euclidea. Si dimostri che $\tau = \sigma \times \varepsilon$.

Esercizio 2.4.3. Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici e sia $D((x, y), (x', y')) = \max(d(x, x'), \delta(y, y'))$ Verificare che D sia una metrica su $X \times Y$. Dimostrare che la topologia indotta da D su $X \times Y$ è il prodotto delle topologie τ_d su X e τ_δ su Y.

Esercizio 2.4.4. Si dimostri che $S^1 \times [0, 1]$ è omeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 2.4.5. Si dimostri che $[0, 1] \times D^2$ è omeomorfo a D^3.

Esercizio 2.4.6. Si dimostri che $[0, 1]^3$ è omeomorfo a D^3.

Esercizio 2.4.7. Si dimostri che $S^2 \times [0, 1]$ è omeomorfo a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Esercizio 2.4.8. Si dimostri che $S^2 \times D^2$ non è omeomorfo a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Esercizio 2.4.9. Si dimostri che $T^2 \times S^1$ è omeomorfo a T^3.

Esercizio 2.4.10. Si dimostri che $T^2 \times [0, 1]$ è una varietà topologica con bordo. Chi è il bordo?

Esercizio 2.4.11. Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. Siano U_1, U_2 intorni aperti di x tali che esistano aperti V_1, V_2 di $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ e omeomorfismi $f_i : U_i \to V_i, i = 1, 2$. Dimostrare che se $f_1(x)$ appartiene al piano $\{x_1 = 0\}$ allora anche $f_2(x)$ vi appartiene. (Suggerimento: usare il teorema dell'invarianza del dominio).

Esercizio 2.4.12. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Dimostrare che $X \times \mathbb{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.4.13. Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. Siano η_1 e η_2 due topologie su $X \times Y$ che rendono continue le proiezioni naturali π_X e π_Y. Si dimostri che $\eta_1 \cap \eta_2$ rende continue le proiezioni naturali. Se ne deduca che la Definizione 2.1.1 è ben posta.

Esercizio 2.4.14. Sia X uno spazio topologico e sia I un insieme. Dimostrare che la topologia prodotto su X^I è la topologia $\mathcal{K}$-aperta se $\mathcal{K}$ è la famiglia dei singoletti di I.

Esercizio 2.4.15. Generalizzare il Teorema 2.1.6 al caso di prodotti infiniti. Cioè dimostrare che il prodotto di una famiglia qualsiasi di spazi T_2 è T_2 e viceversa (se son tutti non vuoti).

Esercizio 2.4.16. Dimostrare che il prodotto di una quantità numerabile di spazi a base numerabile ha base numerabile.

Esercizio 2.4.17. Sia $X = \mathbb{R}$ la retta di Sorgenfrey (Esempio 1.2.14) e sia $Y = X \times X$ dotato della topologia prodotto (Y si chiama anche *piano di Sorgenfrey*). Dimostrare che Y è T_2 e separabile. Sia $Z = \{(x, y) \in Y : y = -x\}$. Dimostrare che Z, dotato della topologia indotta da Y, non è separabile. Che spazio è Z?

Esercizio 2.4.18. Dimostrare che il prodotto di due spazi separabili è separabile. Ciò rimane vero per prodotti infiniti? (Quest'ultima domanda è tutt'altro che banale).

Esercizio 2.4.19. Sia (X_i, τ_i) una famiglia finita di spazi topologici e sia X il loro prodotto, dotato della topologia prodotto $\tau = \Pi_i \tau_i$. Dimostrare che se ogni τ_i è la topologia discreta su X_i allora τ è la topologia discreta su X. Ciò rimane vero per prodotti infiniti?

Esercizio 2.4.20. Siano X, Y spazi topologici non vuoti. Dimostrare che se $X \times Y$ ha la topologia cofinita allora almeno uno tra X e Y ha cardinalità finita.

Esercizio 2.4.21. Siano X, Y spazi topologici con almeno due punti ciascuno. Dimostrare che se $X \times Y$ ha la topologia cofinita allora entrambi X e Y hanno cardinalità finita.

Esercizio 2.4.22. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su un insieme X e siano $A, B \subseteq X$. Dimostrare che se $A \subseteq B$ allora $\mathrm{sat}(A) \subseteq \mathrm{sat}(B)$.

Esercizio 2.4.23. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su uno spazio topologico separabile X. Dimostrare che $X/\sim$ è separabile.

Esercizio 2.4.24. Dimostrare che nell'Esempio 2.2.11 la successione $x_n = [n + \frac{1}{n}]$ non converge a z.

Esercizio 2.4.25. Dimostrare che nell'Esempio 2.2.11 la proiezione $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/Z$ non è aperta.

Esercizio 2.4.26. Sia $X = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ e sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $(0, t) \sim (2\pi, -t)$ per ogni $t \in [-1, 1]$. Lo spazio quoziente è il nastro di Moebius. Chi è il saturato di $[0, 2\pi] \times \{1\}$? Chi è il saturato di $\{0\} \times [-1, 0]$? Se $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$, la funzione $f : S^1 \to X/\sim$ data da $f(z) = (arg(z), -1)$ è ben definita e continua? E $f(z) = (arg(z), 0)$?

Esercizio 2.4.27. Siano $X = \mathbb{R}^2$, $A = B(O, 1)$, $Y = X/A$ e sia $y_0 = [A]$. Si dimostri che il complementare di y_0 è chiuso. Si dimostri che y_0 non è chiuso e se ne calcoli la chiusura. Si dimostri che Y non è T_2.

Esercizio 2.4.28. Siano $X = \mathbb{R}^2$, $A = \overline{B(O, 1)}$, $Y = X/A$ e sia $y_0 = [A]$. Si dimostri che y_0 è chiuso. Si dimostri che y_0 non è aperto e se ne calcoli la parte interna. Si dimostri che Y è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.4.29. Si dimostri che $[0,1]/\{0,1\}$ è omeomorfo a S^1.

Esercizio 2.4.30. Sia $X = [0,1] \times [0,1]$ e sia $A = \{0\} \times [0,1]$ dimostrare che X/A è omeomorfo a un triangolo. Dimostrare che X/A è omeomorfo a X.

Esercizio 2.4.31. Sia $X = [0,1] \times [0,1]$ e sia $\sim$ la relazione generata da $(x,0) \sim (x,1)$. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo al cilindro $S^1 \times [0,1]$.

Esercizio 2.4.32. Sia $X = S^1 \times [0,1]$ un cilindro e sia $A = S^1 \times \{0\}$. Dimostrare che X/A è omeomorfo a $D^2 = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.4.33. Sia $X = D^2 \subset \mathbb{R}^2$ sia $A = S^1 = \partial D^2$. Dimostrare che X/A è omeomorfo a $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ ||x|| = 1\}$.

Esercizio 2.4.34. Dimostrare che per ogni n il cono su S^n è D^{n+1}.

Esercizio 2.4.35. Sia $X = \{a,b,c\}$ con la topologia discreta e sia Y il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ corrispondente al simbolo ipsilon (carattere maiuscolo, senza grazie). Dimostrare che il cono su X è omeomorfo a Y.

Esercizio 2.4.36. Siano A, B due grafi. Si dimostri che se $A \times B$ è una varietà topologica allora ogni vertice di A e B ha valenza esattamente due.

Esercizio 2.4.37. Si dica se il nastro di Moebius è una varietà topologica (con bordo, se si considera il nastro chiuso).

Esercizio 2.4.38. Si dica se $\mathbb{RP}^n$ è una varietà topologica.

Esercizio 2.4.39. Si dica se $\mathbb{CP}^n$ è una varietà topologica.

Esercizio 2.4.40. Si dimostri che due varietà topologiche omeomorfe hanno la stessa dimensione.

Esercizio 2.4.41. Si dimostri che se un grafo è localmente numerabile allora è localmente finito.

Esercizio 2.4.42. Sia $X = S^1$ con la topologia discreta. Si dica se il cono su X è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ con la topologia indotta dalla metrica dei raggi, o a un suo sottoinsieme.

Esercizio 2.4.43. In $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi, sia X la palla unitaria chiusa centrata nell'origine. Dimostrare che X, con la topologia indotta dalla metrica dei raggi, non è un grafo topologico.

Esercizio 2.4.44. Dimostrare che se X e Y sono omeomorfi, allora i loro coni lo sono.

Esercizio 2.4.45. Sia $X = S^1 \times [0,1]$ un cilindro e sia $\sim$ la relazione generata da $(x,0) \sim (x,1)$. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo a T^2.

Esercizio 2.4.46. Sia $X = S^1 \times [0,1]$ un cilindro e sia $\sim$ la relazione generata da $(x,0) \sim (-x,1)$. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo a T^2.

Esercizio 2.4.47. Sia C il cerchio di centro $(2,0)$ e raggio 1 nel piano YZ di $\mathbb{R}^3$: $C = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^2 : ||(y,z) - (2,0)|| = 1\}$ e sia T la superficie di rotazione di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ruotando C attorno all'asse Z. Dimostare che T è omeomorfo a T^2. Siano A il cerchio più interno di T e B quello più esterno:

$$A = \{(x,y,0) : \ x^2 + y^2 = 1\} \qquad B = \{(x,y,0) : \ x^2 + y^2 = 9\}$$

Dimostrare che $T/A, T/B, T/C$ sono tutti omeomorfi tra loro.

Esercizio 2.4.48. Sia X un n-pode regolare in $\mathbb{R}^2$. In coordinate polari $X = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq 1, \theta = \frac{2k\pi}{n}, k = 1, \dots, n\}$. Sia f la rotazione di angolo $\frac{2\pi}{n}$ e sia T_f il toro di sospensione di f. Consideriamo ora $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Sia $A = S^1 \times [0,1]$ e sia $\sim$ la relazione d'equivalenza su A generata da $(x,1) \sim (f(x),1)$. Dimostrare che $A/\sim$ è omeomorfo a T_f.

Esercizio 2.4.49. Sia $X = [0,1] \times [0,1]$ e consideriamo i seguenti quattro quozienti, dati dall'identificazione dei lati di bordo secondo le frecce disegnate.

Dimostrare che A è omeomorfo al toro T^2, B alla Bottiglia di Klein, C al piano proiettivo, D alla sfera S^2.

Esercizio 2.4.50. Dimostrare, usando solo gli strumenti sviluppati sinora, che la bottiglia di Klein è ottenuta incollando due nastri di Moebius lungo i bordi.

Esercizio 2.4.51. Sia $\sim$ la relazione su $\mathbb{R}^2$ generata da $x \sim 2x$. Si dica se $\mathbb{R}^2/\sim$ è localmente numerabile, a base numerabile, T_2.

Esercizio 2.4.52. In $\mathbb{R}^2$ sia X l'immagine di $(0,\infty)$ tramite $f(t) = e^{-1/t^2}(\cos(t+1/t), \sin(t+1/t))$. Si dica se X^c è una varietà topologica.

Esercizio 2.4.53. In $\mathbb{R}^2$ sia X l'immagine di $(0,\infty)$ tramite $f(t) = e^{-1/t^2}(\cos(t+1/t), \sin(t+1/t))$. Si dica se $\mathbb{R}^2/X$ è una varietà topologica.

Esercizio 2.4.54. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione di equivalenza generata da $(x,y) \sim (x',y')$ se $y/e^x = y'/e^{x'}$ (equivalentemente $(x,y) \sim (x', ye^{x'-x})$). Descrivere le classi di equivalenza.

Esercizio 2.4.55. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione di equivalenza generata da $(x,y) \sim (x',y')$ se $y/e^x = y'/e^{x'}$. Si dica se $\mathbb{R}^2/\sim$ è T_2.

Esercizio 2.4.56. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione di equivalenza generata da $(x,y) \sim (x',y')$ se $y/e^x = y'/e^{x'}$. Si dimostri che $\mathbb{R}^2/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.4.57. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $(x,y) \sim (x+1,y)$. Dimostrare che $\mathbb{R}^2/\sim$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

Esercizio 2.4.58. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione di equivalenza generata da $(x,y) \sim (x',y')$ se $y/e^x = y'/e^{x'}$ e da $(x,y) \sim (x+1,y)$. Si dimostri che $\mathbb{R}^2/\sim$ non è T_2.

Esercizio 2.4.59. Su $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $(x,y) \sim (x+1, 2y)$. Si dimostri che $\mathbb{R}^2/\sim$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

Esercizio 2.4.60. In $\mathbb{R}$ si consideri la relazione di equivalenza generata da $x \sim 2x$. Sia $X = (-\infty, 1) \cup \{0\} \cup (1,\infty)$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}$. Sia $\sim_X$ la relazione di equivalenza indotta da $\sim$ su X. Si dica se l'immagine di X in $\mathbb{R}/\sim$ è omeomorfa a $X/\sim_X$.

CAPITOLO 3

Compattezza

3.1. Ricoprimenti e compattezza

Definizione 3.1.1 (Ricoprimenti)**.** Sia X uno spazio topologico. Un **ricoprimento** di X è una famiglia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di X tali che

$$\cup_{i\in I} U_i = X.$$

Il ricoprimento si dice **aperto** se tutti gli U_i sono aperti. Si dice chiuso se tutti gli U_i lo sono.

Un **sottoricoprimento** di $\mathcal{U}$ è un ricoprimento della forma $\{U_i\}_{i\in J}$ con $J \subseteq I$. Un **raffinamento** di $\mathcal{U}$ è un ricoprimento $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tale che

$$\forall \alpha \in A \exists i \in I : V_\alpha \subseteq U_i.$$

Un ricoprimento si dice finito/numerabile se ha un numero finito/numerabile di elementi. Si dice **localmente finito** se per ogni $x \in X$ esiste un intorno V di x tale che il numero degli U_i che intersecano V è finito.

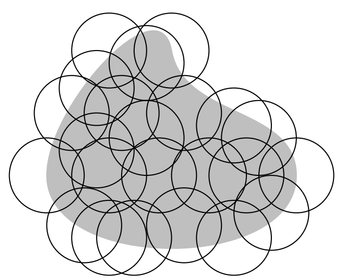


FIGURA 1. Un ricoprimento di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ tramite palle Euclidee

Esempio 3.1.2. Sia X uno spazio topologico. Allora $\{X\}$ è un ricoprimento (finito) di X.

Esempio 3.1.3. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Allora τ è un ricoprimento aperto di X. Ogni ricoprimento aperto di X è un sottoricoprimento di τ.

Esempio 3.1.4. Sia X uno spazio topologico T_2 con almeno due punti. Per ogni $x \in X$ sia $U_x = \{x\}^c$. Siccome in un T_2 i punti son chiusi, U_x è aperto. Siccome X ha almeno due punti la famiglia $\{U_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X.

Esempio 3.1.5. Sia X uno spazio metrico e sia $x \in X$. La famiglia $\mathcal{U} = \{B(x,r)\}_{0<r\in\mathbb{R}}$ delle palle centrate in x è un ricoprimento aperto di X. Anche la famiglia di tutte le palle unitarie $\mathcal{V} = \{B(p,1)\}_{p\in X}$ lo è. Inoltre, $\mathcal{V}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$.

Definizione 3.1.6. Uno spazio topologico X si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto di X ha un sottoricoprimento finito.

Esempio 3.1.7. $\mathbb{R}$ non è compatto poiché il ricoprimento $\{B(0,r)\}_{0<r\in\mathbb{R}}$ non ha sottoricoprimenti finiti.

Esempio 3.1.8. La topologia banale è sempre compatta.

Esempio 3.1.9. Ogni topologia finita è compatta. In particolare ogni spazio con un numero finito di elementi è compatto.

Esempio 3.1.10. Se X ha un'infinità di elementi, allora la topologia discreta su X non è compatta: basta prendere come ricoprimento aperto quello fatto dai singoletti $\{x\}$ al variare di $x \in X$.

Esempio 3.1.11. Unione finita di compatti è compatta, cioè se $K_1, \dots, K_n$ sono sottospazi compatti di uno spazio X, allora la loro unione è compatta. Infatti un ricoprimento $\mathcal{U}$ di $\cup K_i$ ricopre ogni singolo K_i; per compattezza esiste una famiglia finita $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}$ che ricopre K_i e l'unione $\cup\mathcal{U}_i$ è un sottoricoprimento finito di $\cup K_i$.

Esempio 3.1.12. La topologia cofinita è compatta.

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio dotato della topologia cofinita e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Sia $U \in \mathcal{U}$. Per definizione esso è il complementare di un numero finito di punti $x_1, \dots, x_n$. Siccome $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di X, per ogni i esiste $U_i \in \mathcal{U}$ tale che $x_i \in U_i$. Ne segue che $\{U, U_1, \dots, U_n\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. □

Teorema 3.1.13. *Lo spazio* $[0,1]$ *con la topologia Euclidea è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di $[0,1]$. Sia

$$A = \{x \in [0,1] \text{ tale che } [0,x] \text{ è contenuto nell'unione di un numero finito di } U_i\}$$

Dire che esiste un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ equivale a dire che $1 \in A$.

Per prima cosa, $0 \in A$ perché $\mathcal{U}$ è un ricoprimento, il ché implica anche che un intero intorno di zero sta in A. Sia $t = \inf A^c$ (ponendo $t = 1$ se A^c è vuoto). In particolare $t > 0$. Siccome $\mathcal{U}$ è un ricoprimento, esiste i tale che $t \in U_i$. Siccome U_i è aperto esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [0,1] \subseteq U_i$. Siccome $t > 0$, esiste $x \in (t-\varepsilon, t) \cap [0,1]$ e siccome $t = \inf A^c$ si ha $x \in A$. Per definizione esistono $i_1, \dots, i_k$ tali che

$$[0,x] \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

e quindi

$$[0,t] \subseteq [0,1] \cap [0, t+\varepsilon) \subseteq (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}) \cup U_i.$$

In particolare $t \in A$, e se $t \neq 1$ allora t non è l'estremo inferiore di A^c. □

Si noti che la compattezza (al contrario dell'essere chiuso/aperto) è un invariante topologico e dunque una proprietà intrinseca degli spazi topologici. Per esempio, il fatto che un sottoinsieme A di uno spazio topologico X sia compatto, non dipende da X ma solo dalla topologia indotta da X su A. In particolare, se $A \subset X \subset Y$ allora A è compatto come sottospazio di X, se e solo se lo è come sottospazio di Y (perché X e Y inducono su A la stessa topologia.)

Esempio 3.1.14. $[0,1]$ e $\mathbb{R}$ Euclidei non sono omeomorfi perché uno è compatto e l'altro no.

Teorema 3.1.15. *Sia* X *uno spazio topologico e sia* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ *un ricoprimento aperto. Se esiste un raffinamento* $\mathcal{V}$ *di* $\mathcal{U}$ *che ammette un sottoricoprimento finito, allora anche* $\mathcal{U}$ *ammette un sottoricoprimento finito.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X = V_1 \cup \dots \cup V_k$ con $V_i \in \mathcal{V}$, siccome per ogni V_i esiste $\alpha(i)$ tale che $V_i \subseteq U_{\alpha(i)}$ allora

$$X = V_1 \cup \dots \cup V_k \subseteq U_{\alpha(1)} \cup \dots \cup U_{\alpha(k)}.$$

□

Lemma 3.1.16. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ una base di τ. Ogni ricoprimento aperto di X ha un raffinamento fatto di elementi di $\mathcal{B}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X. Per definizione di base, per ogni i esistono elementi $B_i^j \in \mathcal{B}$ tale che $U_i = \cup_j B_i^j$. Ne segue che la famiglia di tutti i B_i^j, al variare di i, j è un ricoprimento di X che raffina $\mathcal{U}$. □

Corollario 3.1.17. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ una base di τ. Allora X è compatto se e solo se ogni ricoprimento di X fatto di elementi di $\mathcal{B}$ ha un sottoricoprimento finito.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione se X è compatto ogni ricoprimento aperto, e in particolare quelli fatti di elementi di $\mathcal{B}$, ha un sottoricoprimento finito. Viceversa, sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto. Per il Lemma 3.1.16 $\mathcal{U}$ ha un raffinamento fatto di elementi di $\mathcal{B}$, che per ipotesi ha un sottoricoprimento finito. Per il Teorema 3.1.15 X è compatto. □

Teorema 3.1.18. *La topologia di Zariski su $X = \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$, o $\mathbb{K}^n$) è compatta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X. Per il Corollario 3.1.17 possiamo supporre che ogni U_i appartenga alla base standard, ossia sia della forma $U_i = \{p_i \neq 0\} = A(p_i) = Z(p_i)^c$, per un polinomio p_i. Passando ai complementari si ottiene facilmente

$$\bigcup_i U_i = X \leftrightarrow \bigcap_i Z(p_i) = \emptyset.$$

Per il teorema della base di Hilbert esiste un numero finito di polinomi $p_1, \dots, p_n$ tali che l'ideale I generato da tutti i polinomi p_i è generato dai soli $p_1, \dots, p_n$. Ne segue che per ogni $p \in I$ si ha $p = \sum_{i=1}^n q_i p_i$ e quindi $p(x) = 0$ per ogni $x \in Z(p_1) \cap \dots \cap Z(p_n)$. In altre parole $Z(p) \supseteq Z(p_1) \cap \dots \cap Z(p_n)$. Quindi $Z(p) \cap Z(p_1) \cap \dots \cap Z(p_n) = Z(p_1) \cap \dots \cap Z(p_n)$. In particolare

$$\emptyset = \bigcap_i Z(p_i) = Z(p_1) \cap \dots \cap Z(p_n);$$

ma ciò equivale a dire che $U_1, \dots, U_n$ coprono X. □

Teorema 3.1.19. *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio compatto e $A \subseteq X$ chiuso. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di A. Per ogni i esiste V_i aperto in X tale che $U_i = V_i \cap A$. Dunque $\mathcal{V} = \{V_i\}$ è una famiglia di aperti di X e, siccome A è chiuso, allora $\mathcal{V} \cup \{A^c\}$ è un ricoprimento aperto di X. Esso ammette per compattezza un sottoricoprimento finito $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_n}, A^c\}$. Siccome $A \cap A^c = \emptyset$, abbiamo che $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ ricopre A e quindi $\mathcal{U}$ ha un sottoricoprimento finito. □

Per il viceversa serve un'ipotesi in più.

Teorema 3.1.20 (Compatto in T_2 è chiuso)**.** *Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $A \subseteq X$ compatto. Allora A è chiuso in X. Inoltre, per ogni $x \notin A$ esistono aperti disgiunti V, U tali che $x \in V$ e $A \subseteq U$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la seconda affermazione, che implica anche la prima perché ci dice in particolare che il complementare di A è aperto.

Sia $x \in A^c$. Siccome X è T_2, per ogni $a \in A$ esistono aperti U_a, V_a disgiunti con $a \in U_a$ e $x \in V_a$. La famiglia $\{U_a\}_{a \in A}$ ricopre A. Per compattezza, esiste $k \in \mathbb{N}$ e $a_1, \dots, a_k \in A$ tali che $U_{a_1}, \dots, U_{a_k}$ ricoprono A. L'insieme $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_k}$ è aperto e contiene x. Inoltre V è disgiunto da $U_{a_1}, \dots, U_{a_k}$ e quindi dalla loro unione. Ponendo $U = \cup U_{a_i}$ si ha la tesi. □

Esempio 3.1.21. Sia (X,τ) uno spazio topologico compatto e sia $Y = X \cup \{\infty\}$. Sia σ la topologia generata da τ su Y. Si ha $\sigma = \tau \cup \{Y\}$ (perché?). Dunque $\{\infty\}$ non è aperto in Y. Quindi $X \subset Y$ è un sottospazio compatto di Y che però non è chiuso. Ciò non contraddice quanto detto sin ora in quanto Y non è di Hausdorff.

Teorema 3.1.22 (In un T_2 i compatti si separano con aperti)**.** *Sia X uno spazio T_2 e siano $A, B \subseteq X$ compatti disgiunti. Allora esistono aperti disgiunti U, V tali che $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 3.1.20, per ogni $x \in B$ esistono aperti U_x, V_x disgiunti tali che $x \in V_x$ e $A \subseteq U_x$. La famiglia $\{V_x : x \in B\}$ è un ricoprimento aperto di B. Per compattezza esistono $x_1, \dots, x_k$ tali che $B \subseteq V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k}$. L'aperto $U = U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k}$ contiene A ed è disgiunto da V. □

Esempio 3.1.23. Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $N = \{1/n, n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. N è una successione che si accumula a zero. Sia τ la topologia Euclidea di $\mathbb{R}$ e σ la famiglia degli aperti di N^c, rispetto alla topologia Euclidea, ovvero $\sigma = \{A \setminus N, A \in \tau\}$. La famiglia di insiemi $\tau \cup \sigma$ è chiusa per intersezione e dunque è base di una topologia η su X. Essa è più fine della Euclidea per come è definita, in particolare è T_2. L'insieme N è chiuso perché il suo complementare è aperto per definizione. Ma non esistono due aperti disgiunti contenenti l'uno 0 e l'altro N. Si noti che N non è un sottoinsieme compatto di (X, η).

Teorema 3.1.24 (Immagine continua di compatti è compatta)**.** *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra spazi topologici. Se X è compatto allora $f(X)$ è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Allora $V_i = f^{-1}(U_i)$ fornisce un ricoprimento aperto di X che, siccome X è compatto, ammette un sottoricoprimento finito $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$. Ne segue che $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ è un sottoricoprimento finito di $f(X)$. □

Teorema 3.1.25 (Immagine continua e chiusa di un compatto T_2 è T_2)**.** *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e chiusa tra spazi topologici. Se X è compatto e T_2, allora $f(X)$ è T_2.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome X è T_2, i punti di X son chiusi (Teorema 1.6.12). Siccome f è chiusa, i punti di $f(X)$ son chiusi. Siano $y_1 \neq y_2 \in f(X)$. Siccome f è continua, $f^{-1}(y_1)$ è chiuso, ergo compatto perché X è compatto (Teorema 3.1.19). Stessa cosa per $f^{-1}(y_2)$. Esistono quindi aperti disgiunti U_1, U_2 l'uno contenente $f^{-1}(y_1)$ e l'altro $f^{-1}(y_2)$ (Teorema 3.1.22). Per definizione, U_1^c è chiuso e siccome f è chiusa, la sua immagine $f(U_1^c)$ è chiusa. Quindi $f(U_1^c)^c$ è aperto. Siccome $f^{-1}(y_1) \in U_1$ allora $y_1 \notin f(U_1^c)$. Quindi $y_1 \in f(U_1^c)^c$. Stessa cosa per y_2. Definiamo $V_1 = f(U_1^c)^c \cap f(X)$ e $V_2 = f(U_2^c)^c \cap f(X)$. Essi sono aperti di $f(X)$ l'uno contenente y_1 e l'altro y_2. Vediamo che son disgiunti. Se $x \in V_1$ allora $x \in f(X) \setminus f(U_1^c)$, in particolare $\emptyset \neq f^{-1}(x) \subseteq U_1$. Similmente se $x \in V_2$ allora $f^{-1}(x) \subseteq U_2$. Siccome $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ non può esistere $x \in V_1 \cap V_2$. □

Corollario 3.1.26. *I quozienti di spazi compatti sono sempre compatti. Se inoltre la proiezione naturale è chiusa e lo spazio di partenza è T_2, allora il quoziente è T_2.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione d'equivalenza su X. La proiezione naturale $\pi : X \to X/\sim$ è continua e $\pi(X) = X/\sim$. Per il Teorema 3.1.24 $X/\sim$ è compatto. Se π è chiusa e X è T_2 allora per il Teorema 3.1.25 $X/\sim$ è T_2. □

Teorema 3.1.27. *Siano A, B spazi topologici non vuoti. Allora $A \times B$ è compatto se e solo se A e B lo sono.*

DIMOSTRAZIONE. Se $A \times B$ è compatto, siccome le proiezioni sono continue e immagine continua di un compatto è compatto (Teorema 3.1.24), allora sia A che B sono compatti. Vediamo il viceversa. Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di $A \times B$. Per il Corollario 3.1.17 possiamo supporre che gli U_i siano prodotti di aperti: $U_i = V_i \times W_i$.

Prima, concentriamo la nostra attenzione sulle fibre $\pi_A^{-1}(a)$. (Figura 2). Per ogni $a \in A$ l'insieme $\{a\} \times B$ è compatto perché omeomorfo a B, che è compatto per ipotesi. Consideriamo gli U_i che intersecano $\{a\} \times B$. Per compattezza, un numero finito $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ di questi, copre $\{a\} \times B$. Sia $V(a) = V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k}$. Chiaramente $V(a)$ è un aperto contenente A e

$$V(a) \times B \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

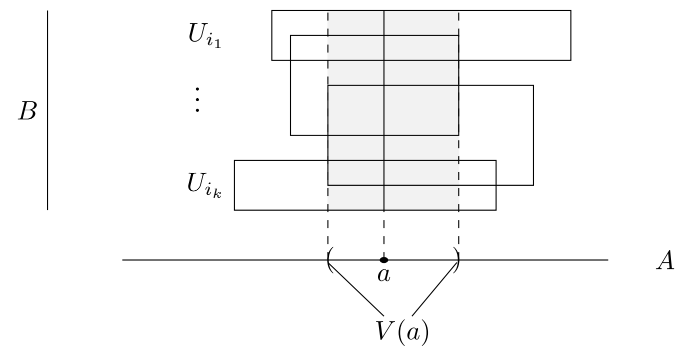


FIGURA 2. Prodotto di compatti è compatto. La parte grigia rappresenta $V(a) \times B$.

Adesso consideriamo il ricoprimento aperto di A formato dagli insiemi $V(a)$. Siccome A è compatto esistono $a_1, \dots, a_n$ tali che A è coperto da $V(a_1), \dots, V(a_n)$. Ne segue che $A \times B$ è coperto da $V(a_1) \times B, \dots, V(a_n) \times B$, che sono in numero finito. Siccome ogni $V(a) \times B$ è coperto da un numero finito degli U_i, possiamo dedurre che tutto $A \times B$ è coperto da un numero finito degli U_i. $\square$

Corollario 3.1.28. *I compatti di $\mathbb{R}^2$ Euclideo sono tutti e soli i chiusi e limitati. (Idem per ogni $\mathbb{R}^n$.)*

DIMOSTRAZIONE. Se A è un limitato di $\mathbb{R}^2$ allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $A \subseteq [-N, N] \times [-N, N]$, che è compatto per il Teorema 3.1.27. Se A è anche chiuso allora è un chiuso di un compatto, ergo compatto per il Teorema 3.1.19. Viceversa, se $K \subseteq \mathbb{R}^2$ è compatto, allora il ricoprimento $\mathcal{U} = \{(-k, k) \times (-k, k) : k \in \mathbb{N}\}$ ha un sottoricoprimento finito, quindi K è limitato. Per il Teorema 3.1.20 K è anche chiuso. (Per il caso di $\mathbb{R}^n$ basta rimpiazzare $[-N, N] \times [-N, N]$ con $[-N, N]^n$.) $\square$

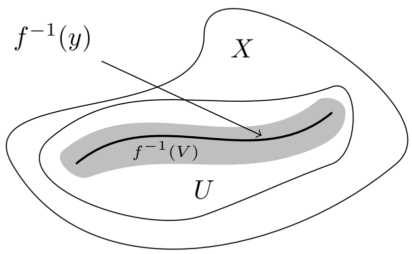
Corollario 3.1.29 (Weierstrass)**.** *Sia X uno spazio compatto non vuoto e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ha massimo e minimo su X.*

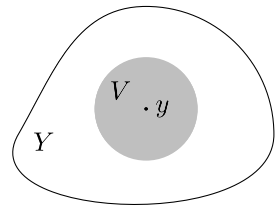
DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 3.1.24 $f(X)$ è un compatto di $\mathbb{R}$. Per il Corollario 3.1.28 i compatti di $\mathbb{R}$ son chiusi e limitati. Siccome $f(X)$ è non vuoto, ha massimo e minimo. $\square$

Per dimostrare il Teorema 3.1.27 in realtà non abbiamo tutte le ipotesi. In particolare, abbiamo usato la compattezza di A, il fatto che $\pi_A^{-1}(a)$ fosse compatto e che $\pi_A^{-1}(V(a))$ fosse contenuto in $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$. Possiamo quindi generalizzare il Teorema 3.1.27 come segue.

Teorema 3.1.30. *Siano X, Y spazi topologici. Se Y è compatto e $f : X \to Y$ è una qualsiasi funzione tale che per ogni $y \in Y$*

(1) *l'insieme $f^{-1}(y)$ è compatto;*
(2) *per ogni aperto U contenente $f^{-1}(y)$ esiste un aperto V contenete y tale che $f^{-1}(V) \subseteq U$.*





Allora X è compatto.

DIMOSTRAZIONE. Si procede esattamente come nella dimostrazione del Teorema 3.1.27, ove X fa le veci di $A \times B$, Y quelle di A ed f quelle della proiezione π_A. Dato un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di X, per compattezza ogni fibra $f^{-1}(y)$ è coperta da $U_{i_1}, \dots U_{i_k}$. Per ipotesi (2) esiste $V(y)$ aperto tale che $f^{-1}(V) \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$. Per compattezza, Y è coperto da un numero finito di $V(y)$. $\square$

Definizione 3.1.31. Una funzione $f : X \to Y$ tra spazi topologici si dice **propria** se per ogni compatto $K \subseteq Y$ si ha che $f^{-1}(K)$ è compatto.

Esistono funzioni che non sono proprie.

Esempio 3.1.32. Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proiezione canonica. Per ogni $\{x\} \subset \mathbb{R}$, che è compatto perché finito, la sua preimmagine $\pi^{-1}(x)$ non è compatta perché omeomorfa a $\mathbb{R}$.

Si annoti che alcuni autori (per esempio il Bourbaki) includono la condizione che f sia chiusa nella definizione di mappa propria.

Corollario 3.1.33. *Sia $f : A \to B$ una applicazione chiusa tra spazi topologici tale che le preimmagini di ogni punto siano compatte. Allora f è propria.*[1]

DIMOSTRAZIONE. Usiamo il Teorema 3.1.30. Se $y \in B$ e U è un aperto contenente $f^{-1}(y)$ allora U^c è chiuso e quindi $f(U^c)$ è un chiuso che non contiene y. Quindi $V = f(U^c)^c$ è un aperto contenente y. Siccome per ogni $C \subseteq A$ si ha $f^{-1}f(C) \supseteq C$ e siccome il passaggio al complementare ribalta le inclusioni, si ha
$$f^{-1}(V) = f^{-1}(f(U^c)^c) = (f^{-1}(f(U^c)))^c \subseteq (U^c)^c = U$$
e quindi il Teorema3.1.30 si applica (con $Y \subseteq B$ compatto e $X = f^{-1}(Y)$). $\square$

3.2. Il Teorema del Compatto-Hausdorff

Il prossimo teorema, la cui dimostrazione è una diretta conseguenza dei teoremi fatti sinora, è di immensa utilità quando si cerca di dimostrare che una certa funzione è un omeomorfismo: ci risparmia infatti la fatica di capire se l'inversa sia continua o no.

Teorema 3.2.1 (Teorema del Compatto-Hausdorff)**.** *Siano X, Y spazi topologici. Supponiamo che X sia compatto e Y di Hausdorff. Allora ogni funzione $f : X \to Y$ continua e biunivoca è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome X è compatto, se $A \subseteq X$ è chiuso, allora per il Teorema 3.1.19 è compatto. Per il Teorema 3.1.24, siccome f è continua si ha che $f(A)$ è compatto in Y. Siccome Y è T_2, $f(A)$ è chiuso per il Teorema 3.1.20. Ergo f è chiusa. Per il Teorema 1.7.43, f è un omeomorfismo. $\square$

Vediamo degli esempi classici di utilizzo del Teorema 3.2.1.

---

[1] La definizione del Bourbaki diventa quindi equivalente a "una funzione è propria se è chiusa e le preimmagini dei punti sono compatte".

Esempio 3.2.2. Sia $X = [0,1]$. Incolliamo 0 con 1 (usando la relazione d'equivalenza generata da $0 \sim 1$). Allora il quoziente $X/\sim$ è omeomorfo S^1.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : X \to S^1$ la funzione definita da $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Essa è continua rispetto alla metrica Euclidea, inoltre $f(0) = f(1)$. Per il Teorema 2.2.16 f induce una funzione continua $[f] : X/\sim \to S^1$, che è immediato verificare essere biunivoca. Siccome X è compatto, per il Corollario 3.1.26 anche $X/\sim$ lo è. Infine, S^1 è T_2 perché è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ (che è T_2) e il Teorema 3.2.1 si applica. □

Esempio 3.2.3. Riprendiamo gli spazi dell'esempio delle coordinate polari (2.2.18). Sia $X = [0,1] \times [0, 2\pi]$ con la relazione d'equivalenza generata da $(0, \theta) \sim (0, \theta')$ e $(\rho, 0) \sim (\rho, 2\pi)$. Allora $X/\sim$ è omeomorfo a $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio X è compatto perché è prodotto di compatti; D^2 è T_2 perché sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Come abbiamo visto nell'Esempio 2.2.18, esiste una funzione continua e biunivoca da $X/\sim$ a D^2. Per il Teorema 3.2.1 tale funzione è un omeomorfismo. □

Esempio 3.2.4. Collassando il bordo del disco D^2 a un punto si ottiene S^2.

DIMOSTRAZIONE. In coordinate polari sia f la parametrizzazione che manda l'origine nel polo Sud e ∂D^2 nel polo Nord. In formule, detto $\alpha = \pi\rho - \frac{\pi}{2}$, si ha $f(\rho, \theta) = (\cos\alpha\cos\theta, \cos\alpha\sin\theta, \sin\alpha)$. La funzione f è continua e costante su ∂D^2. Per il Teorema 2.2.16 essa induce una funzione continua da $D^2/(\partial D^2)$ a S^2 che è immediato verificare essere biunivoca. Siccome D^2 è compatto (per il Corollario 3.1.28) e S^2 è T_2, il Teorema 3.2.1 conclude. □

Esempio 3.2.5. Identificando il lati opposti di un quadrato mantenendo l'orientazione si ottiene il toro T^2.

DIMOSTRAZIONE. Sia $Q = [0,1] \times [0,1]$ un quadrato. Esso è compatto perché prodotto di compatti. Su Q identifichiamo i lati opposti tramite la relazione d'equivalenza generata da $(x, 0) \sim (x, 1)$ e $(0, y) \sim (1, y)$. Per S^1 usiamo le coordinate complesse $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$. Definiamo la funzione $f : Q \to T^2$ data da $f(x,y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. Essa è continua, costante sulle classi d'equivalenza e induce una biiezione $[f]$ tra $Q/\sim$ e $T^2 = S^1 \times S^1$. Per il Teorema 2.2.16 e il Teorema 3.2.1 $[f]$ è un omeomorfismo. □

Occhio che se uno si abitua a usare il Teorema del Compatto-Hausdorff alla leggera poi va a finire che lo usa anche quando le ipotesi non son verificate.

Esempio 3.2.6. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la topologia dell'Esercizio 1.8.85 ovvero, detta O l'origine, si pone $\tau = \{B(O, 2^{-n}), n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, X\}$. (X, τ) è compatto perché l'unico aperto che contiene punti di $\mathbb{R}^2$ di modulo più grande di 1 è il tutto. Quindi ogni ricoprimento aperto di X deve contenere come aperto il tutto, che tautologicamente ne costituisce un sottoricoprimento finito. La funzione $f : X \to X$ data da $f(x,y) = (2x, 2y)$ è continua e biunivoca. Ma non è un omeomorfismo! Ciò non contraddice il Teorema 3.2.1 in quanto X non è T_2.

3.3. Il Teorema di Tychonoff

Il fatto che prodotto di compatti sia compatto, non vale solo per prodotti finiti, ma più in generale per prodotti infiniti. La dimostrazione richiede l'assioma della scelta; più precisamente useremo il Lemma di Zorn. (D'altronde, senza assioma di scelta i prodotti infiniti potrebbero essere vuoti!) Cominciamo con una riformulazione equivalente della compattezza.

Definizione 3.3.1. Sia X un insieme. Una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gode della **proprietà delle intersezioni finite** se ogni intersezione di un numero finito di elementi di $\mathcal{F}$ è non vuota.

Consideriamo un insieme X e una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X. Allora $\cap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset$ se e solo se la famiglia $\mathcal{U} = \{A^c : A \in \mathcal{F}\}$ dei complementari di elementi di $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di X. Inoltre, la famiglia $\mathcal{F}$ gode della proprietà delle intersezioni finite se e solo se nessuna sottofamiglia finita di $\mathcal{U}$ è un ricoprimento. Armati di queste osservazioni possiamo agilmente dimostrare il seguente lemma.

Lemma 3.3.2. *Sia X uno spazio topologico. Allora X è compatto se e solo se per ogni famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ di chiusi che gode della proprietà delle intersezioni finite si ha $\cap A_i \neq \emptyset$.*

DIMOSTRAZIONE. X non è compatto se e solo se esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ senza sottoricoprimenti finiti. Passando ai complementari, ciò è equivalente a dire che esiste una famiglia di chiusi che gode della proprietà delle intersezioni finite, ma che ha intersezione vuota. □

Ora siamo pronti per dimostrare il Teorema di Tychonoff.

Teorema 3.3.3 (Tychonoff)**.** *Il prodotto di una famiglia qualsiasi di spazi compatti è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $K = \Pi_{i\in I} K_i$ un prodotto qualsiasi di spazi compatti e sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(K)$ una famiglia di chiusi che gode della proprietà delle intersezioni finiti. Dobbiamo dimostrare che $\cap_{A\in\mathcal{F}} A \neq \emptyset$.

Adesso usiamo il Lemma di Zorn. Sia $(\mathfrak{B}, \leq)$ l'insieme di tutte famiglie di sottoinsiemi di K che godono della proprietà delle intersezioni finite, ordinate per inclusione. Chiaramente ogni catena ha un massimale (l'unione di tutti gli elementi della catena). Ne segue che $\mathcal{F}$ è contenuta in un elemento massimale $\mathcal{M}$. Per massimalità, $\mathcal{M}$ è chiusa per intersezioni finite.

Detta $\pi_i : K \to K_i$ è la proiezione naturale, per ogni elemento $A \in \mathcal{M}$ poniamo $\overline{A_i} = \overline{\pi_i(A)}$. Per ogni i la famiglia $\{\overline{A_i}\} \subseteq \mathcal{P}(K_i)$ è una famiglia di chiusi con la proprietà delle intersezioni finite. Siccome K_i è compatto, $\cap_{A\in\mathcal{M}} \overline{A_i} \neq \emptyset$. Sia $x_i \in \cap_{A\in\mathcal{M}} \overline{A_i}$. Il punto $x = (x_i)_{i\in I}$ è un punto di K. Facciamo vedere che $x \in \cap_{A\in\mathcal{F}} A$, che risulterà quindi diverso dal vuoto.

Per il Teorema 2.1.11 x ha un sistema fondamentale di intorni in K del tipo $U = \Pi U_i$ con solo un numero finito di $U_i \neq K_i$. Fissiamo uno di questi intorni. Per ogni i e per ogni $A \in \mathcal{M}$, l'insieme U_i, essendo un intorno di $x_i \in \overline{\pi_i(A)}$, interseca $\pi_i(A)$. Ne segue che $\pi_i^{-1}(U_i)$ interseca ogni $A \in \mathcal{M}$.

Quindi, siccome $\mathcal{M}$ è chiusa per intersezioni finite, la famiglia $\mathcal{M} \cup \{\pi_i^{-1}(U_i)\}$ ha la proprietà delle intersezioni finite. Per massimalità, $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{M}$. Siccome $U_i \neq K_i$ solo per un numero finito di indici e siccome $\mathcal{M}$ è chiusa per intersezioni finite, $U \in \mathcal{M}$.

Abbiamo quindi dimostrato che x ha un sistema fondamentale di intorni che stanno in $\mathcal{M}$. Ma allora per ogni $A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ e ogni intorno U di x si ha $U \cap A \neq \emptyset$. Siccome gli elementi di $\mathcal{F}$ son chiusi, si ha $x \in A$. Siccome ciò vale per ogni $A \in \mathcal{F}$, abbiam finito. □

Corollario 3.3.4. *Sia X uno spazio compatto allora l'insieme $X^A = \{f : A \to X\}$ è compatto per la topologia della convergenza puntuale. In particolare $[0,1]^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to [0,1]\}$ è compatto per la topologia della convergenza puntuale.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 2.1.14, la topologia della convergenza puntuale è la topologia prodotto. Quest'ultima è compatta per il Teorema di Tychonoff perché $[0,1]$ è compatto (Teorema 3.1.13). □

3.4. Compattezza vs compattezza per successioni

Diciamo subito come va a finire: in generale le successioni non bastano a descrivere la compattezza e se uno vuole usarle deve andare a sporcarsi le mani con le successioni generalizzate (nell'Appendice B si mostra che la compattezza è equivalente alla compattezza per successioni generalizzate). Gli spazi a base numerabile — per esempio $\mathbb{R}^2$ — si salvano. (Anche tutti gli spazi metrici in generale, come vedremo nella Sezione 5.6 del Capitolo 5, hanno buona sorte.)

Definizione 3.4.1 (Compattezza per successioni)**.** Uno spazio topologico X si dice **compatto per successioni** se ogni successione in X ha una sottosuccessione convergente.

Esempio 3.4.2 (Compatto ma non per successioni). L'insieme $[0,1]^{[0,1]}$ è compatto per il Teorema di Tychonoff ma non è compatto per successioni.

DIMOSTRAZIONE. Vi è una corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ e funzioni da $\mathbb{N}$ in $\{0,1\}$: Ad ogni $X \subseteq \mathbb{N}$ è associata la sua funzione caratteristica e ad ogni $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ corrisponde il sottoinsieme $X = f^{-1}(1)$.

Per ogni $x \in [0,1]$ definiamo la successione $(e_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ data dalla sua rappresentazione binaria, cioè $x = \sum_n e_n(x)2^{-n}$, con $e_n(x) \in \{0,1\}$. Per ogni x fissato, la successione $e_n(x)$ può essere vista come funzione $e(x) : \mathbb{N} \to [0,1]$.

Per ogni n fissato, come funzione della variabile x, $e_n(x)$ definisce una funzione $e_n : [0,1] \to [0,1]$, cioè un elemento di $[0,1]^{[0,1]}$. In particolare $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $[0,1]^{[0,1]}$. Sia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una qualsiasi sottosuccessione di $\mathbb{N}$. Consideriamo adesso l'insieme $Y = \{n_{2k} : k \in \mathbb{N}\}$. Esso corrisponde al numero $y = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-n_{2k}}$ e la successione $e_{n_k}(y)$ vale 1 per k pari e 0 per k dispari. Quindi la sottosuccessione e_{n_k} non converge nel punto y. Ne segue che $(e_n) \subset [0,1]^{[0,1]}$ non ha nessuna sottosuccessione convergente[2]. $\square$

Esempio 3.4.3 (Compatto per successioni ma non compatto). Il primo ordinale non numerabile ω_1, dotato della topologia dell'ordine, è compatto per successioni ma non è compatto.

DIMOSTRAZIONE. La non compattezza di ω_1 dipende dalla sua illimitatezza: per ogni $x \in \omega_1$ sia $U_x = [0,x)$. Chiaramente $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x\in\omega_1}$ è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti. D'altronde, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in ω_1, essa è limitata perché ω_1 non ha cofinalità numerabile. Quindi il limsup di x_n è un suo punto di accumulazione ed esiste x_{n_k} che tende al $\limsup x_n$. $\square$

Esempio 3.4.4. Un esempio di spazio compatto per successioni ma non compatto, che non usi gli ordinali è lo spazio dei sottoinsiemi al più numerabili di $\mathbb{R}$, dotato della topologia prodotto indotta dall'identificazione $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$. (Si vedano gli esercizi guidati 3.6.57 e 3.6.58.)

Il busillis sta da un lato in questioni di cardinalità (come ben evidenzia il secondo esempio) dall'altro in una sottile differenza tra le frasi "(x_n) ha un punto di accumulazione" e "(x_n) ha una sottosuccessione convergente", differenza che dipende dal tipo d'ordine dei sistemi fondamentali di intorni dei punti: esistono spazi i cui punti non sono accessibili con successioni numerabili.

Definizione 3.4.5. Sia (x_n) una successione in uno spazio topologico X. Diciamo che:

- $x \in X$ è un punto di ricorrenza di (x_n) se per ogni intorno U di x, la successione x_n sta frequentemente in U (cioè se per ogni n esiste $m > n$ con $x_m \in U$).
- $x \in X$ è un punto limite di (x_n) se esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) che converge a x.[3]

I punti limite sono chiaramente di ricorrenza, mentre un punto di ricorrenza di una successione non è necessariamente un punto limite. Ciò però è vero negli spazi localmente numerabili.

Teorema 3.4.6 (Ricorrenza vs limiti)**.** *Sia (x_n) una successione in uno spazio topologico X e sia x un punto di ricorrenza di (x_n). Se x ha un sistema fondamentale di intorni numerabile, allora esso è un punto limite di (x_n). In particolare, negli spazi localmente numerabili, le nozioni di punto limite e di punto di ricorrenza coincidono.*

---

[2] La topologia prodotto è quella della convergenza puntuale.

[3] Alcuni autori usano la terminologia "punto di aderenza" per punto di ricorrenza e "punto di accumulazione" per punto limite. In inglese si usa spesso "cluster point" per punto di ricorrenza.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x. Definiamo $V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Chiaramente se $m > n$ allora $V_m \subseteq V_n$ e $\{V_n\}_{n\in N}$ è un sistema fondamentale di intorni inscatolati di x. Siccome x è di ricorrenza per (x_n), esiste n_1 tale che $x_{n_1} \in V_1$. Per induzione esistono numeri n_k tali che $n_{k+1} > n_k$, e tali che $x_{n_k} \in V_k$. Ne segue che $x_{n_k} \to x$. □

Teorema 3.4.7 (Compatto vs ricorrenza di successioni)**.** *Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto. Allora ogni successione in X ha un punto di ricorrenza.*

DIMOSTRAZIONE. Sia
$$A_n = \overline{\{x_m :\ m \geq n\}} \subseteq X.$$
Dire che esiste un punto di ricorrenza per (x_n) equivale a dire che $\cap_n A_n \neq \emptyset$ (segue per esempio dal Teorema 1.1.37). Siccome per $m > n$ si ha $\emptyset \neq A_m \subseteq A_n$, la famiglia $\{A_n\}$ è una famiglia di chiusi con la proprietà delle intersezioni finite. Per compattezza (Lemma 3.3.2) l'intersezione dei A_n è non vuota. □

Corollario 3.4.8. *Uno spazio topologico localmente numerabile compatto è compatto per successioni.*

DIMOSTRAZIONE. È un'immediata conseguenza dei Teoremi 3.4.7 e 3.4.6. □

Teorema 3.4.9. *Sia X uno spazio topologico a base numerabile (per esempio uno spazio metrico separabile). Allora X è compatto se e solo se è compatto per successioni.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo X a base numerabile, è anche localmente numerabile. Per il Corollario 3.4.8 se X è compatto allora è anche compatto per successioni. Vediamo il viceversa. Dimostriamo che se X non è compatto allora esiste una successione senza sottosuccessioni convergenti. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X che non ammette un sottoricoprimento finito. Per il Corollario 3.1.17, possiamo supporre che $\mathcal{U}$ sia formato da aperti di una base e siccome X è a base numerabile, ci si può sempre ricondurre al caso in cui $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ sia numerabile.

Per ogni n sia $V_n = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Siccome $\mathcal{U}$ non ha sottoricoprimenti finiti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \notin V_n$. Mostriamo ora che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni convergenti.

Sia $x \in X$. Siccome $\mathcal{U}$ è un ricoprimento, esiste m tale che $x \in V_m$. Per ogni $n > m$ si ha $V_n \supseteq V_m$ e quindi $x_n \notin V_m$. Ne segue che nessuna sottosuccessione di (x_n) può convergere a x. □

3.5. Locale compattezza e compattificazioni

Definizione 3.5.1. Uno spazio topologico si dice **localmente compatto** se ogni suo punto ha un intorno compatto.

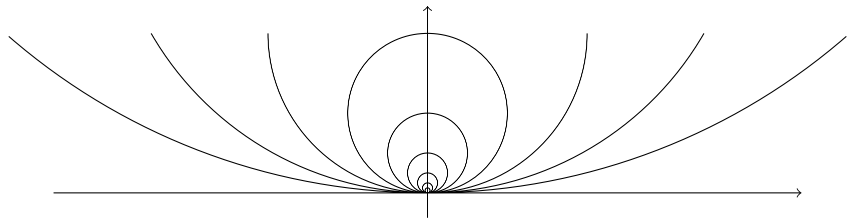
Esempio 3.5.2. Ogni spazio compatto è localmente compatto: esso è infatti un intorno compatto di ogni suo punto.

Esempio 3.5.3. $\mathbb{R}^2$ Euclideo è localmente compatto: per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'insieme $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \times [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$ è un intorno compatto (perché prodotto di compatti) di (x, y).

Teorema 3.5.4. *Un chiuso Y di un localmente compatto X è localmente compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $y \in Y \subseteq X$. Esso ha un intorno V compatto in X. Siccome Y è chiuso, $Y \cap V$ è chiuso in V, ergo compatto per il Teorema 3.1.19, ed è un intorno di y in Y. □

Vediamo adesso un po' di esempi, tutti varianti del cosiddetto *orecchino hawaiano*. In $\mathbb{R}^2$ sia
$$C_n = \partial B((0, 2^n), 2^n) = \{p \in \mathbb{R}^2 : ||p - (0, 2^n)|| = 2^n\}.$$
Ogni C_n è un cerchio nel semipiano superiore, centrato sull'asse delle Y e che è tangente all'asse X nell'origine. Se $n > 0$ il cerchio è grande, se $n < 0$ il cerchio è piccolo.



Esempio 3.5.5 (Modello numero 1: orecchino hawaiano). $M_1 = \cup_{n<0} C_n$. M_1 è chiuso perché il complementare

$$M_1^c = (\overline{B((0,1/2),1/2)})^c \cup_n \left(B((0,1/2^n),1/2^n) \setminus \overline{B((0,1/2^{n+1}),1/2^{n+1})}\right)$$

è unione di aperti. Inoltre M_1 è contenuto in $[-100,100] \times [-100,100]$ — che è compatto — ergo per il Teorema 3.1.19 è compatto. Quindi è anche localmente compatto.

Esempio 3.5.6 (Modello numero 2). $M_2 = \cup_{n \in \mathbb{Z}} C_n$. Per ogni intorno U dell'origine si trova una successione $x_n \in C_n \cap U$ tale che x_n converga a un punto x dell'asse X che non sia l'origine. In particolare $x \notin M_2$ e x_n non ha sottosuccessioni convergenti in M_2. Per il Teorema 3.4.9, $U \cap M_2$ non è compatto. Quindi l'origine non ha nessun intorno compatto e M_2 non è localmente compatto. In particolare M_2 non è omeomorfo a M_1.

Esempio 3.5.7 (Modello numero 3). $M_3 = M_2 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, cioè M_2 più l'asse X. Questo è un chiuso di $\mathbb{R}^2$ e quindi è localmente compatto per il Teorema 3.5.4. Non è compatto perché il ricoprimento indotto dalle palle di raggio n centrate nell'origine non ha sottoricoprimenti finiti. In particolare non è omeomorfo né a M_1 né a M_2.

Esempio 3.5.8 (Modello numero 4: Giuditta!). Sia $X = M_2 \cup \{\infty\}$ con la seguente topologia: A è aperto se e solo se $A \subseteq M_2$ e A è aperto in M_2, oppure se $A = X$. X è compatto. Infatti se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ è un ricoprimento aperto di X esiste un aperto U_i che contiene il nuovo punto ∞, quindi $U_i = X$ in quanto X è l'unico aperto che contiene ∞. Quindi U_i è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$.

Ne segue che X è anche localmente compatto. Notiamo però, che la patologia vicino a zero è ancora presente: Se $U \neq X$ è un intorno dell'origine, non esistono intorni compatti contenuti in U.

Questo strano comportamento non succede se lo spazio è T_2:

Teorema 3.5.9. *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Allora ogni $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni compatti.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo dimostrare che per ogni intorno A che contiene x, esiste un intorno compatto di x che sia contenuto in A. La strategia è riassunta in Figura 3. Sappiamo che x ha un

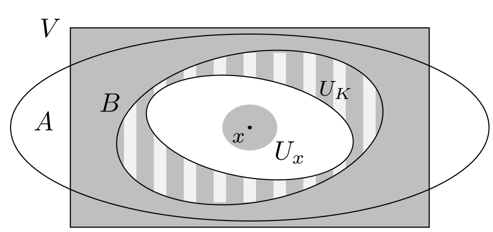


FIGURA 3. Come trovare un compatto $x \in \overline{U_x} \subseteq A$ (U_K è l'unione della parte tratteggiata e della parte grigia $K = V \setminus B$)

intorno compatto, che chiamiamo V. V è un compatto T_2 perché X è T_2. Siccome $A \cap V$ è un intorno di x, esiste un aperto B tale che $x \in B \subseteq A \cap V$. L'insieme $K = V \setminus B = V \cap B^c$ è chiuso in V, ergo compatto per il Teorema 3.1.19. Siccome $x \notin K$, per il Teorema 3.1.22 esistono aperti $U_x \subseteq V$ e U_K disgiunti tali che $x \in U_x$ e $K \subseteq U_K$. In particolare U_x è un intorno di x in X. Sia U la chiusura di U_x in X. Esso è un intorno di x. Siccome V è un compatto in un T_2, V è anche chiuso per il Teorema 3.1.20 e siccome $U_x \subseteq V$, si ha $U = \overline{U_x} \subseteq \overline{V} = V$. Quindi

$$U \subseteq V$$

e in quanto chiuso in un compatto, è compatto. Resta da dimostrare che U è contenuto in A. Siccome $K \subseteq U_K$ si ha $K^c \supseteq U_K^c$. Siccome U_K^c è chiuso e $U_x \subseteq U_K^c$ si ha

$$U = \overline{U_x} \subseteq U_K^c \subseteq K^c = (V \cap B^c)^c = V^c \cup B$$

ma siccome $U \subseteq V$ allora $U \subseteq B$. La tesi segue dal fatto che $B \subseteq A \cap V \subseteq A$. □

Una prima conseguenza di questo fatto è la versione del Teorema della categoria di Baire per spazi topologici.

Teorema 3.5.10. *Sia X uno spazio topologico T_2 e localmente compatto. Sia $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di chiusi, ognuno dei quali con parte interna vuota. Allora l'unione $\cup_i A_i$ ha parte interna vuota. In particolare X non è unione numerabile di chiusi a parte interna vuota.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome A_n ha parte interna vuota, per ogni aperto non vuoto B di X si ha che $B \cap A_n^c \neq \emptyset$. Sia B un aperto non vuoto e sia $U_1 \subseteq B$ un aperto non vuoto a chiusura compatta. Esso esiste per il Teorema 3.5.9. Per quanto appena detto, l'aperto $U_1 \setminus A_1$ è non vuoto. Esso contiene un aperto non vuoto U_2 con chiusura compatta e contenuta in $U_1 \setminus A_1$. L'insieme $U_2 \setminus A_2$ è aperto, non vuoto e contenuto in $U_1 \setminus A_1$. Ragionando ricorsivamente, si trova una famiglia di aperti a chiusura compatta tali che $\overline{U}_{k+1} \subseteq U_k \setminus A_k$, in particolare

$$\overline{U}_1 \supseteq \overline{U}_2 \supseteq \overline{U}_3 \dots$$

Gli insiemi $\overline{U}_i$ sono compatti in un T_2 ergo chiusi (Teorema 3.1.20). Siccome son tutti non vuoti, la famiglia $\{\overline{U}_i\}$ è una famiglia di chiusi con la proprietà delle intersezioni finite. Per compattezza di $\overline{U}_1$, esiste $x \in \cap_i \overline{U}_i$ (Lemma 3.3.2). Siccome $\overline{U}_{k+1} \subseteq A_k^c$, si ha $x \in A_i^c$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, in particolare $x \in (\cup_i A_i)^c$. Siccome $\overline{U}_1 \subseteq B$, si ha che $x \in B \cap (\cup_i A_i)^c$. Si è quindi dimostrato che ogni aperto non vuoto interseca $(\cup_i A_i)^c$, che quindi risulta essere denso, ergo il suo complementare $\cup_i A_i$ ha parte interna vuota. □

Definizione 3.5.11. Sia X uno spazio topologico. Uno spazio topologico Y è una **compattificazione** di X se è compatto e se esiste una immersione $X \to Y$ con immagine densa in Y.

In altre parole, uno spazio Y compatto è una compattificazione di X se X è omeomorfo a un sottospazio denso di Y.

Esempio 3.5.12. S^1 è una compattificazione di $\mathbb{R}$.

Esempio 3.5.13. $[0, 1]$ è una compattificazione di $\mathbb{R}$.

Esempio 3.5.14. S^2 è una compattificazione di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 3.5.15. D^2 è una compattificazione di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 3.5.16 (Compattificazione ad peram). È quella di Giuditta (3.5.8). Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $*$ un nuovo elemento che non era già in X. Su $P = X \cup \{*\}$ mettiamo la topologia generata da τ, cioè gli aperti sono quelli di τ più il tutto P. In altre parole l'unico intorno di $*$ è P. Questa topologia non è ovviamente T_2 e X è denso in P. Inoltre P è compatto perché se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ è un ricoprimento aperto di P, allora esiste U_i che contiene $*$ ma allora $U_i = P$ ed esso costituisce quindi un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$.

In realtà, ogni spazio topologico si può compattificare aggiungendo un solo punto in modo non *ad peram*. Vediamo come. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Se X è compatto la sua compattificazione $\widehat{X}$ è X stesso. Altrimenti, si aggiunge ad X un nuovo punto, che chiamiamo ∞, e si pone $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$. Si definisce una topologia $\widehat{\tau}$ su $\widehat{X}$ dichiarando $A \subseteq \widehat{X}$ aperto se e solo se

$$A \in \tau \qquad \text{oppure} \qquad A^c \subseteq X \text{ è un compatto chiuso in } X$$

In altre parole: gli intorni di infinito sono i complementari dei compatti chiusi di X. (Si noti che se X è T_2 allora la condizione di essere chiuso è automatica.)

Lemma 3.5.17. *Se (X, τ) è uno spazio topologico allora $\widehat{\tau}$ è una topologia su $\widehat{X}$, che induce τ su X.*

DIMOSTRAZIONE. Notiamo in primis che se $A \in \widehat{\tau}$ allora $A^c \cap X$ è sempre un chiuso di X; in particolare le intersezioni di elementi di $\widehat{\tau}$ con X sono aperti di τ, quindi $\widehat{\tau}$ induce τ su X. Vediamo che $\widehat{\tau}$ è una topologia.

$\emptyset, \widehat{X} \in \widehat{\tau}$ per come son definiti gli aperti di $\widehat{X}$. Dimostriamo che $\widehat{\tau}$ è chiusa per intersezione. Siano $A, B \in \widehat{\tau}$; se entrambi sono elementi di τ allora $A \cap B \in \tau \subseteq \widehat{\tau}$. Se $\infty \in A \cap B$, allora i complementari di A e B sono compatti chiusi e quindi anche $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ lo è. Infine se ∞ appartiene a solo uno dei due allora $A \cap B = A \cap B \cap X$ è comunque un aperto di τ, ergo di $\widehat{\tau}$.

Vediamo che $\widehat{\tau}$ è chiusa per unione qualsiasi. Sia $\{A_i\} \subseteq \widehat{\tau}$. Se tutti gli $A_i \in \tau$ ovviamente $\cup A_i \in \tau \subseteq \widehat{\tau}$. Se esiste A_k che contiene ∞ allora A_k^c è un compatto contenuto in X. Per cui $(\cup A_i)^c = \cap A_i^c = A_k^c \cap (\cap_{i \neq k} A_k^c)$ è intersezione di un compatto chiuso e di una famiglia di chiusi in X. Quindi è chiuso in X e, in quanto chiuso in un compatto, compatto (per il Teorema 3.1.19). Dunque il suo complementare $\cup_i A_i$ sta in $\widehat{\tau}$. □

Definizione 3.5.18. La **compattificazione di Alexandroff** di uno spazio topologico (X, τ) è lo spazio $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ appena descritto.[4]

Teorema 3.5.19. *Sia X uno spazio topologico. Allora $\widehat{X}$ è compatto e X è denso in $\widehat{X}$. Inoltre, $\widehat{X}$ è T_2 se e solo se e X è T_2 e localmente compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di $\widehat{X}$. Esiste $U \in \mathcal{U}$ che contiene ∞. Da cui segue che U^c è compatto. Chiaramente $\mathcal{U}$ ricopre U^c e quindi ammette un sottoricoprimento finito $\mathcal{V}$, come ricoprimenti di U^c. La famiglia $\mathcal{V} \cup \{U\}$ è un sottoricoprimento (di $\widehat{X}$) finito di $\mathcal{U}$.

Siccome un chiuso in un compatto è compatto, la chiusura di X è compatta. Se X non è compatto allora $\overline{X} \neq X$ e quindi l'unica possibilità è che $\overline{X}$ contenga anche ∞ e quindi coincida con $\widehat{X}$.

Supponiamo che $\widehat{X}$ sia T_2. Allora per ogni $x, y \in X$ esistono U_x, U_y aperti disgiunti in $\widehat{X}$ con $x \in U_x, y \in U_y$. Gli insiemi $U_x \cap X, U_y \cap X$ sono quindi aperti disgiunti in X che separano x, y. Quindi X è T_2. Per dimostrare la locale compattezza, si osservi che ogni x è separato da ∞ in $\widehat{X}$; in particolare esiste un aperto U_∞ che contiene ∞ e un intorno aperto U_x di x tale che $U_x \subseteq U_\infty^c$. Ne segue che U_∞^c — che per definizione è compatto — è un intorno compatto di x.

Viceversa se X è T_2 e localmente compatto, mostriamo che $\widehat{X}$ è T_2. Dati $x, y \in X$ essi sono separati da aperti in X e quindi anche in $\widehat{X}$. Supponiamo quindi $x \in X$ e $y = \infty$. Siccome X è localmente compatto, x ha un intorno compatto $K \subseteq X$. Siccome X è T_2 i compatti sono automaticamente chiusi. Ne segue che $\mathrm{Int}(K)$ e K^c sono aperti di $\widehat{X}$ che separano x da ∞. □

La compattificazione di Alexandroff è sostanzialmente unica.

Teorema 3.5.20. *Sia (X, τ) uno spazio topologico non compatto e sia $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ la sua compattificazione di Alexandroff. Sia ora σ un'altra topologia compatta su $\widehat{X}$ che coincida con τ su X. Se $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ è T_2 allora l'identità da $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ a $(\widehat{X}, \sigma)$ è continua. Se inoltre anche $(\widehat{X}, \sigma)$ è T_2 allora l'identità è un omeomorfismo.*

[4] La notazione $\widehat{X}$ non è standard. (Per esempio è diffusa anche la notazioneX^*.)

In altre parole, se X è T_2 e localmente compatto, allora la compattificazione di Alexandroff è l'unica compattificazione T_2 di X in cui il complementare di X è un sol punto (a meno di omeomorfismi).

In altre parole ancora, se X è T_2 e localmente compatto, allora $\widehat{\tau}$ è la topologia più fine su $\widehat{X}$ tra quelle compatte che contengono τ, e tra esse è l'unica T_2.

DIMOSTRAZIONE. L'identità da $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ in $(\widehat{X}, \sigma)$ è continua se e solo se σ è meno fine di $\widehat{\tau}$. Sia $A \in \sigma$. Se $A \subseteq X$ allora $A \in \tau \subseteq \widehat{\tau}$ e siamo a posto. Altrimenti A contiene ∞. Il complementare di A, che è contenuto in X, è quindi un chiuso di σ. Siccome $(\widehat{X}, \sigma)$ è compatto, A^c è compatto. Ma siccome X è T_2 allora A^c è anche chiuso in X, ergo $A \in \widehat{\tau}$.

Se anche $(\widehat{X}, \sigma)$ è T_2 allora per il Teorema 3.2.1 (del Compatto-Hausdorff) l'indentità è automaticamente un omeomorfismo. $\square$

Esempio 3.5.21. La compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2$ è S^2. Infatti è una compattificazione T_2 fatta aggiungendo un sol punto a $\mathbb{R}^2$.

Esempio 3.5.22. La compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{C}$ è $\mathbb{CP}^1$. Infatti è una compattificazione T_2 fatta aggiungendo un sol punto a $\mathbb{C}$.

Si noti che da ciò si deduce che, siccome $\mathbb{C}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, allora $\mathbb{CP}^1$ è omeomorfo a S^2.

Esempio 3.5.23. La compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^n$ è S^n.

Teorema 3.5.24. *Sia $\widehat{X}$ la compattificazione di Alexandroff di uno spazio topologico T_2 localmente compatto ma non compatto. Sia $Y \subseteq X$ chiuso. Allora $\widehat{Y}$ è la chiusura di Y in $\widehat{X}$ e se Y non è compatto, $\widehat{Y} = Y \cup \{\infty\}$.*

DIMOSTRAZIONE. $\overline{Y}$ è compatto e quindi è una compattificazione di Y. Siccome $\widehat{X}$ è T_2 anche $\overline{Y}$ lo è. Siccome Y è chiuso in X, se Y non è compatto allora è diverso da $\overline{Y}$ e quindi $\overline{Y} = Y \cup \{\infty\}$. Quindi $\overline{Y}$ è una compattificazione T_2 di Y in cui il complementare di Y è un punto. Ergo $\overline{Y} = \widehat{Y}$. $\square$

Esempio 3.5.25. Le compattificazioni di sottoinsiemi chiusi $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si possono fare in $S^2 = \mathbb{CP}^1$.

Un altro modo di fare le compattificazioni di Alexandroff di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ è attraverso il seguente teorema.

Lemma 3.5.26. *Sia X uno spazio localmente compatto e sia Y uno spazio T_2. Allora ogni immersione topologica $f : X \to Y$ con immagine densa è aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome f è un'immersione, X è omeomorfo a $f(X)$. Possiamo quindi limitarci al caso in cui X sia un sottospazio denso di Y e f sia l'inclusione naturale. Ogni aperto di X è l'intersezione con X di un aperto di Y. Ci basta quindi dimostrare che X è un aperto di Y.

Sia $x \in X$. Per locale compattezza, esistono un compatto $K \subseteq X$ e un aperto U di X tali che $x \in U \subseteq K$. Inoltre esiste un aperto V di Y tale che $U = V \cap X$. In particolare $V \cap X \subseteq K \subseteq X$. Quindi $U = V \cap X = V \cap X \cap K = V \cap K$ e da

$$(V \cap X) \sqcup (V \cap X^c) = V = (V \cap K) \sqcup (V \cap K^c) = U \sqcup (V \cap K^c) = (V \cap X) \sqcup (V \cap K^c)$$

si deduce che $V \cap K^c = V \cap X^c \subseteq X^c$.

Siccome K è compatto in un T_2 allora è chiuso, per cui $V \cap K^c$ è un aperto di Y contenuto in X^c. Siccome X è denso il complementare ha parte interna vuota, dunque $V \cap K^c = \emptyset$ e $V = V \cap X = U$ è aperto in Y. Ne segue che ogni $x \in X$ è interno a X. $\square$

Teorema 3.5.27. *Sia X uno spazio localmente compatto e sia Y una sua compattificazione T_2. Allora $\widehat{X} = Y/X^c$. In altre parole la compattificazione di Alexandroff di X si ottiene collassando a un punto X^c.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome X si immerge in Y possiamo supporre $X \subseteq Y = \overline{X}$. Per il Lemma 3.5.26 X è aperto in Y. In particolare $X^c = \partial X$ è un chiuso. Ne segue che la proiezione al quoziente $Y \to Y/X^c$ è chiusa (il saturato di un chiuso A è A oppure $A \cup \partial X$, quindi è chiuso). Siccome Y è compatto, per il Corollario 3.1.26, Y/X^c è un compatto T_2. Chiaramente esso contiene una copia di X, il cui complementare è un punto (la classe di X^c). Per il Teorema 3.5.20 $\widehat{X} = Y/X^c$. $\square$

Corollario 3.5.28. *Sia Y uno spazio T_2. Sia X un sottoinsieme localmente compatto di Y. Se $\overline{X}$ è compatto, allora la compattificazione di Alexandroff di X è $\overline{X}/(\overline{X} \setminus X)$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teorema 3.5.27 in quanto $\overline{X}$ è una compattificazione T_2 di X. $\square$

Esempio 3.5.29. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. X è una corona circolare aperta. Esso è localmente compatto perché per ogni $P \in X$, per ε sufficientemente piccolo $\overline{B(P, \varepsilon)} \subset X$ è un intorno compatto di P. Inoltre $\mathbb{R}^2$ è T_2. Quindi basta considerare la corona circolare chiusa $\overline{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $\widehat{X} = \overline{X}/\partial X$ è una sfera con due punti identificati.

3.6. Esercizi

Esercizio 3.6.1. Si dimostri che $\mathbb{RP}^n$ è compatto.

Esercizio 3.6.2. Dimostrare che $\mathbb{R}$ con la topologia di Zariski è compatto per successioni.

Esercizio 3.6.3. Si dimostri che $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi non è compatto.

Esercizio 3.6.4. Si dica se $\overline{B\big((0,0),1\big)}$ in $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi è compatto.

Esercizio 3.6.5. Si dica se $\overline{B\big((10,10),1\big)}$ in $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi è compatto.

Esercizio 3.6.6. Si dica se $[0,1]^2$ in $\mathbb{R}^2$ dotato della metrica dei raggi è compatto.

Esercizio 3.6.7. Si dica se $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi è localmente compatto.

Esercizio 3.6.8. Si dica se $\mathbb{R}^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico è compatto.

Esercizio 3.6.9. Si dica se $\mathbb{R}^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico è localmente compatto.

Esercizio 3.6.10. Si dica se $[0,1]^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico è compatto.

Esercizio 3.6.11. $[0,1]^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico è localmente compatto?

Esercizio 3.6.12. Si dica se la topologia del punto particolare (Esercizio 1.1.11) è compatta.

Esercizio 3.6.13. Sia X uno spazio topologico e sia $K \subseteq X$ un sottospazio compatto di X. Si dica se è sempre vero che la chiusura di K in X è compatta.

Esercizio 3.6.14. Sia X uno spazio compatto T_2 e sia $A \subseteq X$ chiuso. Dimostrare che X/A è T_2.

Esercizio 3.6.15. Siano K_1, K_2 compatti di uno spazio T_2. Dimostrare che $K_1 \cap K_2$ è compatto.

Esercizio 3.6.16. È sempre vero che intersezione di compatti è compatto?

Esercizio 3.6.17. Sia X uno spazio T_2 e sia $\{K_i, i \in I\}$ una famiglia di compatti di X. È vero che $\cap_i K_i$ è compatto?

Esercizio 3.6.18. Si dica se un aperto di uno spazio localmente compatto è sempre localmente compatto.

Esercizio 3.6.19. Si dica se un aperto di uno spazio T_2 e localmente compatto è sempre localmente compatto.

Esercizio 3.6.20. È vero che l'intersezione di due spazi localmente compatti è localmente compatta?

Esercizio 3.6.21. Dimostrare che il prodotto di due spazi localmente compatti è localmente compatto.

Esercizio 3.6.22. Sia $A = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ e sia $X = A \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. ($X$ è una successione di rette verticali che si accumulano sull'asse Y.) Si dimostri che X è localmente compatto.

Esercizio 3.6.23. Dimostrare che il quoziente di $\mathbb{R}^2$ per la relazione d'equivalenza generata da $v \sim 2v$ è compatto.

Esercizio 3.6.24. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $(x, y) \sim (2x, 2y)$ e $(x, y) \sim (x', y)$. Si dica se $\mathbb{R}^2/\sim$ è compatto. Detto $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ si dica se $P/\sim$ è compatto. Si dimostri che $\mathbb{R}^2/\sim$ non è una varietà topologica. Si dimostri che $P/\sim$ è una varietà topologica e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 3.6.25. Sia X un insieme e siano τ, σ due topologie T_2 e compatte su X. Dimostrare che se una è più fine dell'altra allora $\tau = \sigma$.

Esercizio 3.6.26. Si dia un esempio di un insieme X con due topologie τ e σ, entrambe T_2 e compatte ma tali che (X, τ) non sia omeomorfo a (X, σ).

Esercizio 3.6.27. Si dimostri che sugli insiemi finiti la discreta è l'unica topologia compatta e T_2. Sugli insiemi finiti vi sono topologie non compatte?

Esercizio 3.6.28. Siano τ, σ due topologie su uno stesso insieme X. Supponiamo che $\tau \subseteq \sigma$. Dimostrare che se X è compatto per σ allora è compatto anche per τ. Fornire un esempio per cui il viceversa non vale.

Esercizio 3.6.29. Sia $\mathbb{R}$ con la topologia generata dagli intervalli del tipo $[a, b)$. Si dica se $[0, 1]$ è compatto per tale topologia.

Esercizio 3.6.30. Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\{K_n\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ una famiglia di chiusi tali che $K_{n+1} \subseteq K_n$. È vero che $\cap_n K_n \neq \emptyset$? Lo si dimostri o si fornisca un controesempio.

Esercizio 3.6.31. Ripercorrere la dimostrazione del Lemma 3.3.2 con $X = \mathbb{R}$ e $A_n = [n, \infty)$ per vedere cosa va storto.

Esercizio 3.6.32. Provare a seguire passo passo la dimostrazione del Teorema 3.5.9 con Giuditta (Esempio 3.5.8) per vedere dove falla.

Esercizio 3.6.33. Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1\}$ e sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1, x+y < 1\}$ (Q è un quadrato pieno e X è Q meno un lato). Sia $\widehat{X}$ la compattificazione di Alexandroff di X. Si dimostri che $\overline{X} = Q$ è omeomorfo a $\widehat{X}$.

Esercizio 3.6.34. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo il seguente "orecchino hawaiano modificato" (si veda l'Esempio 3.5.5 per la definizione di M_1): $X = M_1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ (cioè M_1 più l'asse delle ascisse). Si dica se X è omeomorfo a M_1, M_2, M_3 o a nessuno di essi. Si dica se la sua compattificazione di Alexandroff è omeomorfa a M_1.

Esercizio 3.6.35. Si descrivano le compattificazioni degli orecchini hawaiani modello due e tre. Si dica se sono omeomorfe tra loro o no.

Esercizio 3.6.36. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{x^2 + y^2 < 1\}$. Se ne determini la compattificazione di Alexandroff.

Esercizio 3.6.37. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\}$. Si studi la compattificazione di Alexandroff di X.

Esercizio 3.6.38. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{x^2 + y^2 < 1\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$. Si studi la compattificazione di Alexandroff di X.

Esercizio 3.6.39. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{x^2 + y^2 < 1\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$. Si studi la compattificazione di Alexandroff di X.

Esercizio 3.6.40. Si dimostri che lo spazio $\mathbb{R}/Z$ dell'Esempio 2.2.11 non è localmente compatto. Se ne deduca che non è omeomorfo all'orecchino hawaiano.

Esercizio 3.6.41. Sia $C_n = \partial B((0, 2^n), 2^n)$ la famiglia di cerchi usata per costruire l'orecchino hawaiano. Sia $M_1 = \cup_{n<0} C_n$ e sia $X = \cup_{n>0} C_n$. Sia $f : M_1 \to X$ la funzione che manda C_n in C_{-n} tramite un'omotetia. Dimostrare che la restrizione di f a ogni C_n è continua ma f non è continua da M_1 a X. Di dimostri che l'inversa di f è continua da X a M_1.

Esercizio 3.6.42. In $\mathbb{R}^2$ sia X l'immagine di $(0, \infty)$ tramite $f(t) = e^{-1/t^2}(\cos(t + 1/t), \sin(t + 1/t))$. Si dimostri che la compattificazione di Alexandroff di X è omeomorfa a S^1. Se ne deduca che non è omeomorfa a $\overline{X}$.

Esercizio 3.6.43. Dimostrare che si può ottenere una sfera come quoziente di un toro.

Esercizio 3.6.44. Dimostrare che si può ottenere un toro come quoziente di una sfera.

Esercizio 3.6.45. Si dimostri che ogni sottoinsieme aperto dell'insieme di Cantor è localmente compatto.

Esercizio 3.6.46. È vero che ogni sottoinsieme dell'insieme di Cantor è localmente compatto?

Esercizio 3.6.47. Si dica se la proiezione canonica $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^2$ è propria.

Esercizio 3.6.48. Sia $X = GL(2, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici reali 2×2 invertibili, con la topologia data dall'identificazione dello spazio delle matrici 2×2 con $\mathbb{R}^4$. Si dimostri che la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ data da $f(M) = \det(M)$ è continua. Se ne deduca che X non è compatto.

Esercizio 3.6.49. Sia $X = O(2)$ lo spazio delle matrici reali 2×2 ortogonali. Si dimostri che X è compatto.

Esercizio 3.6.50. Sia X lo spazio delle isometrie di $\mathbb{R}^2$, con la topologia compatto-aperta (Esempio 1.2.20 ove $\mathcal{K}$ è la famiglia dei compatti). Si dimostri che X non è compatto.

Esercizio 3.6.51. Sia X lo spazio delle isometrie di $\mathbb{R}^2$, con la topologia compatto-aperta (Esempio 1.2.20 ove $\mathcal{K}$ è la famiglia dei compatti). Si dimostri che l'applicazione $\varphi : X \to \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(g) = g(0, 0)$ è continua e propria.

Esercizio 3.6.52. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ compatti. Dimostrare che l'insieme $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ è un compatto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.6.53. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ compatti. Dimostrare che l'insieme $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$ è un compatto di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3.6.54. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ compatti. Dimostrare che l'insieme $S = \{\sin(||a||)b : a \in A, b \in B\}$ è un compatto di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.6.55. Sia X uno spazio T_2 e sia $K \subseteq X$ un sottospazio localmente compatto. Dimostrare che K è aperto in $\overline{K}$.

Esercizio 3.6.56. Si fornisca un esempio di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ Euclideo tale che A non sia aperto in $\overline{A}$.

Esercizio 3.6.57. Sia $D = \{0, 1\}$ dotato della topologia discreta. Consideriamo $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ identificato con $D^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}\}$, dotato della topologia prodotto. Sia K la famiglia dei sottoinsiemi al più numerabili di $\mathbb{R}$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $U_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : a \notin A\}$. Dimostrare che U_a è aperto in $D^{\mathbb{R}}$. Dimostrare che $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ ricopre K. Dimostrare che $\mathcal{U}$ non ha sottoricoprimenti finiti e dedurne che K non è compatto.

Esercizio 3.6.58. Sia K come nell'Esercizio 3.6.57. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in K. Dimostrare che esiste X tale che $X_n \to X$. Dedurne che K è compatto per successioni. (Suggerimento: l'insieme $S = \cup_n X_n$ è al più numerabile. A questo punto, interpretando gli X_n come funzioni f_n che valgono zero fuori da S, e numerando S, si usi un argomento diagonale per trovare una sottosuccessione f_{n_k} tale che per ogni $x \in S$ si ha che $f_{n_k}(x)$ sia definitivamente costante.)

CAPITOLO 4

Connessione

4.1. Connessione

Definizione 4.1.1. Uno spazio topologico X si dice **connesso** se gli unici suoi sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono il vuoto e tutto X.

Vale la pena osservare che dal Teorema 1.1.37 segue che un insieme è contemporaneamente aperto e chiuso se e solo se la sua frontiera è vuota. La connessione si può esprimere in molti modi equivalenti:

- X è connesso se $\emptyset \neq A \subseteq X$ è aperto e chiuso allora $A = X$.
- X è connesso se per ogni $A \subseteq X$, $(\partial A = \emptyset) \Rightarrow (A = X) \vee (A = \emptyset)$.
- X è connesso se $X = A \sqcup B$ con A non vuoto e aperto implica B non aperto o vuoto.
- X è connesso se $X = A \sqcup B$ con A, B entrambi aperti implica A oppure B vuoto.
- X è connesso se $X = A \sqcup B$ con A, B entrambi aperti implica A vuoto oppure $A = X$.
- X non è connesso se esiste $\emptyset \neq A \subseteq X$ con $A^c \neq \emptyset$ e $\partial A = \emptyset$.
- X non è conneso se esiste $\emptyset \neq A \subseteq X$ aperto e chiuso con $A^c \neq \emptyset$.
- X non è connesso se esiste $A \subseteq X$ con A, A^c non vuoti ed entrambi aperti.
- X non è connesso se esiste $A \subseteq X$ con A, A^c non vuoti ed entrambi chiusi.
- X non è connesso se $X = A \sqcup B$ con A, B entrambi non vuoti e aperti.
- X non è connesso se $X = A \sqcup B$ con A, B entrambi non vuoti e chiusi.
- X non è connesso se esiste $\emptyset \neq A \subsetneq X$ con con $\partial A = \emptyset$.

Si noti che la connessione, come la compattezza, è una proprietà topologica intrinseca di uno spazio, cioè un invariante topologico: se X e Y sono omeomorfi e X è connesso allora anche Y lo è. In particolare se $A \subset X$ ma anche $A \subset Y$ il fatto che A sia connesso o meno dipende solo dalla topologia di A e non da quale sia lo spazio di cui è sottospazio.

Esempio 4.1.2. Un punto è sempre connesso: Gli unici suoi sottoinsiemi sono il vuoto e il tutto.

Esempio 4.1.3. In $\mathbb{R}$ Euclideo l'insieme $X = (0,1) \cup (3,4)$ è sconnesso. Infatti in X l'insieme $(0,1)$ è aperto in X e il suo complementare $(3,4)$ pure.

Esempio 4.1.4. In $\mathbb{R}$ Euclideo l'insieme $X = (0,1] \cup (3,4]$ è sconnesso. Infatti in X l'insieme $(0,1]$ è aperto in X e il suo complementare $(3,4]$ pure.

Esempio 4.1.5. Se X ha almeno due punti ed è dotato della topologia discreta allora non è connesso. Infatti in questo caso i punti sono aperti e chiusi.

Esempio 4.1.6. Sia $X = \{a, b\}$ con la topologia $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. (Si verifichi che questa è una topologia.) Allora X è connesso. Infatti gli unici sottoinsiemi di X diversi dal vuoto e X sono i punti $\{a\}, \{b\}$. $\{a\}$ è aperto ma il suo complementare no. Ne segue che nessuno dei due è aperto e chiuso.

Esempio 4.1.7. Se X è dotato della topologia banale allora è connesso. Infatti gli unici suoi sottoinsiemi aperti sono il vuoto e il tutto.

Esempio 4.1.8. $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita è connesso. Infatti non ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che siano contemporaneamente finiti e cofiniti.

Esempio 4.1.9. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ non è connesso. Infatti $\mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}) \sqcup (\sqrt{2}, +\infty)$ è unione di due aperti non vuoti e disgiunti.

Esempio 4.1.10. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ non è connesso. Infatti $\mathbb{Z} = (-\infty, 1/2) \sqcup (1/2, +\infty)$ è unione di due aperti non vuoti e disgiunti. Oppure perché la topologia indotta da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Z}$ è quella discreta, e $\mathbb{Z}$ ha almeno due punti.

Esempio 4.1.11. $\mathbb{R}$ con la topologia del limite destro (Esempio 1.2.14) non è connesso. Infatti $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$ è unione disgiunta di due aperti non vuoti.

Teorema 4.1.12. *$\mathbb{R}$ con la topologia Euclidea è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ aperto e chiuso e dimostriamo che in tal caso $A = \mathbb{R}$. Sia $a \in A$. Introduciamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}_+$

$$X = \{t \geq 0 : \ [a-t, a+t] \subseteq A\}.$$

Sia t_0 l'estremo inferiore del complementare di X in $\mathbb{R}_+$, ponendo $t_0 = \infty$ se $X = \mathbb{R}_+$. Si noti che $0 \in X$. Inoltre, siccome A è aperto, per ogni $x \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$. Ne segue che se $t \in X$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $t + \varepsilon \in X$. Ciò implica che

$$0 < t_0 \notin X.$$

Per ogni $s < t_0$ si ha $[a-s, a+s] \subset A$, in particolare $(a-t_0, a+t_0) \subseteq A$. Siccome A è chiuso, se $t_0 < \infty$ allora avremmo $[a-t_0, a+t_0] \subseteq A$ e quindi $t_0 \in X$ in contraddizione con quanto appena dimostrato. Quindi $t_0 = \infty$ e dunque $A = \mathbb{R}$. $\square$

Corollario 4.1.13. *Ogni intervallo aperto (a, b) è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. (a, b) è omeomorfo a $\mathbb{R}$. $\square$

Teorema 4.1.14 (Immagine di un connesso è connesso)**.** *Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici. Se X è connesso allora anche Y lo è.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\emptyset \neq A \subseteq Y$ aperto e chiuso. Si deve dimostrare che $Y = A$. L'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto e chiuso perché f è continua. Inoltre, esso è non vuoto perché f è suriettiva. Siccome X è connesso $f^{-1}(A) = X$ e siccome f è suriettiva $A = f(f^{-1}(A)) = f(X) = Y$. $\square$

Corollario 4.1.15. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici. Se $A \subseteq X$ è connesso allora $f(A)$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema 4.1.14 con $f|_A : A \to f(A)$. $\square$

Corollario 4.1.16. *I quozienti di spazi connessi sono connessi.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teorema 4.1.14 perché la proiezione naturale sul quoziente è continua. $\square$

Esempio 4.1.17. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ data da

$$x \sim \pm x \qquad \text{tranne } 57 \text{ che non è equivalente a } -57$$

In pratica si è ripiegato in due $\mathbb{R}$ identificando x a $-x$ tranne il punto 57 che rimane doppio: c'è 57 e -57. Questo spazio sembra non connesso perché sembra fatto da almeno due pezzi. Invece è connesso perché quoziente di un connesso. Non è T_2. (Perché?)

Il Teorema 4.1.14 fornisce una caratterizzazione di insiemi connessi che può risultare utile.

Teorema 4.1.18. *Uno spazio topologico X è connesso se e solo se ogni funzione continua da X in uno spazio discreto è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo X connesso, sia D uno spazio discreto e sia $f : X \to D$ continua. Per il Teorema 4.1.14, $f(X)$ è connesso. Ma se D è discreto allora ogni suo sottoinsieme con almeno due punti non è connesso. Ne segue che $f(X)$ contiene un sol punto, *i.e.* f è costante.

Se invece X non è connesso, allora $X = A \sqcup B$ con A, B entrambi aperti, chiusi e non vuoti. La seguente funzione $f : X \to \{0, 1\}$ è continua e non costante:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

□

Esempio 4.1.19. Sia $X = GL(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici invertibili, con la topologia indotta dall'identificazione dello spazio delle matrici $n \times n$ con $\mathbb{R}^{n^2}$. Allora X è sconnesso. Infatti la funzione $f(A) = \det(A)/|\det(A)|$ è continua, non costante e a valori nel discreto $\{1, -1\}$.

Teorema 4.1.20 (Chiusura di un connesso è connesso)**.** *Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Se A è connesso allora la chiusura di A in X è connessa.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\emptyset \neq B \subseteq \bar{A}$ aperto e chiuso in $\bar{A}$. Si deve dimostrare che $B = \bar{A}$. $B \cap A$ è aperto e chiuso in A. Sicccome A è denso in $\bar{A}$ (Corollario 1.4.10) e siccome B è aperto in $\bar{A}$, si ha $B \cap A \neq \emptyset$. Siccome A è connesso, si ha $B \cap A = A$. Quindi $A \subseteq B$. Siccome B è chiuso in $\bar{A}$ che è chiuso in X, per il Teorema 1.4.3 esso è chiuso in X. Quindi, contenendo A, contiene la sua chiusura. Riassumendo

$$B \subseteq \bar{A} \subseteq B$$

ergo $B = \bar{A}$. □

Corollario 4.1.21. *Se uno spazio topologico contiene un sottoinsieme denso e connesso, allora è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Teorema 4.1.20. □

Corollario 4.1.22. *Ogni intervallo chiuso $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. (a, b) è denso in $[a, b]$ ed è connesso (Corollario 4.1.13). Il Teorema 4.1.20 si applica. □

Esercizio 4.1.23. Dimostrare che ogni intervallo (di qualsiasi tipo) di $\mathbb{R}$ è connesso.

Teorema 4.1.24. *I connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli.*

DIMOSTRAZIONE. Gli intervalli son connessi per l'esercizio precedente che è stato sicuramente fatto. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ non è un intervallo allora ha almeno due punti a, b tali che esista $c \in (a, b)$ che non stia in A. Ma allora $A = (A \cap (-\infty, c)) \sqcup (A \cap (c, \infty))$ è unione di due aperti non vuoti e disgiunti. □

Corollario 4.1.25 (Teorema del valor intermedio)**.** *Sia X uno spazio connesso e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per ogni $x, y \in X$ con $f(x) < f(y)$ esiste $z \in X$ tale che $f(x) < f(z) < f(y)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 4.1.15 l'immagine di f è un connesso di $\mathbb{R}$, quindi un intervallo, che contiene $(f(x), f(y))$. La tesi segue. □

Teorema 4.1.26 (Unione di connessi non disgiunti è connessa)**.** *Sia X uno spazio topologico e sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Supponiamo che*

(1) *ogni A_i sia connesso;*
(2) *$A_i \cap A_j \neq \emptyset$ per ogni $i, j \in I$.*

Allora $\cup_i A_i$ è connesso.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \cup A_i$ aperto e chiuso. Si deve dimostrare che A coincide con $\cup A_i$. Per ogni $i \in I$ si ha che $A \cap A_i$ è aperto e chiuso in A_i. Siccome A_i è connesso allora $A \cap A_i$ è vuoto oppure e tutto A_i. Siccome $A \neq \emptyset$ esiste $i \in I$ tale che $A \cap A_i \neq \emptyset$ e dunque $A \cap A_i = A_i$. Cioè $A_i \subseteq A$. Per ogni altro $j \in I$ si ha $A \cap A_j \supseteq A_i \cap A_j$. Ma $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ per ipotesi. Ne segue che per ogni $j \in I$ si ha $A \cap A_j = A_j$ e quindi $A = \cup A_i$. $\square$

Corollario 4.1.27. *Sia X uno spazio topologico e sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di X. Se esiste $i_0 \in I$ tale che per ogni $i \in I$ si ha $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$, allora $\cup_i A_i$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Si noti che le ipotesi implicano che $A_{i_0} \neq \emptyset$. Per ogni $i \in I$ sia $B_i = A_{i_0} \cup A_i$. Per il Teorema 4.1.26 B_i è connesso. Inoltre per ogni $i, j \in I$ si ha $B_i \cap B_j \supseteq A_{i_0} \neq \emptyset$. Per il Teorema 4.1.26 $\cup B_i$ è connesso e chiaramente $\cup B_i = \cup A_i$. $\square$

Teorema 4.1.28. *Siano A, B spazi topologici non vuoti. Allora $A \times B$ è connesso se e solo se A e B lo sono.*

DIMOSTRAZIONE. Se $A \times B$ è connesso, allora per il Teorema 4.1.14 sia A che B lo sono poiché le proiezioni naturali sui fattori sono continue. Viceversa, supponiamo che sia A che B siano connessi. Per ogni $(a, b) \in A \times B$ si definisca $X_{(a,b)} = (\{a\} \times B) \cup (A \times \{b\})$. Siccome $\{a\} \times B$ è omeomorfo a B, esso è connesso e lo stesso dicasi per $A \times \{b\}$; la loro intersezione è il punto (a, b) ergo non vuota. Per il Teorema 4.1.26, $X_{(a,b)}$ è connesso. Si noti che $(a, b) \in X_{(a,b)}$. (Intuitivamente, l'insieme $X_{(a,b)}$ si può immaginare come un sistema di assi centrato in (a, b).) Per ogni $(a, b), (c, d) \in A \times B$ si ha $(c, b) \in X_{(a,b)} \cap X_{(c,d)} \neq \emptyset$. Ovviamente $A \times B = \cup_{(a,b)\in A\times B} X_{(a,b)}$ e quindi per il Teorema 4.1.26 esso risulta connesso. $\square$

Corollario 4.1.29. $\mathbb{R}^2$ *è connesso.* $\mathbb{R}^n$ *è connesso.* $\mathbb{C}^n$ *è connesso.*

Anche se sembra una facile generalizzazione del Teorema 4.1.28, il seguente risultato richiede una buona dose di lavoro extra.

Teorema 4.1.30. *Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici connessi. Allora il prodotto $\Pi_i X_i$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sul numero dei fattori — usando il Teorema 4.1.28 come passo induttivo — sappiamo che ogni prodotto finito di X_i è connesso.

Se $\Pi_i X_i = \emptyset$ allora non v'è nulla da dimostrare (e può succedere senza assioma di scelta!) Altrimenti sia $O = (O_i)_{i\in I} \in \Pi_i X_i$ (quindi ogni O_i sta in X_i). In analogia con la dimostrazione precedente consideriamo la famiglia dei sistemi di piani coordinati centrati in O. In termini rigorosi, consideriamo

$$\mathcal{F} = \{J \subseteq I : J \text{ ha cardinalità finita}\}$$

$$\forall J \in \mathcal{F} \text{ sia } A_J = \Pi_i Y_i \quad \text{ove } Y_i = \begin{cases} \{O_i\} & i \notin J \\ X_i & i \in J \end{cases}$$

In soldoni, A_j è l'insieme dei punti le cui coordinate differiscono da O solo per gli indici J. Per esempio, se consideriamo $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$ e $O = (0, 0, 0)$, abbiamo che se $J = \{x\}$, allora A_J è l'asse X; se $J = \{x, y\}$ allora A_J è il piano XY, se $J = \{x, y, z\}$ allora $A_J = \mathbb{R}^3$.

Per definizione A_J contiene il punto O per ogni $J \in \mathcal{F}$. Inoltre A_J è omeomorfo a $\Pi_{i\in J} X_i$ e siccome J è finito, A_J è connesso in quanto prodotto finito di connessi. Per il Teorema 4.1.26 si ha che

$$\bigcup_{J\in\mathcal{F}} A_J \quad \text{è connesso}$$

e se dimostriamo che $\cup_{J\in\mathcal{F}} A_J$ è denso in $\Pi_i X_i$, per il Corollario 4.1.21, abbiamo finito. (Si dimostri a titolo di esercizio che se I non è finito e ogni X_i contiene almeno due punti, allora $\Pi_i X_i \neq \cup_{J\in\mathcal{F}} A_J$.)

Per fare ciò dimostriamo che esso interseca ogni elemento di una base della topologia prodotto. Una base della topologia prodotto è data dai prodotti $V = \Pi B_i$ ove ogni B_i è aperto in X_i e solo un numero finito di essi è diverso da X_i. Fissato un tale V diverso dal vuoto, sia

$$J = \{i \in I : \ B_i \neq X_i\}$$

e per ogni $i \in J$ sia $b_i \in B_i$. Consideriamo adesso il punto

$$y = (y_i) \qquad \text{con} \qquad y_i = \begin{cases} O_i & i \notin J \\ b_i & i \in J \end{cases}$$

è immediato verificare che $y \in V$ e $y \in A_J$. Quindi $y \in V \cap (\cup_J A_J)$ che dunque non è vuoto. □

4.2. Componenti connesse

Definizione 4.2.1. Sia X uno spazio topologico. Una **componente connessa** di X è un sottoinsieme connesso e massimale di X, ossia un $A \subseteq X$ tale che:

(1) A è connesso;
(2) per ogni $B \subseteq X$, B connesso e $B \supseteq A$, implica $B = A$.

Esempio 4.2.2. Se X è connesso l'unica componente connessa di X è X stesso.

Siccome i punti son connessi, il vuoto non è una componente connessa (non è massimale). Altrimenti detto, le componenti connesse di uno spazio non vuoto sono non vuote. Per il Teorema 4.1.26 le componenti connesse di uno spazio topologico sono disgiunte tra loro. Inoltre, sempre per il Teorema 4.1.26, dato un sottoinsieme connesso A di uno spazio topologico X, l'unione di tutti i connessi contenenti A è connesso e massimale, ergo una componente connessa di X.

Definizione 4.2.3. Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. La **componente connessa di** x è l'unica componente connessa di X che contiene x. (Essa è l'unione di tutti i connessi contenenti x).

Esempio 4.2.4. Le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono i punti: infatti se $A \subseteq \mathbb{Q}$ contiene almeno due punti $a \neq b$ allora esiste un irrazionale $r \in (a, b)$ e quindi $A_- = A \cap (-\infty, r) = A \cap [-\infty, r]$ è aperto e chiuso in A, $A_- \neq \emptyset$ perché $a \in A_-$ e $A_- \neq A$ perché $b \notin A_-$.

Teorema 4.2.5. *Le componenti connesse di uno spazio topologico X sono chiuse in X.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A una componente connessa di X. Ovviamente $A \subseteq \overline{A}$. Per il Teorema 4.1.20 $\overline{A}$ è connesso. Per massimalità $A = \overline{A}$. □

Occhio che le componenti connesse in generale non sono aperte, *e.g.* in $\mathbb{Q}$ i punti non sono aperti.

Teorema 4.2.6. *Siano X, Y spazi topologici con X connesso e sia $f : X \to Y$ continua. Allora l'immagine di f è contenuta in una componente connessa di Y.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal corollario 4.1.15 e dalla massimalità delle componenti connesse. □

4.3. Connessione per archi

Definizione 4.3.1. Sia X uno spazio topologico e siano $x, y \in X$. Un **arco**, o **cammino**, da x a y è una funzione continua $f : [0, 1] \to X$ tale che $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

Definizione 4.3.2. Uno spazio topologico X si dice **connesso per archi** se per ogni $x, y \in X$ esiste un arco da x a y.

Teorema 4.3.3. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Allora esso è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in X$. Per ogni $y \in X$ sia α_y un arco che connette x a y e sia A_y la sua immagine. Per il Corollario 4.1.15 A_y è connesso. Inoltre esso contiene sempre x. Per il Teorema 4.1.26 l'unione $\cup_{y \in X} A_y$ è connessa. Siccome $y \in A_y$, l'unione $\cup_{y\in X} A_y$ è l'intero X. $\square$

Il viceversa però non vale.

Esempio 4.3.4 (La sinusoide topologica). Sia $G \subset \mathbb{R}^2$ il grafico della funzione $\sin(1/x)$ con $x \in (0, \infty)$. G è chiaramente connesso per archi e quindi è connesso. La chiusura $\overline{G}$ è dunque connessa (Teorema 4.1.20). Ma lo spazio $\overline{G}$ non è connesso per archi.

DIMOSTRAZIONE. La chiusura di G è ottenuta aggiungendo a G il segmento $I = \{0\} \times [-1, 1]$. Osserviamo che per ogni $y \in [-1, 1]$, esiste sempre $y_0 \in [-1, 1] \setminus (y-1, y+1)$ e siccome $\sin(1/x)$ oscilla vicino a zero, per ogni $\delta > 0$ esiste $0 < x_0 < \delta$ tale che $\sin(1/x_0) = y_0$. Quindi l'insieme

$$U_y = \overline{G} \cap (\mathbb{R} \times (y - 1, y + 1))$$

è un aperto di $\overline{G}$ che è sconnesso dalla retta verticale $\{x_0\} \times \mathbb{R}$. Poiché δ può essere scelto piccolo a piacere, si ha che la componente connessa di U_y che contiene $(0, y)$ è $(\{0\} \times (y - 1, y + 1)) \cap I \subseteq I$.

Sia ora $f : [0, 1] \to \overline{G}$ una funzione continua e poniamo $f(t) = (x_t, y_t)$. Sia $C = f^{-1}(I)$. Esso è chiuso perché I lo è ed f è continua. Per continuità di f, per ogni $t \in C$ esiste $\varepsilon > 0$ tale $f(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq U_{y_t}$. Siccome $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ è connesso, la sua immagine è contenuta nella componente connessa di U_{y_t} che contiene $f(t) = (0, y_t)$, che abbiamo visto essere contenuta in I. Quindi t è interno a C che risulta aperto. Siccome $[0, 1]$ è connesso, C è vuoto oppure $[0, 1]$. Ovvero, l'immagine di f sta tutta in I o tutta fuori da I e quindi f non può connettere un punto di I a un punto di G. $\square$

La connessione per archi, come la connessione, è un invariante topologico e può essere usata per distinguere spazi diversi tra loro. Quello che segue è il più classico degli esempi di tale uso.

Esempio 4.3.5. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ non sono omeomorfi tra loro (senza usare il teorema dell'invarianza del dominio). Infatti se togliamo un punto a $\mathbb{R}$ esso si sconnette, mentre se rimuoviamo un punto da $\mathbb{R}^2$, esso rimane connesso per archi, ergo connesso.

Teorema 4.3.6 (Unione di connessi per archi non disgiunti è connessa per archi)**.** *Sia X uno spazio topologico e sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X connessi per archi. Se $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ per ogni $i, j \in I$, allora $\cup_i A_i$ è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 4.1.26 ma più semplice. Siano $x, y \in \cup_i A_i$. Per definizione esiste i tale che $x \in A_i$ e j tale che $y \in A_j$. Sia $z \in A_i \cap A_j$ allora dalla concatenazione di un arco da x a z in A_i con un arco da z a y in A_i si ottiene un arco in $\cup_i A_i$ che unisce x a y. $\square$

Corollario 4.3.7. *Sia X uno spazio topologico e sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X connessi connessi per archi. Se esiste $i_0 \in I$ tale che per ogni $i \in I$ si ha $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$, allora $\cup_i A_i$ è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Si fa come per il Corollario 4.1.27 considerando insiemi $B_i = A_{i_0} \cup A_i$. Essi soddisfano le ipotesi del Teorema 4.3.6. $\square$

Definizione 4.3.8. Sia X uno spazio topologico. Una **componente connessa per archi** di X è un sottoinsieme connesso per archi che sia massimale rispetto all'inclusione.

Molti fatti che valgono per la connessione valgono per la connessione per archi. Per esempio i seguenti, le cui dimostrazioni vengono lasciate al lettore per esercizio.

Teorema 4.3.9. *L'immagine continua di un connesso per archi è connessa per archi. L'immagine continua di un connesso per archi è contenuta in una componente connessa per archi.*

Teorema 4.3.10. *Se A e B sono spazi non vuoti, allora $A \times B$ è connesso per archi se e solo se entrambi A, B lo sono.*

Teorema 4.3.11. *Sia X uno spazio topologico. Allora ogni $x \in X$ è contenuto in un'unica componente connessa per archi, caratterizzata dall'essere l'unione di tutti i connessi per archi che contengono x.*

Quello che però NON vale per la connessione per archi è il passaggio alla chiusura, come si evince dall'Esempio 4.3.4.

Esercizio 4.3.12. Nell'Esempio 4.3.4, determinare le componenti connesse per archi di $\overline{G}$.

Nonostante il passaggio alla chiusura fosse cruciale nella dimostrazione del Teorema 4.1.30, esso resta vero in versione connessione per archi, con una dimostrazione semplicissima.

Teorema 4.3.13. *Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici connessi per archi. Allora il prodotto $\Pi_i X_i$ è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $(x_i), (y_i) \in \Pi_i X_i$. Per ogni i esiste una funzione continua $f_i : [0,1] \to X_i$ tale che $f_i(0) = x_i$ e $f_i(1) = y_i$. La funzione $f : [0,1] \to \Pi_i X_i$ definita da

$$f(t) = (f_i(t))_{i\in I} \in \Pi_i(X_i)$$

connette (x_i) a (y_i) ed è continua per il Teorema 2.1.15. □

4.4. Locale connessione

Il concetto di connessione (per archi) può essere localizzato.

Definizione 4.4.1. Uno spazio topologico (X, τ) si dice **localmente connesso** (per archi) se ogni suo punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi (per archi).

Teorema 4.4.2. *Sia X uno spazio topologico tale che per ogni aperto U di X, le componenti connesse (per archi) di U sono aperte. Allora X è localmente connesso (per archi).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in X$ e sia A un intorno di x in X. Dobbiamo mostrare che A contiene un intorno connesso (per archi) di x. Per definizione esiste un aperto U tale che $x \in U \subseteq A$. Sia C_x la componente connessa (per archi) di U che contiene x. Essa è aperta per ipotesi ed è dunque un intorno connesso (per archi) di x contenuto in A. □

Teorema 4.4.3. *Gli aperti di spazi localmente connessi (per archi) sono localmente connessi (per archi).*

DIMOSTRAZIONE. Sia (X, τ) uno spazio localmente connesso (per archi), sia $x \in U \in \tau$ e sia V un intorno di x in U. Siccome $U \in \tau$, V è anche un intorno di x in X. Per ipotesi V contiene un intorno di x connesso (per archi). Esso è un intorno di x anche per $\tau|_U$. □

Teorema 4.4.4. *Le componenti connesse (per archi) di spazi localmente connessi (per archi) sono aperte.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio localmente connesso (per archi). Sia $x \in X$ e C_x la sua componente connessa (per archi). Per ipotesi x possiede quindi un intorno connesso (per archi) A_x. Ne segue che C_x contiene A_x. Quindi x è interno a C_x. Quindi ogni punto è interno alla sua componente connessa (per archi) che risulta dunque aperta. □

Corollario 4.4.5. *Le componenti connesse per archi di spazi localmente connessi per archi son chiuse.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio localmente connesso per archi. Per il Teorema 4.3.6 le componenti connesse per archi sono disgiunte, in particolare

$$X = \sqcup C_i$$

ove C_i sono le componenti connesse per archi di X. Il complementare di una componente connessa per archi C è quindi l'unione delle altre, che sono aperte per il Teorema 4.4.4, e dunque è aperto. □

Possiamo riassumere i risultati sulla (locale) connessione (per archi) nel seguente enunciato, la cui dimostrazione, che lasciamo al lettore, segue immediatamente dai Teoremi 4.1.26, 4.2.5, 4.3.6, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 e dal Corollario 4.4.5.

Teorema 4.4.6. *Uno spazio topologico X è localmente connesso (per archi) se e solo se le componenti connesse (per archi) di ogni suo aperto sono aperte. In tal caso X è unione disgiunta delle sue componenti connesse (per archi), ognuna delle quali è aperta e chiusa. Inoltre, ogni sottoinsieme di X che sia aperto e chiuso è unione di componenti connesse di X.*

I prodotti si comportano abbastanza bene rispetto alla locale connessione.

Teorema 4.4.7. *Sia $(X_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi localmente connessi (per archi). Nel caso in cui I abbia cardinalità infinita, supponiamo inoltre che tutti gli X_i siano connessi (per archi). Allora $X = \Pi_i X_i$ è localmente connesso (per archi).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x = (x_i) \in X$ e sia U un intorno di x. Per come è fatta la topologia prodotto, esiste un intorno aperto B di x della forma $B = \Pi_i B_i$ ove $B_i \subseteq X_i$ è aperto e solo un numero finito di essi è non banale. Siccome ogni X_i è localmente connesso, dentro ogni B_i si trova un intorno connesso A_i di x_i. Ponendo $A_i = X_i$ per gli indici ove $B_i = X_i$, siccome X_i è connesso, per i Teoremi 4.1.30 e 4.3.13 si ha che $\Pi_i A_i \subseteq B$ è un intorno connesso di x. Lo stesso ragionamento vale per la connessione per archi. □

Le immagini continue di localmente connessi (per archi) invece, non sono necessariamente localmente connesse.

Esempio 4.4.8. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ data da $f(0) = 0$ e $f(n) = 1/n$ per $n \neq 0$. $\mathbb{N}$ è discreto e quindi localmente connesso per archi ma $f(\mathbb{N})$ non è localmente connesso perché $f(0)$ non ha intorni connessi in $f(\mathbb{N})$.

La buona notizia è che i quozienti di localmente connessi sono localmente connessi, la cattiva notizia è che non si può usare la continuità della proiezione naturale per dimostrarlo.

Teorema 4.4.9 (Quoziente di loc. connesso è loc. connesso)**.** *Sia X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione d'equivalenza. Se X è localmente connesso (per archi) allora il quoziente $X/\sim$ è localmente connesso (per archi).*

DIMOSTRAZIONE. Usiamo il Teorema 4.4.6 e dimostriamo che le componenti connesse (per archi) degli aperti di $X/\sim$ sono aperte. Sia $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione naturale. Sia U un aperto di $X/\sim$ e sia A una sua componente connessa (per archi). L'insieme $V = \pi^{-1}(U)$ è aperto perché π è continua. Per il Teorema 4.4.6 le componenti connesse (per archi) di V sono aperte. Per ogni $x \in \pi^{-1}(A)$ sia V_x la componente connessa (per archi) di V contenente x. L'insieme

$$W = \bigcup_{x\in\pi^{-1}(A)} V_x$$

è dunque aperto. Inoltre $\pi(V_x)$ è un sottoinsieme di U connesso (per archi) e contenente $\pi(x) \in A$, dunque esso è contenuto in A (Teoremi 4.2.6 e versione 4.3.9 per connessione per archi). Ne segue che $W \subseteq \pi^{-1}(A)$. D'altronde W contiene $\pi^{-1}(A)$ per come è definito, quindi $\pi^{-1}(A) = W$ è aperto, ergo A è aperto. □

La locale connessione si comporta bene per mappe aperte.

Teorema 4.4.10. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra spazi topologici. Se X è localmente connesso (per archi) e f è aperta, allora $f(X)$ è localmente connesso (per archi).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $y = f(x) \in f(X)$ e sia V un intorno aperto di y. $f^{-1}(V)$ è un intorno aperto di x. Per ipotesi, esso contiene un aperto $U \ni x$ connesso (per archi). Siccome f è aperta, $f(U)$ è un aperto connesso (per archi) e $y \in f(U) \subseteq V$. □

Corollario 4.4.11. *Sia $(X_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici. Se $\Pi_i X_i$ è localmente connesso (per archi) allora ogni X_i lo è.*

DIMOSTRAZIONE. Le proiezioni naturali sono aperte per il Teorema 2.1.12. □

Sappiamo già che connesso per archi implica connesso e quindi che localmente connesso per archi implica localmente connesso. L'altra implicazione è la seguente.

Teorema 4.4.12. *Ogni spazio topologico connesso e localmente connesso per archi, è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi, sia $x \in X$ e sia C_x la componente connessa per archi di x. C_x è un connesso per archi. Inoltre C_x è aperto e chiuso per il Teorema 4.4.6. Siccome C_x è non vuoto perché contiene x, per connessione esso deve essere tutto X che quindi risulta connesso per archi. □

Tutte le altre combinazioni sono possibili:

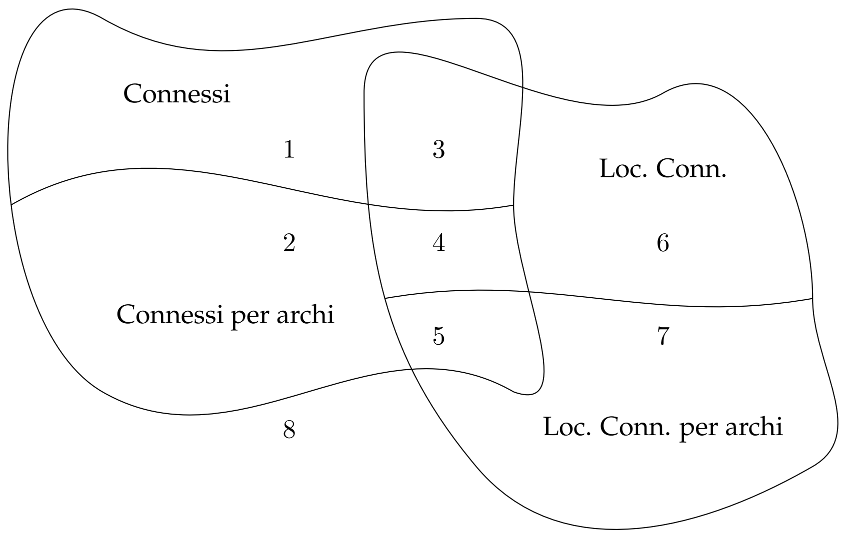


FIGURA 1. Le possibili proprietà di connessione

Esempio 4.4.13. Per ognuna delle possibilità 1–8 della Figura 1 esistono degli esempi.

DIMOSTRAZIONE.

(1) Connesso, non connesso per archi, non localmente connesso. Sia G il grafico di $\sin(1/x)$ con $x \in (0, \infty)$ e sia $X = \overline{G}$. Esso è connesso ma non connesso per archi. Inoltre i punti del tipo $(0, y)$ con $y \in [-1, 1]$ non possiedono un sistema fondamentale di intorni connessi. Quindi X non è localmente connesso.
(2) Connesso per archi non localmente connesso. Il cosiddetto pettine delle pulci. Sia $A = \{1/n : 0 < n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ e sia $X \subset \mathbb{R}^2$ definito da $X = (A \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$. Esso è chiaramente connesso per archi (l'asse orizzontale interseca tutte le rette verticali) ma i punti del tipo $(0, y)$ non hanno sistemi fondamentali di intorni connessi.
(3) Connesso, non connesso per archi, localmente connesso ma non localmente connesso per archi. $X = [0, 1]^2$ con l'ordine lessicografico (si veda la Sezione 4.5). La locale connessione si dimostra come la globale connessione. La non locale connessione per archi si dimostra come la non connessione per archi.

(4) Connesso per archi, localmente connesso ma non localmente connesso per archi. Un cono su un insieme di tipo 3). Sia Y un insieme di tipo 3) e $X = Y \times [0,1]/\sim$ ove $\sim$ è la relazione che identifica $Y \times \{0\}$ a un sol punto. X è connesso per archi perché ogni punto è connettibile al vertice del cono. $Y \times [0,1]$ è localmente connesso perché prodotto di localmente connessi (Teorema 4.4.7). Quindi X è localmente connesso perché quoziente di un localmente connesso (Teorema 4.4.9). D'altronde Y non è localmente connesso per archi e quindi nemmeno $Y \times (0,1)$ lo è (Corollario 4.4.11). Quindi X non è localmente connesso per archi perché contiene $Y \times (0,1)$ come aperto.
(5) Connesso in tutte le salse: $X =$ un punto, oppure $X = \mathbb{R}$, oppure $X = [0,1]$.
(6) Localmente connesso, ma non per archi, globalmente non connesso. Due copie disgiunte di uno spazio di tipo 3).
(7) Localmente connesso per archi ma non connesso. Una qualsiasi topologia discreta su un insieme con almeno due punti. Oppure $X = [0,1] \cup [57,128]$.
(8) Nessuna proprietà di connessione: $X = \mathbb{Q}$. Infatti $\mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}) \sqcup (\sqrt{2}, \infty)$ è sconnesso. Le componenti connesse sono i punti, che non sono aperti, ergo $\mathbb{Q}$ non è localmente connesso.

4.5. Una piccola digressione: connessione di insiemi totalmente ordinati

Teorema 4.5.1. *Sia $I = [0,1]^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico. I è connesso.*

Prima di tutto si noti che l'ordine lessicografico di $\mathbb{R}^2$ induce l'ordine lessicografico di $[0,1]^2$. Ma $[0,1]^2$ non è connesso per la topologia indotta da $\mathbb{R}^2$ con l'ordine lessicografico (perché?). Questa non è altro che un'ulteriore manifestazione del fenomeno già evidenziato con l'Esempio 1.4.15.

La dimostrazione del Teorema 4.5.1 è identica a quella del Teorema 4.1.12. C'è però una piccola sottigliezza a cui si deve stare attenti. Proponiamo adesso la dimostrazione senza dire dove sta il busillis, vediamo se ve viene scovato. Prima, un paio di precisazioni notazionali. L'insieme I ha un massimo, il punto $(1,1)$, e un minimo, il punto $(0,0)$, che chiamiamo per semplicità 1 e 0 rispettivamente. Dati $a, b \in I$ usiamo la classica notazione di intervalli: $(a,b) = \{x \in I : a < x < b\}$ incluse tutte le varianti $[a,b], [a,b), (a,b]$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\emptyset \neq A \subseteq I$ aperto e chiuso. Vogliamo dimostrare che in tal caso $A = I$. Se $A \neq I$ allora A^c è aperto, chiuso e non vuoto. Quindi, a meno di scambiare A con A^c, possiamo supporre che $0 \in A$. Sia

$$X = \{t \in I : \ [0,t] \subseteq A\}$$

e sia t_0 l'estremo inferiore del complementare di X, ponendo $t_0 = \infty$ se $X = I$. Si noti che $0 \in X$. Inoltre, siccome A è aperto, per ogni $1 \neq x \in A$ esiste $y > x$ tale che $[x,y) \subset A$. Ne segue che se $1 \neq t \in X$ allora esiste $y > t$ tale che $X^c \subseteq [y,1]$. Ciò implica che

$$0 < t_0 \notin X.$$

Per ogni $s < t_0$ si ha $[0,s] \subseteq A$, in particolare $[0,t_0) \subseteq A$. Siccome A è chiuso, se $t_0 < \infty$ allora avremmo $[0,t_0] \subseteq A$ e quindi $t_0 \in X$, in contraddizione con quanto appena dimostrato. Quindi $t_0 = \infty$ e dunque $A = I$. □

Dov'è il busillis? Si noti che questa dimostrazione — apparentemente — fa uso solo della relazione d'ordine e sembrerebbe funzionare per ogni insieme totalmente ordinato. Sappiamo però che, per esempio, $\mathbb{Q}$ non è connesso e $\mathbb{Z}$ nemmeno. Il prossimo esempio fornisce un altro caso di spazio totalmente ordinato non connesso.

Esempio 4.5.2. Sia $J = (0,1)^2$ con la topologia dell'ordine lessicografico. J non è connesso.

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = (-\infty, (1/2,1)) = \{(x,y) \in J : \ (x,y) < (1/2,1)\}$ e $B = A^c = ((1/2,1), +\infty) = \{(x,y) \in J : \ (x,y) > (1/2,1)\}$ (si noti che si è usato che $(1/2,1)$ non appartiene a J). Sia A che B sono aperti (perché?) e $J = A \sqcup B$. □

Esercizio 4.5.3. Provare a seguire passo passo la dimostrazione rimpiazzando I con $\mathbb{Q}$ e/o con $\mathbb{Z}$ per vedere se qualche nodo viene al pettine.

Adesso mettiamo in neretto i nodi.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\emptyset \neq A \subseteq I$ aperto e chiuso. Vogliamo dimostrare che in tal caso $A = I$. Se $A \neq I$ allora A^c è aperto, chiuso e non vuoto. Quindi, a meno di scambiare A con A^c, possiamo supporre che $0 \in A$. Sia

$$X = \{t \in I : [0,t] \subseteq A\}$$

e **sia** t_0 **l'estremo inferiore del complementare di** X, ponendo $t_0 = \infty$ se $X = I$. Si noti che $0 \in X$. Inoltre, siccome A è aperto, per ogni $1 \neq x \in A$ esiste $y > x$ tale che $[x,y) \subset A$. Ne segue che se $1 \neq t \in X$ allora esiste $y > t$ tale che $X^c \subseteq [y,1]$. Ciò implica che

$$0 < t_0 \notin X.$$

Per ogni $s < t_0$ si ha $[0,s] \subseteq A$, in particolare $[0,t_0) \subseteq A$. **Siccome** A **è chiuso, se** $t_0 < \infty$ **allora avremmo** $[0,t_0] \subseteq A$ e quindi $t_0 \in X$, in contraddizione con quanto appena dimostrato. Quindi $t_0 = \infty$ e dunque $A = I$. □

Il primo nodo è l'esistenza di inf e sup, cosa che non è vera per esempio in $\mathbb{Q}$. Il secondo nodo è che $\overline{[a,b)} = [a,b]$ cosa che per esempio non è vera in $\mathbb{Z}$ (ove $\overline{[2,6)} = [2,5]$). Affinché la dimostrazione proposta sia completa, queste due cose vanno dimostrate in I. Chiaramente, il Teorema 4.5.1 si generalizza *mutatis mutandis* a insiemi totalmente ordinati con le proprietà opportune.

Lemma 4.5.4. *Ogni* $\emptyset \neq A \subseteq I$ *ha estremo inferiore.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = \{x \in [0,1] : \exists y \in [0,1] : \forall a \in A, (x,y) \leq a\}$. L'insieme X è non vuoto perché $0 \in X$. Quindi X ha un estremo superiore $x_0 \in [0,1]$. Per ogni $a = (x_a, y_a) \in A$ si ha $x_a \geq x_0$. Se $x_0 \notin X$ allora in particolare esiste $a \in A$ con $a < (x_0, 0)$, ma ciò implicherebbe $x_a < x_0$. Quindi $x_0 \in X$. Dunque l'insieme $Y = \{y \in [0,1] : \forall a \in A, (x_0, y) \leq a\}$ è non vuoto. Sia y_0 l'estremo superiore di Y in $[0,1]$. Si ha $(x_0, y_0) \leq a$ per ogni $a \in A$. Inoltre (x_0, y_0) è il massimo dei minoranti di A, quindi (x_0, y_0) è l'estremo inferiore di A. □

Lemma 4.5.5. *Per ogni* $a < b \in I$ *si ha* $\overline{[a,b)} = [a,b]$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $b = (x_b, y_b)$. Se $y_b \neq 0$ allora ogni intorno di b contiene un intervallo del tipo $\big((x_b, y_b - \varepsilon), (x_b, y_b)\big)$ e quindi interseca $[a,b)$. Se $y_b = 0$ allora ogni intorno di b contiene un intervallo del tipo $\big((x_b - \varepsilon, 1), (x_b, y_b)\big)$ e quindi interseca $[a,b)$. In ogni caso b è un punto di aderenza di $[a,b)$. Ne segue $[a,b] \subseteq \overline{[a,b)}$. D'altronde $[a,b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ è aperto perché unione di aperti. Quindi $[a,b]$ è chiuso e dunque contiene la chiusura di $[a,b)$. □

Teorema 4.5.6. *Sia* $I = [0,1]^2$ *con l'ordine lessicografico.* I *non è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista una funzione continua $f : [0,1] \to I$ tale che $f(0) = (0,0)$ e $f(1) = (1,1)$. L'immagine di f è connessa per il Corollario 4.1.15.

Osserviamo che se esistesse p_0 non contenuto nell'immagine di f, allora essa risulterebbe sconnessa. Infatti in tal caso avremmo

$$\mathrm{Imm}(f) = (\mathrm{Imm}(f) \cap \{p < p_0\}) \sqcup (\mathrm{Imm}(f) \cap \{p > p_0\})$$

ed entrambi gli insiemi $\{p < p_0\}$ e $\{p > p_0\}$ sono aperti per la topologia dell'ordine lessicografico.

Quindi f è suriettiva. Per ogni $x \in [0,1]$ sia $A_x = \{x\} \times (0,1)$. Esso è aperto per la topologia dell'ordine lessicografico. Siccome f è continua allora $B_x = f^{-1}(A_x)$ è un aperto di $[0,1]$. Inoltre B_x è non vuoto perché f è suriettiva e $B_x \cap B_y = \emptyset$ se $x \neq y$. La famiglia

$$\{B_x\}_{x \in [0,1]}$$

costituisce quindi una famiglia più che numerabile di aperti disgiunti in $[0,1]$. Ma per il Teorema 1.5.15 ciò è incompatibile col fatto che $[0,1]$ sia a base numerabile. □

4.6. Esercizi

Esercizio 4.6.1. Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ Euclideo è connesso.

Esercizio 4.6.2. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ meno l'asse X è sconnesso.

Esercizio 4.6.3. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme $\{(x, 0) : x > 0\}$. Si dimostri che X è omeomorfo a $\mathbb{R}$. Si dimostri che $\mathbb{R}^2 \setminus X$ è connesso.

Esercizio 4.6.4. Dimostrare che $\mathbb{R}^3$ meno l'asse X è connesso.

Esercizio 4.6.5. Dimostrare che $\mathbb{R}$, con la topologia generata dagli intervalli del tipo $(a, b]$, non è connesso.

Esercizio 4.6.6. Dimostrare che $\mathbb{R}$, con la topologia generata dagli intervalli del tipo $[a, b]$, non è connesso.

Esercizio 4.6.7. Dimostrare che la topologia del punto particolare (Esercizio 1.1.11) è connessa.

Esercizio 4.6.8. Si dica se $\mathbb{R}^2$ con la topologia delle palle annidate (Esempio 1.1.10) è connesso.

Esercizio 4.6.9. Sia X un insieme dotato della topologia cofinita. Dimostrare che se X è sconnesso allora ha un numero finito di elementi.

Esercizio 4.6.10. Si dica se $\mathbb{Z}$ con la topologia delle successioni aritmetiche (Esempio 1.2.5) è connesso.

Esercizio 4.6.11. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi è connesso.

Esercizio 4.6.12. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ Euclideo privato di un punto è connesso.

Esercizio 4.6.13. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi e privato di un punto, è sconnesso.

Esercizio 4.6.14. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ con la topologia di Zariski è connesso.

Esercizio 4.6.15. Dimostrare che ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ con la topologia di Zariski è connesso (rispetto alla topologia di Zariski).

Esercizio 4.6.16. Dimostrare che ogni aperto di $\mathbb{C}$ con la topologia di Zariski è connesso rispetto alla topologia standard.

Esercizio 4.6.17. Dimostrare che ogni aperto non banale di $\mathbb{R}$ con la topologia di Zariski è sconnesso rispetto alla topologia standard.

Esercizio 4.6.18. Vero o falso? Se σ è più fine di τ e σ è connessa allora τ è connessa.

Esercizio 4.6.19. Vero o falso? Se σ è meno fine di τ e σ è connessa allora τ è connessa.

Esercizio 4.6.20. Dimostrare che gli spazi proiettivi (su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$) sono connessi.

Esercizio 4.6.21. Dimostrare che T^2 è connesso.

Esercizio 4.6.22. Dimostrare che S^2 è connesso.

Esercizio 4.6.23. Dimostrare che la bottiglia di Klein è connessa.

Esercizio 4.6.24. Dire quali lettere dell'alfabeto sono connesse.

Esercizio 4.6.25. Si dia un esempio di uno spazio contenente un insieme connesso la cui parte interna non è connessa.

Esercizio 4.6.26. Dimostrare che l'insieme di Cantor non è localmente connesso.

Esercizio 4.6.27. Dimostrare che $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, come sottoinsieme del piano Euclideo, non è connesso.

Esercizio 4.6.28. Dimostrare che esiste una topologia su $\mathbb{R}^2$ che rende $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ connesso.

Esercizio 4.6.29. Dimostrare, coi mezzi sviluppati sinora, che il tappeto e la guarnizione di Sierpinski sono connessi e localmente connessi.

Esercizio 4.6.30. Dimostrare che una varietà topologica è localmente connessa per archi.

Esercizio 4.6.31. Dare un esempio di varietà non connessa.

Esercizio 4.6.32. Dimostrare che un grafo è localmente connesso per archi.

Esercizio 4.6.33. Dare un esempio di grafo non connesso.

Esercizio 4.6.34. Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ un insieme connesso. Sia $B \subseteq \overline{A}$. Dimostrare che $A \cup B$ è connesso.

Esercizio 4.6.35. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$ si dica se X è connesso. Si dica se $\overline{X}$ è connesso. Si dica se X è localmente connesso. Si dica se $\overline{X}$ è localmente connesso.

Esercizio 4.6.36. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \neq 0\}$. Si dimostri che X ha esattamente tre componenti connesse.

Esercizio 4.6.37. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sup\{|x|, |y|\} < 1, x^2 + y^2 > 1\}$. Si dica se X e $\overline{X}$ sono connessi e/o localmente connessi.

Esercizio 4.6.38. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{(x, n^2x), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che X è connesso per archi e localmente connesso per archi. Dimostrare che $\overline{X}$ è connesso per archi ma non localmente connesso.

Esercizio 4.6.39. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{(x, nx^2), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che X è connesso per archi e localmente connesso per archi. Dimostrare che $\overline{X}$ è connesso per archi ma non localmente connesso.

Esercizio 4.6.40. In $\mathbb{R}^2$ sia X l'immagine di $(0, \infty)$ tramite $f(t) = e^{-1/t^2}(\cos(t + 1/t), \sin(t + 1/t))$. Dimostrare che X è connesso. Dimostrare che $\overline{X}$ è connesso, ma non per archi.

Esercizio 4.6.41. In $\mathbb{R}^2$ sia X l'immagine di $(0, \infty)$ tramite $f(t) = e^{-1/t^2}(\cos(t + 1/t), \sin(t + 1/t))$. Dimostrare che X^c è connesso ma non connesso per archi né localmente connesso. Dimostrare che $(\overline{X})^c$ non è connesso.

Esercizio 4.6.42. In $\mathbb{R}^2$ sia X l'immagine di $(0, \infty)$ tramite $f(t) = t(\cos t, \sin t)$ e sia $\widehat{X}$ la sua compattificazione di Alexandroff. Dimostrare che $\widehat{X}$ è connesso e localmente connesso per archi. Si dica se è una varietà.

Esercizio 4.6.43. Per ogni $a \neq b \in \mathbb{R}$ sia $S(a, b)$ il semicerchio chiuso del semipiano positivo di $\mathbb{R}^2$ passante per $(a, 0)$ e $(b, 0)$ e ortogonale all'asse X. Sia $X = \cup_{n \in \mathbb{Z}} S(2^n, 2^{n+1})$. Dimostrare che sia X che la sua chiusura sono connessi e localmente connessi per archi.

Esercizio 4.6.44. Per ogni $a \neq b \in \mathbb{R}$ sia $E(a, b)$ la semi ellisse chiusa del semipiano positivo di $\mathbb{R}^2$ passante per $(a, 0), (b, 0), (\frac{a+b}{2}, 1)$. Sia $X = \cup_{n \in \mathbb{Z}} E(2^n, 2^{n+1})$. Dimostrare che sia la chiusura di X è connessa ma non per archi.

Esercizio 4.6.45. Con la stessa notazione dell'Esercizio 4.6.43, sia $X = \cup_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} S(2^n, 1)$. Dimostrare che X è connesso e localmente connesso per archi. Dimostrare che $\overline{X}$ non è localmente connesso.

Esercizio 4.6.46. Con la stessa notazione dell'Esercizio 4.6.43, sia $X = \cup_{n<0} S(2^n, 1)$. Dimostrare che $X \cup \{(0, 0)\}$ è connesso, ma non per archi.

Esercizio 4.6.47. Dimostrare che il quoziente di $\mathbb{R}$ per la relazione d'equivalenza generata da $x \sim 2x$ è connesso. Si dica se è una varietà.

Esercizio 4.6.48. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $v \sim 2v$. Si dica se $\mathbb{R}^2/\sim$ è connesso.

Esercizio 4.6.49. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $v \sim 2v$ e sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ la proiezione naturale. Sia $X = \{(x, y) : x \neq 0\}$. Si dica se $\pi(X)$ è connesso.

Esercizio 4.6.50. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $v \sim 2v$ e sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ la proiezione naturale. Sia $X = \{(x, y) : x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$. Si dica se $\pi(X)$ è connesso.

Esercizio 4.6.51. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $v \sim 2v$ e sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ la proiezione naturale. Sia $X = \{(x, y) : |x| > 1\}$. Si dica se $\pi(X)$ è connesso.

Esercizio 4.6.52. In $\mathbb{R}^2$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $v \sim 2v$ e sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ la proiezione naturale. Sia $X = \{(x, y) : |x| > 1\} \cup \{(0, 0)\}$. Si dica se $\pi(X)$ è connesso.

Esercizio 4.6.53. Dimostrare che $GL(n, \mathbb{R})$ ha esattamente due componenti connesse.

Esercizio 4.6.54. Dimostrare che $SO(2)$ è connesso.

Esercizio 4.6.55. Siano X, Y spazi topologici con n e m componenti connesse rispettivamente. Dimostrare che $X \times Y$ ha nm componenti connesse.

Esercizio 4.6.56. Sia X uno spazio topologico, sia C una componente connessa di X e sia $A \subseteq X \setminus C$. Dimostrare che A è una componente connessa di $X \setminus C$ se e solo se è una componente connessa di X. Mostrare un controesempio nel caso C non sia una componente connessa.

Esercizio 4.6.57. Vero o falso? Se uno spazio topologico è connesso allora togliendo un punto rimane connesso.

Esercizio 4.6.58. Vero o falso? Se X è uno spazio topologico tale che $\exists x \in X$ per cui $X \setminus \{x\}$ è connesso, allora X è connesso.

Esercizio 4.6.59. Vero o falso? Se X è uno spazio topologico tale che $\forall x \in X$ sia ha che $X \setminus \{x\}$ è connesso, allora X è connesso.

Esercizio 4.6.60. Vero o falso? Se X è uno spazio topologico tale che $\forall x \in X$ sia ha che $X \setminus \{x\}$ è connesso, allora X ha al più due componenti connesse.

Esercizio 4.6.61. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme del piano tale che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in X$ la palla $B(x, \varepsilon)$ è interamente contenuta in X. Dimostrare che X è connesso. Si diano due esempi diversi di sottoinsiemi $X \subseteq \mathbb{R}^2$ con tale proprietà. Esiste un terzo esempio?

Esercizio 4.6.62. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme non vuoto tale che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in X$ la palla $B(x, \varepsilon)$ è interamente contenuta in X. Dimostrare che $X = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.6.63. Sia X uno spazio connesso e sia $f : Y \to X$ una funzione aperta e suriettiva tale che le preimmagini di ogni punto siano connesse. Dimostrare che Y è connesso. Se ne deduca una dimostrazione alternativa del Teorema 4.1.28.

Esercizio 4.6.64. Si trovi un esempio di una funzione aperta $f : Y \to X$ tra spazi topologici con X connesso e Y no.

Esercizio 4.6.65. Si trovi un esempio di una funzione suriettiva $f : Y \to X$ tra spazi topologici con X connesso e Y no.

Esercizio 4.6.66. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che sia continua in ogni punto tranne che in zero, ove è discontinua. Sia $G \subseteq \mathbb{R}^2$ il grafico di f. Dimostrare che $\overline{G}$ non è connesso per archi. Dare un esempio in cui $\overline{G}$ è connesso e un esempio in cui non lo è. Dare un esempio in cui $\overline{G}$ è localmente connesso per archi e uno in cui non lo è.

Esercizio 4.6.67. Sia X uno spazio connesso e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che esistano $x, y \in X$ per cui $f(x) = -f(y)$. Dimostrare che esiste $z \in X$ tale che $f(z) = 0$.

Esercizio 4.6.68 (Teorema di Borsuk-Ulam unidimensionale). Dimostrare che per ogni funzione continua $f : S^1 \to \mathbb{R}$ esiste $x \in S^1$ tale che $f(x) = f(-x)$.

Esercizio 4.6.69. Dimostrare che esistono infiniti punti p sulla terra tali che p e il suo antipodale hanno la stessa temperatura.

Esercizio 4.6.70. Dimostrare che dato un qualsiasi sottoinsieme (misurabile) del piano, esiste una retta che lo divide in due pezzi di uguale area.

Esercizio 4.6.71. Dimostrare che data una qualsiasi torta, cioè un sottoinsieme limitato (e misurabile) del piano, esistono due rette perpendicolari che la dividono in quattro fette di uguale area.

CAPITOLO 5

Topologia degli Spazi metrici

Sin ora abbiamo usato gli spazi metrici (principalmente $\mathbb{R}^2$) come fonte di esempi per le varie nozioni topologiche trattate. È arrivato il momento di studiare le proprietà peculiari che gli spazi metrici hanno rispetto agli altri spazi topologici.

5.1. Spazi metrici, omotetie e isometrie

Cominciamo richiamando la definizione di spazio metrico (Definizione 0.2.1) e dando qualche esempio in più rispetto a quelli che abbiamo già collezionato.

Definizione 5.1.1. Sia X un insieme. Una **distanza** è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che, quali che siano $x, y, z \in X$ si abbia:

(1) $d(x, y) \geq 0$ (*Positività*);
(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*Distinzione dei punti*);
(3) $d(x, y) = d(y, x)$ (*Simmetria*);
(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*Disuguaglianza triangolare*).

Un insieme X dotato di una funzione distanza d si dice **spazio metrico**, e spesso le parole "metrica" e "distanza" sono sinonimi.

Definizione 5.1.2. Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subseteq X$. La restrizione $d|_Y$ di d a Y è una distanza su Y che si chiama **distanza indotta** da (X, d) su Y. Lo spazio metrico $(Y, d|_Y)$ si chiama **sottospazio** di (X, d).

Teorema 5.1.3. *Siano (X, δ) e (Y, σ) due spazi metrici. Allora le funzioni d, D su $X \times Y$ definite da*

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \delta(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2) \qquad D\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sup\{\delta(x_1, x_2), \sigma(y_1, y_2)\}$$

sono metriche su $X \times Y$.

DIMOSTRAZIONE. Siccome δ e σ sono funzioni positive e simmetriche, anche d e D lo sono. Inoltre, se $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 0$, oppure se $D\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 0$, allora per positività $\delta(x_1, x_2) = \sigma(y_1, y_2) = 0$ e quindi $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, ossia $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Veniamo alle disuguaglianze triangolari.

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \delta(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2) \leq \delta(x_1, x_3) + \delta(x_3, x_2) + \sigma(y_1, y_3) + \sigma(y_3, y_2) =$$
$$= d\big((x_1, y_1), (x_3, y_3)\big) + d\big((x_3, y_3), (x_2, y_2)\big).$$
$$\begin{aligned} D\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sup\{\delta(x_1, x_2), \sigma(y_1, y_2)\} &\leq \sup\{\delta(x_1, x_3) + \delta(x_3, x_2), \sigma(y_1, y_3) + \sigma(y_3, y_2)\} \\ &\leq \sup\{(\delta(x_1, x_3), \sigma(y_1, y_3)\} + \sup\{\delta(x_3, x_2), \sigma(y_3, y_2)\} \\ &= D\big((x_1, y_1), (x_3, y_3)\big) + D\big((x_3, y_3), (x_2, y_2)\big). \end{aligned}$$

□

Corollario 5.1.4. *Siano d_1, d_2 due metriche su X. Allora $d_1 + d_2$ e $\sup(d_1, d_2)$ sono metriche su X.*

DIMOSTRAZIONE. In $X \times X$ sia $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ la diagonale. Δ è in relazione biunivoca naturale con X. Quindi dare una metrica su Δ equivale a darla su X. Per il Teorema 5.1.3 applicato a (X, d_1) e (X, d_2), abbiamo delle metriche ben definite su $X \times X$, le cui restrizioni a Δ sono $d_1 + d_2$ e $\sup(d_1, d_2)$. $\square$

Teorema 5.1.5. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora la funzione $\delta = \arctan(d)$ è una metrica su X.*

DIMOSTRAZIONE. δ è chiaramente simmetrica perché d lo è. L'arcotangente manda zero in zero, è positiva su $\mathbb{R}_+$, monotona e sub-additiva (cioè $f(a+b) \leq f(a)+f(b)$). Ne segue subito che δ è positiva e $\delta(x,y) = 0$ se e solo se $d(x,y) = 0$, se e solo se $x = y$. Vediamo la disuguaglianza triangolare (qui servono monotonia e sub-additività). Siccome $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ si ha

$$\delta(x,y) = \arctan(d(x,y)) \leq \arctan(d(x,z)+d(z,y)) \leq \arctan(d(x,z))+\arctan(d(z,y)) = \delta(x,z)+\delta(z,y).$$

$\square$

Vediamo adesso qualche esempio preso in prestito dall'analisi funzionale.

Esempio 5.1.6 (Metrica L^p su $\mathbb{R}^n$). Su $X = \mathbb{R}^n$, detti $v = (x_i)$ e $w = (y_i)$, si pone $d(v,w) = \sqrt[p]{\sum_i (|x_i - y_i|)^p}$. Questa è una metrica solo per $p \in [1, \infty]$. Per $p = 1$ la metrica diventa $d_1(v,w) = \sum_i |x_i - y_i|$. Per $p = \infty$ la metrica diventa $d_\infty(v,w) = \sup_i |x_i - y_i|$ (per questo la metrica L^∞ è detta anche metrica del sup).

Esempio 5.1.7 (Spazi l^p). Per $p \in [1, \infty)$ si definisce $l^p \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come $l^p = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \sum |x_i|^p < \infty\}$, su cui si mette la metrica l^p definita da $d(v,w) = \sqrt[p]{\sum_i (|x_i - y_i|)^p}$ (ove $v = (x_i)$ e $w = (y_i)$). Per $p = 1$ la metrica diventa $d_1(v,w) = \sum_i |x_i - y_i|$. Il caso $p = \infty$ si ottiene per passaggio al limite: l^∞ è lo spazio delle successioni limitate e la metrica per $p = \infty$ diventa $d_\infty(v,w) = \sup_i |x_i - y_i|$, cioè la metrica del sup.

Esempio 5.1.8 (Spazi L^p). Dato $X \subseteq \mathbb{R}$, per $p \in [1, \infty)$ si pone $L^p(X) = \{f : \int_X |f(x)|^p < \infty\}/\{f : \int_X |f(x)|^p = 0\}$ con $d(f,g) = \sqrt[p]{\int_X |f(x) - g(x)|^p}$. Per $p = 1$ la metrica diventa $d_1(f,g) = \int_X |f(x) - g(x)|$. Per $p = \infty$ si deve fare un po' di attenzione. Nel caso dello spazio di funzioni continue e limitate per passaggio al limite si ottiene la metrica del sup, quella della convergenza uniforme: $d_\infty(f,g) = \sup_X |f(x) - g(x)|$.

Esercizio 5.1.9. Dimostrare che quelle appena elencate sono effettivamente metriche. (Per la disuguaglianza triangolare delle metriche L^p serve la disuguaglianza di Minkowski. Nel caso $p = 2$ segue dalla disuguaglianza di Schwartz.)

Per il Teorema 1.1.12 ogni metrica induce una topologia: quella generata dalle palle aperte $B(x, \varepsilon)$. Negli spazi metrici in generale si deve fare attenzione all'uso della terminologia delle palle chiuse. Fissiamo la convenzione che

$$D(x,R) = \{y \in X : d(x,y) \leq R\}$$

mentre $\overline{B(x,R)}$ indica la chiusura topologica della palla aperta. Se in $\mathbb{R}^2$ le due cose coincidevano, in generale non è più vero. Per esempio, in $\mathbb{Z}$ con la metrica Euclidea, $B(0,1) = \overline{B(0,1)} = \{0\} \neq D(0,1) = \{-1,0,1\}$ (e $B(0,1/2) = \overline{B(0,1/2)} = \{0\} = D(0,1/2)$).

Definizione 5.1.10. Due metriche d_1, d_2 su un insieme X si dicono topologicamente[1] equivalenti se inducono la stessa topologia. In altre parole se l'identità $(X, d_1) \to (X, d_2)$ è un omeomorfismo.

Esempio 5.1.11. In $\mathbb{R}^2$ tutte le metriche L^p sono equivalenti (Esercizio: dimostrarlo).

[1] In generale, nella teoria degli spazi metrici, due metriche si dicono equivalenti se esistono due costanti $A > B > 0$ tali che $dB < \delta < dA$. Chiaramente due metriche equivalenti sono anche topologicamente equivalenti, ma il viceversa non vale. In questo testo, se non esplicitamente dichiarato altrimenti, useremo semplicemente "metriche equivalenti" per "metriche topologicamente equivalenti".

Esempio 5.1.12. In $\mathbb{R}^2$ la metrica Euclidea e quella dei raggi non sono equivalenti, ad esempio la semiretta $\{x > 0, y = 0\}$ è aperta per la metrica dei raggi ma non per quella Euclidea.

Esempio 5.1.13. Se (X, d) è uno spazio metrico, allora d e $\arctan(d)$ sono metriche equivalenti. In particolare, se si è interessati solo alla topologia di uno spazio, si può sempre suppore che d sia limitata.

Esempio 5.1.14. Se (X, d) è uno spazio metrico, si può fare lo *zoom out/in* (come in *Google Earth*). Formalmente, per ogni $t > 0$ si definisce la metrica td ottenuta moltiplicando d per il fattore t. Chiaramente d e td sono topologicamente equivalenti.

Definizione 5.1.15 (Metrica indotta da una funzione)**.** Dato un insieme Y e uno spazio metrico (X, d), ogni funzione iniettiva $f : Y \to X$ induce una distanza d_f su Y definita da

$$d_f(a, b) = d(f(a), f(b))$$

d_f si chiama distanza indotta da f su Y o distanza pull-back.

Esempio 5.1.16. Se $Y \subseteq X$ e d è una distanza su X, allora la distanza $d|_Y$ non è altro che la metrica indotta su Y dall'inclusione $Y \hookrightarrow X$. D'altra parte, se $f : Y \to X$ è iniettiva, essa identifica (insiemisticamente) Y con un sottoinsieme di X.

Definizione 5.1.17. Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **immersione omotetica** di fattore $t > 0$ se per ogni $a, b \in X$ si ha

$$\delta(f(a), f(b)) = td(a, b).$$

Se $t = 1$ si dice immersione *isometrica*. Un'immersione omotetica suriettiva si dice **omotetia**. Un'immersione isometrica suriettiva si dice **isometria**.

Teorema 5.1.18. *Un'immersione omotetica è continua e iniettiva. Un'omotetia è un omeomorfismo. (In particolare lo sono anche le isometrie).*

DIMOSTRAZIONE. Per l'iniettività, siccome t è non nullo si ha

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 0 = \delta(f(x), f(y)) = td(x, y) \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Inoltre, se $x_i \to x$ allora

$$\delta(f(x_i), f(x)) = td(x_i, x) \to 0$$

quindi $f(x_i) \to f(x)$ e f è continua. Infine, se f è suriettiva allora è biunivoca e f^{-1} è un'omotetia di fattore $1/t$, dunque continua. $\square$

Esempio 5.1.19. Sia $X = [0, 2\pi)$ con la metrica standard e sia $Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ munito della metrica angolare (cioè la distanza tra $z, w \in S^1$ è la misura, in radianti, dell'angolo acuto formato da z e w). Sia $f : X \to Y$ data da $f(x) = e^{ix}$. f è continua e biunivoca ma f^{-1} non è continua. Infatti se $x_n = 2\pi - \frac{1}{n}$ si ha che $z_n = f(x_n) \to 1$ ma $f^{-1}(z_n) = x_n$ non tende a $0 = f^{-1}(1)$. Se invece consideriamo la restrizione di f a $Z = [0, \pi) \subseteq X$, essa risulta un'immersione isometrica di Z in S^1.

Ciò non deve stupire perché $[0, 2\pi)$ con la metrica standard non è omeomorfo a S^1 in quanto il secondo è compatto mentre il primo no.

Esempio 5.1.20. Sia $X = [0, 2\pi)$ con la metrica

$$d(x, y) = \inf\{|x - y|, |x| + |2\pi - y|, |y| + |2\pi - x|\}$$

e sia $Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ munito della metrica angolare. Sia $f : X \to Y$ data da $f(x) = e^{ix}$. f è un'isometria infatti la metrica d è esattamente la metrica pull-back di quella angolare. Con questa metrica, X risulta quindi omeomorfo a S^1, e in particolare compatto. Questa metrica non è quindi equivalente a quella Euclidea su X.

5.2. Proprietà di separazione degli spazi metrici e metrizzabilità

Le principali proprietà di separazione e numerabilità degli spazi metrici viste sin ora sono:

(1) Gli spazi metrici sono T_2 (Esempio 1.6.4). In particolare i punti son chiusi e i limiti sono unici (Teoremi 1.6.12 e 1.6.11).
(2) Ogni spazio metrico è localmente numerabile: Per ogni x, l'insieme $B(x, 1/n)$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile. (Van bene anche i raggi razionali, come nell'Esempio 1.5.4.)
(3) Se A è un sottoinsieme di uno spazio metrico, i punti di aderenza di A sono tutti e soli i limiti di successioni a valori in A. (Teorema 1.5.8.)
(4) Uno spazio metrico è separabile se e solo se è a base numerabile (Teoremi 1.5.13 e 1.5.14).

Vediamo ora una nuova proprietà degli spazi metrici, che si può considerare un raffinamento della proprietà T_2.

Definizione 5.2.1. Uno spazio topologico X si dice **regolare** se per ogni chiuso C e per ogni $x \notin C$ esistono aperti disgiunti contenenti l'uno x e l'altro C. X si dice T_3, o **Hausdorff regolare**, se esso è T_2 e regolare.

Esempio 5.2.2. La banale su $\mathbb{R}$ è regolare ma non T_2: gli unici chiusi sono il vuoto e il tutto; se C è il tutto non esistono punti fuori da C, quindi ogni frase $\forall x \notin C \ldots$ è vera; se C è il vuoto, gli aperti cercati sono il vuoto e il tutto.

Esempio 5.2.3. La topologia dell'Esempio 3.1.23 è T_2 ma non T_3.

Teorema 5.2.4. *Ogni spazio metrico è regolare, ergo T_3.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio metrico, $x \in X$ e $C \subseteq X$ chiuso. Siccome $x \in C^c$ che è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq C^c$. In particolare gli aperti

$$U = B(x, \varepsilon/3) \qquad V = D(x, 2\varepsilon/3)^c = \{y \in X : \ d(x, y) > 2\varepsilon/3\}$$

sono disgiunti, $x \in U$ e $C \subseteq V$. □

Definizione 5.2.5. Una topologia si dice **metrizzabile** se è indotta da una metrica.

Esempio 5.2.6. La topologia discreta su un insieme X è sempre metrizzabile. Infatti basta considerare la metrica 0/1. Per questa metrica i punti sono aperti: $\{x\} = B(0, 1/2)$. Ne segue che per ogni $A \subseteq X$ si ha $A = \cup_{x \in A}\{x\}$ e quindi A è aperto in quanto unione di aperti. Dunque ogni sottoinsieme di X è aperto.

Le proprietà degli spazi metrici sono evidentemente delle condizioni necessarie affinché una topologia sia metrizzabile.

Esempio 5.2.7. Se X ha almeno due elementi, la topologia banale su X non è metrizzabile. Infatti in uno spazio metrico i punti sono chiusi mentre nella banale gli unici chiusi sono il vuoto e il tutto.

Esempio 5.2.8. La topologia cofinita su un insieme X è metrizzabile se e solo se X è finito. Infatti se X è finito la topologia cofinita coincide con quella discreta, che è sempre metrizzabile. Se X è infinito e A, B sono aperti non vuoti si ha

$$\sharp(A \cap B)^c = \sharp(A^c \cup B^c) \leq \sharp A^c + \sharp B^c < \infty$$

e siccome X è infinito ne segue che $A \cap B \neq \emptyset$. In altre parole due aperti non vuoti si intersecano sempre. Ma in uno spazio metrico con almeno due punti si trovano sempre aperti non vuoti e disgiunti poiché i metrici son T_2. (Lo stesso argomento vale per la topologia di Zariski.)

Esempio 5.2.9. lo spazio ottenuto da $\mathbb{R}$ collassando $\mathbb{Z}$ a un punto non è metrizzabile perché non è localmente numerabile (Esempio 2.2.11).

Diamo adesso l'enunciato — ma non la dimostrazione — del più famoso dei teoremi di metrizzazione, che fornisce delle condizioni sufficienti di metrizzabilità.

Teorema 5.2.10 (Teorema di Uryshon)**.** *Ogni spazio T_3 a base numerabile è metrizzabile.*

Teorema 5.2.11. *Uno spazio di Hausdorff compatto è regolare, ergo T_3.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio compatto e T_2. Sia $x \in X$ e C un chiuso di X. $\{x\}$ è compatto e per il Teorema 3.1.19, anche C lo è. Per il Teorema 3.1.22 x e C si separano con aperti. □

Corollario 5.2.12. *Ogni spazio compatto T_2 a base numerabile è metrizzabile.*

Si noti che la metrica dei raggi su $\mathbb{R}^2$ induce una topologia che non è a base numerabile. (Per il Teorema 1.5.15). Quindi il viceversa del Teorema di Uryshon non è vero. Visto però che gli spazi metrici sono separabili se e solo se sono a base numerabile, si può rienunciare il Teorema di Uryshon come segue:

Teorema 5.2.13 (Uryshon)**.** *Uno spazio topologico è metrizzabile e separabile se e solo se è T_3 e a base numerabile.*

Corollario 5.2.14. *Ogni varietà topologica è metrizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. Se X è una varietà topologica allora è T_2 e ha base numerabile per definizione. Vediamo la regolarità. Sia $x \in X$ e sia C un chiuso di X non contenente x. Sia U un intorno di x omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$. Quindi U è metrizzabile. Siccome $x \in U \setminus C$ e C è chiuso, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq U \setminus C$. Gli aperti $B(x, \varepsilon/2)$ e $(D(x, \varepsilon/2))^c$ (ove il complementare è fatto in tutto X) separano x da C. □

Esistono anche dei teoremi che forniscono delle condizioni necessarie e sufficienti per la metrizzabilità *tout court*, senza tener conto della separabilità, ma noi fermiamo qua il nostro excursus in questa direzione.[2]

5.3. Cammini, lunghezze e geodetiche

In questa sezione per *cammino* si intenderà una funzione continua parametrizzata con un intervallo $[a, b]$ che non sia necessariamente $[0, 1]$ (come definito precedentemente in 4.3.1).

Esempio 5.3.1. La funzione $\gamma(x) = e^{ix}$ è un cammino da $[0, 2\pi]$ a $\mathbb{C}$ che descrive una circonferenza.

Esempio 5.3.2. Sia $\rho : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua monotona decrescente con $\rho(0) = 1$ e $\rho(1) = 0$. Sia $\theta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua monotona crescente. Il cammino $\gamma[0, 1] \to \mathbb{C}$ dato da $\gamma(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$ descrive una spirale in $\mathbb{C}$.

Esempio 5.3.3 (curva di Koch). La curva a fiocco di neve di Koch (Figura 1) è definita ricorsiva-

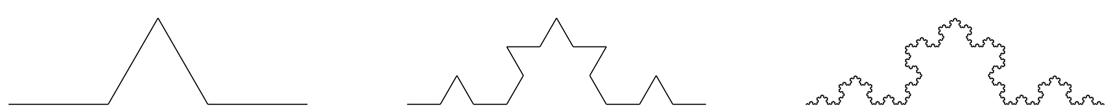


FIGURA 1. La curva di Koch. Per fare un fiocco di neve si fa questa costruzione su ogni lato di un triangolo equilatero.

mente così: Si parte da un segmento orizzontale; ad ogni passo si divide ogni segmento in tre, si cancella il terzo centrale e lo si rimpiazza con gli altri due lati di un triangolo equilatero. Ad ogni passo abbiamo una curva poligonale e quindi continua. La curva di Koch risulta limite uniforme di tali poligonali e quindi è un cammino continuo.

[2] Il lettore incuriosito può cercare i teoremi di metrizzabilità di Bing e di Nagata-Smirnov. Entrambi si basano su una particolare proprietà locale di numerabilità.

Dato un segmento $[a,b]$ una suddivisione finita di $[a,b]$ è una scelta di punti $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_k = b$. In questo modo $[a,b] = \cup_i [x_{i-1}, x_i]$.

Definizione 5.3.4 (Lunghezza di cammini)**.** Sia (X,d) uno spazio metrico. Dato un cammino $\gamma : [a,b] \to X$, la sua **lunghezza** è definita come

$$L(\gamma) = \sup_{a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_k=b} \sum_{i=1}^{k} d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i-1}))$$

ove il sup è calcolato su tutte le possibili suddivisioni di $[a,b]$. La lunghezza di γ, in quanto $\sup$ di quantità positive, è un numero in $[0,\infty]$. Un cammino γ si dice **rettificabile** se $L(\gamma) < \infty$.

Esempio 5.3.5. La curva di Kock non è rettificabile perché se p_n è la poligonale ennesima che approssima la curva di Koch, si ha

$$L(p_{n+1}) = \frac{4}{3} L(p_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n L(p_1) \to \infty.$$

In $\mathbb{R}^2$ le curve differenziabili o poligonali sono tutte rettificabili.

Esempio 5.3.6. Sia $X = [0,1]$ con la metrica $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. Gli unici cammini rettificabili in X sono quelli costanti. (Anche se X è omeomorfo al suo omologo Euclideo, come si dimostrerà nell'Esercizio 5.8.7.)

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma : [a,b] \to X$ un cammino non costante. In particolare esistono $a_0, b_0 \in (a,b)$ tali che $\gamma(a_0) < \gamma(b_0)$. Non è restrittivo supporre $a_0 < b_0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $\gamma(a_0) = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_k^k = \gamma(b_0)$ una suddivisione di $[\gamma(a_0), \gamma(b_0)]$ tale che $|x_i^k - x_{i-1}^k| = |\gamma(b_0) - \gamma(a_0)|/k$ e sia $a_0 < a_1^k < \cdots < a_k^k = b_0$ una suddivisione di $[a_0, b_0]$ tale che $\gamma(a_i^k) = x_i^k$. (Per esempio $a_i^k = \inf\{t > a_{i-i}^k : \gamma(t) = x_i^k\}$.) Si ha

$$L(\gamma) \geq \sum_i d(\gamma(a_i^k), \gamma(a_{i-1}^k)) = \sum_i d(x_i^k, x_{i-1}^k) = k\sqrt{\frac{|\gamma(b_0) - \gamma(a_0)|}{k}} = \sqrt{k}\sqrt{|\gamma(b_0) - \gamma(a_0)|} \to \infty$$

e quindi $L(\gamma) = \infty$. □

Definizione 5.3.7 (Metrica dei cammini)**.** Sia (X,d) uno spazio metrico. La metrica dei cammini indotta da d su X è definita come

$$\delta(x,y) = \inf\{L(\gamma) \text{ al variare di } \gamma : [a,b] \to X : \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$$

ponendo $d(x,y) = \infty$ se non ci sono cammini rettificabili da x a y.

Questa è una di quelle "distanze" che può assumere il valore ∞. A parte questo tutte le altre proprietà di una distanza sono soddisfatte. In particolare (come discusso nella Sezione 0.2) se per ogni $x \in X$ definiamo l'insieme $M_x = \{y \in X : \delta(x,y) < \infty\}$, allora la restrizione di δ ad ogni M_x è una distanza vera e propria. Nell'Esempio 5.3.6 si ha $M_x = \{x\}$ per ogni $x \in [0,1]$. Alternativamente, se si è interessati solo agli aspetti topologici e non metrici, si può usare il Teorema 5.1.5 e riscalare la metrica dei cammini con l'arcotangente: questa volta la metrica avrà valori in $[0, \pi/2]$.

Definizione 5.3.8. Uno spazio metrico (X,d) si dice **geodetico** (o semplicemente che d è geodetica) se

- d coincide con la distanza dei cammini indotta da d (che chiamiamo δ);
- per ogni $x, y \in X$ esiste un cammino $\gamma : [a,b] \to X$ con $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ e $L(\gamma) = \delta(x,y)$.

Esempio 5.3.9. La distanza della città è geodetica.

Esempio 5.3.10. La distanza dei raggi di bicicletta è geodetica.

Esempio 5.3.11. La distanza dei raggi su $\mathbb{R}^2$ è geodetica.

Esempio 5.3.12. S^2 con la distanza angolare è geodetico.

Esempio 5.3.13. S^2 con la distanza indotta da $\mathbb{R}^3$ non è geodetico.

Esempio 5.3.14. La metrica dell'Esempio 5.3.6 non è geodetica.

5.4. Successioni di Cauchy e completezza

Definizione 5.4.1 (Successione di Cauchy)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X si dice di Cauchy se

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 : \ \forall m, n > n_0 \ \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Esempio 5.4.2. La successione $x_n = 1/n$ è di Cauchy perché $x_n - x_m = (m-n)/nm \to 0$.

Esempio 5.4.3. La successione $x_n = (-1)^n$ non è di Cauchy perché $d(x_n, x_{n+1}) = 2 \not\to 0$.

Esempio 5.4.4. La successione $x_n = (1, 1/n)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}^2$ standard, ma non per la metrica dei raggi.

Teorema 5.4.5. *Negli spazi metrici, ogni successione convergente è di Cauchy.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (x_i) una successione convergente a un punto x. Per la disuguaglianza triangolare

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, x_j) \to 0.$$

□

Teorema 5.4.6. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia (x_i) una successione di Cauchy avente una sottosuccessione convergente a un punto $x \in X$. Allora (x_i) converge a x.*

DIMOSTRAZIONE. Se $x_{i_n} \to x$ è una sottosuccessione convergente, dalla disuguaglianza triangolare

$$d(x_i, x) \leq d(x_i, x_{i_n}) + d(x_{i_n}, x).$$

$d(x_i, x_{i_n}) \to 0$ perché la successione è di Cauchy; $d(x_{i_n}, x) \to 0$ perché $x_{i_n} \to x$. □

Definizione 5.4.7. Uno spazio metrico (X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X è convergente.

Esempio 5.4.8. $\mathbb{Q}$ non è completo: una successione di razionali che approssima π è di Cauchy ma non ha limite in $\mathbb{Q}$.

Esempio 5.4.9. $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ standard non è completo: la successione $(\frac{1}{n})$ è di Cauchy ma non converge in $(0, 1)$.

Esempio 5.4.10. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con la metrica standard non è completo.

Teorema 5.4.11 (Completezza di $\mathbb{R}$)**.** *$\mathbb{R}$ con la metrica standard è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(x_n) \subset \mathbb{R}$ una successione di Cauchy. Esiste quindi n_0 tale che per ogni $n, m \geq n_0$ si ha $d(x_m, x_n) < 1$. In particolare $x_n \in [x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1]$ definitivamente. Siccome $[x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1]$ è omeomorfo a $[0, 1]$, esso è compatto (Teorema 3.1.13). Siccome $\mathbb{R}$ ha base numerabile, $[x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1]$ è compatto per successioni (Teorema 3.4.9). Ne segue che (x_n) ha una sottosuccessione convergente a un punto $x_\infty \in [x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1]$. Per il Teorema 5.4.6 l'intera successione (x_n) converge a x_∞. □

Esercizio 5.4.12. Si dimostri la completezza di $\mathbb{R}$ senza usare la compattezza di $[0, 1]$.

Si noti che la completezza è una proprietà metrica e non topologica: $\mathbb{R}$ e $(0, 1)$ sono omeomorfi tra loro, ma uno e completo e l'altro no.

Teorema 5.4.13. *Sia A un sottoinsieme di un uno spazio metrico completo X. Allora A è chiuso se e solo se è completo.*

DIMOSTRAZIONE. A è chiuso se e solo se contiene i limiti delle successioni in A (Teorema 1.5.8). Supponiamo A chiuso e sia (a_i) una successione di Cauchy in A. Ovviamente essa è di Cauchy anche in X. Siccome X è completo, esiste $x \in X$ tale che $a_i \to x$. Siccome A è chiuso, $x \in A$. Dunque ogni successione di Cauchy in A è convergente e quindi A è completo.

Viceversa, supponiamo A completo. Sia $x \in X$ un limite di una successione (a_i) in A. Siccome $a_i \to x$ allora (a_i) è di Cauchy. Siccome A è completo allora la successione (a_i) ha un limite $a \in A$. Per l'unicità del limite $a = x$ e quindi $x \in A$. □

Esempio 5.4.14. L'insieme di Cantor, il tappeto e la guarnizione di Sierpinski, con le metriche standard indotte da $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente, sono completi.

Teorema 5.4.15. *Sia X un insieme e Y uno spazio metrico completo. Allora lo spazio Y^X delle funzioni da X a Y con la metrica del sup*
$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$$
è completo.[3]

DIMOSTRAZIONE. Sia f_n una successione di Cauchy in Y^X. Facciamo vedere che ha un limite. Per ogni $x \in X$ la successione $f_n(x)$ è di Cauchy perché
$$d(f_n(x), f_m(x)) \le \sup_{t\in X} d(f_n(t), f_m(t)) = d_\infty(f_n, f_m).$$
Siccome Y è completo esiste un punto $f_\infty(x)$ tale che $f_n(x) \to f_\infty(x)$. Chiaramente f_∞ è una funzione da X a Y. Inoltre per ogni $x \in X$ e per ogni $m, n \in \mathbb{N}$
$$d(f_n(x), f_\infty(x)) \le d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_\infty(x)) \le d_\infty(f_n, f_m) + d(f_m(x), f_\infty(x))$$
e considerando il limite per $m \to \infty$ si ottiene che per ogni $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$d(f_n(x), f_\infty(x)) \le \lim_{m\to\infty} d_\infty(f_n, f_m)$$
per cui
$$d_\infty(f_n, f_\infty) = \sup_{x\in X} d(f_n(x), f_\infty(x)) \le \lim_{m\to\infty} d_\infty(f_n, f_m)$$
che tende a zero se $n \to \infty$ perché la successione f_n è di Cauchy. Quindi $f_n \to f_\infty$ in (Y^X, d_∞). □

Concludiamo questa sezione con un classico della teoria degli spazi metrici.

Definizione 5.4.16. Una funzione tra spazi metrici $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ si dice **contrazione** se esiste $0 < c < 1$ tale che $d(f(x), f(y)) \le cd(x, y)$. (Quindi f contrae le distanze.)

Le contrazioni sono continue infatti se $x_i \to x$ allora $d(f(x_i), f(x)) \le cd(x_i, x) \to 0$.

Teorema 5.4.17 (Delle contrazioni)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo (non vuoto) e sia $f : X \to X$ una contrazione. Allora f ha un punto fisso. Inoltre, esso è l'unico punto fisso di f.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_0 \in X$ un punto qualsiasi e sia $x_n = f^n(x_0)$.
$$\begin{aligned} d(x_0, f^m(x_0)) &\le d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f^2(x_0)) + \cdots + d(f^{m-1}(x_0), f^m(x_0)) \\ &\le d(x_0, f(x_0))(\sum_i c^i) \le d(x_0, f(x_0))\frac{1}{1-c}. \end{aligned}$$

[3] A voler essere precisi, in generale la metrica del sup su Y^X è una di quelle che ha valori in $[0, \infty]$. Ma se (f_n) è una successione di Cauchy, esiste n_0 tale che per ogni $n \ge n_0$ si ha $d(f_n, f_{n_0}) < \infty$. Nel nostro caso possiamo quindi supporre che d_∞ assuma solo valori finiti.

Siccome $c < 1$, allora $c^n \to 0$ e visto che $d(x_0, f^m(x_0))$ è limitato indipendentemente da m, si ha

$$d(x_n, x_{n+m}) = d(f(x_{n-1}), f(x_{n-1+m})) \leq cd(x_{n-1}, x_{n-1-m}) \leq \cdots \leq c^n d(x_0, f^m(x_0)) \to 0.$$

Quindi la successione (x_n) è di Cauchy. Siccome X è completo, esiste $z \in X$ tale che $f^n(x_0) \to z$. Siccome le contrazioni sono continue $f(z) = \lim f(f^n(x_0)) = \lim f^n(x_0) = z$ e quindi z è un punto fisso di f. Se w è un altro punto fisso si ha

$$d(z, w) = d(f(z), f(w)) < cd(z, w)$$

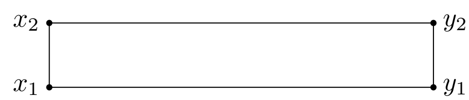
siccome $c < 1$ ciò implica $d(z, w) = 0$, ergo $z = w$. □

5.5. Completamento metrico

In pratica l'unico modo per avere spazi non completi è partire da uno spazio completo e togliere roba. Altrimenti detto, ogni spazio metrico si può completare. Il bello è che il completamento metrico è unico (a meno di isometrie).

Lemma 5.5.1 (Lemma del rettangolo)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ allora*

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$



DIMOSTRAZIONE. Per la disugualianza triangolare

$$d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) + d(y_2, y_1) \quad \text{da cui} \quad d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2) \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

$$d(x_2, y_2) \leq d(x_2, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) \quad \text{da cui} \quad d(x_2, y_2) - d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

dunque

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2).$$

□

Corollario 5.5.2. *Siano (x_i) e (y_i) due successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Allora esiste il limite*

$$\lim_i d(x_i, y_i).$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome sono entrambe successioni di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $m, n > n_\varepsilon$ si ha

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \qquad d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$$

Per il Lemma 5.5.1 del rettangolo

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq \varepsilon$$

Quindi la successione $d_n = d(x_n, y_n)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi converge. □

Teorema 5.5.3 (del completamento metrico)**.** *Per ogni spazio metrico (X, d) esiste uno spazio metrico completo (Y, δ) tale che:*

(1) *Esiste un'immersione isometrica $f : X \to Y$;*
(2) *l'immagine di f è densa in Y.*

Inoltre, ogni spazio metrico completo con le due proprietà elencate è isometrico a (Y, δ).

DIMOSTRAZIONE. L'idea della dimostrazione è molto semplice: Y è lo spazio di tutte le successioni di Cauchy di X, dotato della metrica ovvia. I dettagli però, richiedono molto lavoro e notazioni un po' pesanti.

Sia S l'insieme di tutte le successioni di Cauchy di X. Su $S \times S$ definiamo la seguente funzione

$$D((x_i),(y_i)) = \lim_i d(x_i, y_i)$$

(che è ben definita per il Corollario 5.5.2.) La funzione D gode delle seguenti proprietà:

- $D \geq 0$;
- $D((x_i),(y_i)) = D((y_i),(x_i))$;
- $D((x_i),(y_i)) \leq D((x_i),(z_i)) + D((z_i),(y_i))$ (perché la disuguaglianza $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$ è vera per ogni n e passa al limite.)

Quindi D è una pseudo distanza (manca la separazione dei punti e infatti, data una qualunque successione (x_i), basta cambiargli il primo termine ed otteniamo una successione diversa ma a distanza nulla da essa). Per ottenere una distanza si usa un procedimento standard in questi casi: Su S si definisce la relazione di equivalenza $(x_i) \sim (y_i)$ se $D((x_i),(y_i)) = 0$. Si vede facilmente, attraverso la disuguaglianza triangolare, che D induce una funzione, che chiameremo sempre D, sulle classi di equivalenza.

Esercizio 5.5.4. Dimostrare che se $(x_i) \sim (x'_i)$ e $(y_i) \sim (y'_i)$ allora $D((x_i),(y_i)) = D((x'_i),(y'_i))$.

Definiamo $Y = S/\sim$. A questo punto (Y, D) è uno spazio metrico.

Lemma 5.5.5. *(Y, D) è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (S_i) una successione di Cauchy in Y. Poniamo $S_i = [(x_n^i)]$.

$$\begin{array}{lcccccc}
S_1 : & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \dots & x_n^1 & \dots \\
S_2 : & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 & \dots \\
 & & & \vdots & & & \\
S_k : & x_1^k & x_2^k & x_3^k & \dots & x_n^k & \dots
\end{array}$$

Siccome (S_i) è di Cauchy in Y, si ha:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n : \ \forall i, j > n \ \ D(S_i, S_j) < \varepsilon$. Sia $n(\varepsilon)$ il più piccolo di tali n. Si noti che $\varepsilon' > \varepsilon \Rightarrow n(\varepsilon') \leq n(\varepsilon)$.

Siccome ogni (x_n^i) è di Cauchy in X, si ha:

- $\forall \varepsilon > 0 \forall i \exists l(i, \varepsilon) : \ \forall m, n > l(i, \varepsilon) \ \ d(x_n^i, x_m^i) < \varepsilon$.

Inoltre, dalla definizione di $D(S_i, S_j)$ segue che per ogni i, j e per ogni $\varepsilon > 0$, $|d(x_n^i, x_n^j) - D(S_i, S_j)| < \varepsilon$ per n sufficientemente grande, e possiamo richiedere che n sia "sufficientemente grande" per i primi k casi considerati tutti insieme; in formule:

- $\forall \varepsilon > 0 \forall k \exists m(k, \varepsilon) : \ \forall i, j \leq k, \ \forall m > m(k, \varepsilon) \ \ |d(x_m^i, x_m^j) - D(S_i, S_j)| < \varepsilon$.

Adesso usiamo un argomento diagonale. Scegliamo una successione $\varepsilon_i \to 0$ per esempio $\varepsilon_i = 1/2^i$. E scegliamo n_i in modo che:

- $n_{i+1} > n_i$
- $n_i > l(i, \varepsilon_i)$
- $n_i > m(i, \varepsilon_i)$
- $n_i > i$.

Definiamo la successione (y_j) ponendo

$$y_j = x_{n_j}^j.$$

Dobbiamo far vedere che (y_j) è di Cauchy in X e che $S_i \to [(y_j)]$ in Y. Vediamo che (y_j) è di Cauchy. Per ogni $\varepsilon > 0$ se i, j sono sufficientemente grandi si ha $\varepsilon - \varepsilon_i - \varepsilon_j > 0$ e $i, j > n(\varepsilon - \varepsilon_i - \varepsilon_j)$. Quindi, per $j > i$ sufficientemente grandi si ha:

$$\begin{aligned}
&d(y_i, y_j) = d(x^i_{n_i}, x^j_{n_j}) \leq d(x^i_{n_i}, x^i_{n_j}) + d(x^i_{n_j}, x^j_{n_j}) && \text{per la disuguaglianza triangolare}\\
&d(x^i_{n_i}, x^i_{n_j}) \leq \varepsilon_i && \text{perché } n_j > n_i > l(i, \varepsilon_i)\\
&d(x^i_{n_j}, x^j_{n_j}) \leq D(S_i, S_j) + \varepsilon_j && \text{perché } n_j > m(j, \varepsilon_j)\\
&\text{quindi } d(y_i, y_j) \leq \varepsilon_i + D(S_i, S_j) + \varepsilon_j \text{ e dunque}\\
&d(y_i, y_j) \leq \varepsilon_i + D(S_i, S_j) + \varepsilon_j < \varepsilon && \text{perché } i, j > n(\varepsilon - \varepsilon_i - \varepsilon_j)
\end{aligned}$$

Quindi (y_j) è di Cauchy in X. Vediamo adesso che $S_i \to [(y_j)]$ in Y. Per definizione

$$D(S_i, [(y_j)]) = \lim_{j\to\infty} d(x^i_j, y_j) = \lim_{j\to\infty} d(x^i_j, x^j_{n_j})$$

$$d(x^i_j, x^j_{n_j}) \leq d(x^i_j, x^i_{n_j}) + d(x^i_{n_j}, x^j_{n_j})$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni i si ha che $j > l(i, \varepsilon)$ definitivamente e quindi (siccome $n_j > j$)

$$d(x^i_j, x^i_{n_j}) < \varepsilon.$$

Definitivamente $j > i$ e siccome $n_j > m(j, \varepsilon_j)$ si ha

$$d(x^i_{n_j}, x^j_{n_j}) < D(S_i, S_j) + \varepsilon_j$$

Se $i > n(\varepsilon)$, siccome definitivamente $j > i$ si ha $D(S_i, S_j) < \varepsilon$ e dunque per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
D(S_i, [(y_j)]) &\leq \lim_j (d(x^i_j, x^i_{n_j}) + d(x^i_{n_j}, x^j_{n_j})) \leq \lim_j d(x^i_j, x^i_{n_j}) + \lim_j d(x^i_{n_j}, x^j_{n_j})\\
&\leq \varepsilon + \lim_j (\varepsilon + \varepsilon_j) = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Quindi $D(S_i, [(y_j)]) \to 0$, cioè $S_i \to [(y_j)]$. □

La parte difficile è finita. Adesso che sappiamo che Y è completo vediamo l'immersione isometrica di $f : X \to Y$. Basta porre $f(x) = \hat{x}$ ove $\hat{x}$ è la classe della successione costante $x, x, x, x, \ldots$

Chiaramente $D(\hat{x}, \hat{y}) = d(x, y)$ e quindi f è un'immersione isometrica. Mostriamo ora che l'immagine di f è densa. Se $S = [(x_i)] \in Y$, siccome (x_i) è di Cauchy, $D(\hat{x}_j, (x_i)) = \lim_{i\to\infty} d(x_j, x_i)$, che va a 0 per $j \to \infty$. Quindi

$$f(x_i) = \hat{x}_i \to S.$$

Infine sia (Z, h) uno spazio metrico completo tale che esista $g : X \to Z$ immersione isometrica con immagine densa. Allora per ogni successione (x_i) di Cauchy in X, $(g(x_i))$ è una successione di Cauchy in Z. Poniamo

$$F : Y \to Z \qquad F([(x_i)]) = \lim g(x_i)$$

Adesso è facile verificare che:

Esercizio 5.5.6. Dimostrare che F è ben definita sulle classi di equivalenza, cioè che se $(x_i) \sim (x'_i)$ allora $\lim g(x_i) = \lim g(x'_i)$. (Si usa che g è immersione isometrica.)

Esercizio 5.5.7. Dimostrare che F è un'immersione isometrica. (Si usa la definizione di D e il fatto che g sia isometrica.)

Esercizio 5.5.8. Dimostrare che F è suriettiva. (Si usa il fatto che g abbia immagine densa e che le successioni convergenti sono di Cauchy.)

Questi tre esercizi concludono in quanto le immersioni isometriche suriettive sono isometrie.

□

Teorema 5.5.9. *Sia (X,d) uno spazio metrico completo. Sia $A \subseteq X$. Allora il completamento metrico di A è la sua chiusura in X.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 5.4.13 $\bar{A}$ è completo e A è denso in $\bar{A}$. □

L'inclusione è un caso particolare di immersione isometrica.

Corollario 5.5.10. *Sia A uno spazio metrico, sia X uno spazio metrico completo e sia $f : A \to X$ un'immersione isometrica. Allora il completamento metrico di A è la chiusura dell'immagine di f.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome f è un'immersione isometrica, A è isometrico a $f(A)$, il cui completamento metrico è $\overline{f(A)}$ per il Teorema 5.5.9. □

Esempio 5.5.11. Sia $X = \mathbb{R}$ con la metrica $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Il completamento metrico di X è $[-\pi/2, \pi/2]$ in quanto $\arctan : X \to \mathbb{R}$ è un'immersione isometrica con immagine $(-\pi/2, \pi/2)$.

Esempio 5.5.12. Sia $X = \mathbb{R}$ con la metrica $d(x,y) = |(e^{i \arctan x})^2 - (e^{i \arctan y})^2|$. Il completamento metrico di X è $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ in quanto $f(x) = e^{2i \arctan x}$ è un'immersione isometrica da X in $\mathbb{C}$ la cui immagine è $S^1 \setminus \{-1\}$. La chiusura dell'immagine di f è dunque S^1.

5.6. Compattezza in spazi metrici

Il Corollario 3.1.28 fornisce la familiare caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}^n$ Euclideo come chiusi e limitati. La cosa si generalizza agli spazi metrici rimpiazzando la limitatezza con una condizione leggermente più forte. Inoltre vedremo che negli spazi metrici la nozione di compattezza e quella di compattezza per successioni coincidono.

Lemma 5.6.1. *(X,d) compatto $\Rightarrow$ (X,d) compatto per successioni $\Rightarrow$ (X,d) completo.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome gli spazi metrici sono localmente numerabili, per il Corollario 3.4.8, se X è compatto allora è compatto per successioni. Se X è compatto per successioni, ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente e per il Teorema 5.4.6, essa è globalmente convergente. Quindi X è completo. □

Definizione 5.6.2. Sia X uno spazio metrico e $A \subseteq X$. A si dice **limitato** se esistono $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq B(x,r)$.

In particolare, uno spazio metrico X è limitato se $X = B(x,r)$ per un certo $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}$. Il vuoto si considera limitato.

Esempio 5.6.3. $X = [0,1] \times [0,1]$ con la metrica Euclidea è limitato.

Teorema 5.6.4. *Sia A un sottoinsieme compatto di uno spazio metrico. Allora A è chiuso e limitato.*

DIMOSTRAZIONE. A è chiuso per il Teorema 3.1.20 perché i metrici son T_2. Se A è vuoto è limitato. Altrimenti, sia $a \in A$ e sia $\mathcal{U} = \{B(a,n) : n \in \mathbb{N}\}$. Siccome A è compatto, $\mathcal{U}$ ha un sottoricoprimento finito, in particolare A è contenuto in una palla centrata in a, ergo limitato. □

Occhio ché i chiusi e limitati non son sempre compatti!

Esempio 5.6.5. In $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi, sia $X = \overline{B(0,1)}$. Esso è chiuso, limitato ma non compatto.

DIMOSTRAZIONE. Sia $S = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : d(0,x) = 1\}$ e sia $\mathcal{U} = \{B(x,1)\}_{x \in S}$. Chiaramente $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X. Inoltre ogni elemento di S è contenuto in uno e un solo elemento di $\mathcal{U}$. Siccome $S \subset X$ è infinito, nessuna sottofamiglia finita di $\mathcal{U}$ può ricoprire X. □

Definizione 5.6.6. Uno spazio metrico si dice **totalmente limitato** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di palle aperte di raggio al più ε.

Esempio 5.6.7. Ogni limitato di $\mathbb{R}^n$ standard è totalmente limitato.

Esempio 5.6.8. L'insieme X dell'Esempio 5.6.5 non è totalmente limitato.

Lemma 5.6.9. *(X, d) compatto per successioni $\Rightarrow$ (X, d) totalmente limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Se X non è totalmente limitato, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che non esistono ricoprimenti finiti con palle di raggio al più ε. Si può quindi costruire una successione x_n tale che x_n stia nel complementare di $\cup_{i<n} B(x_i, \varepsilon)$. In particolare $d(x_n, x_m) > \varepsilon$ per ogni $n > m$ e quindi x_n non possiede sottosuccessioni convergenti. Quindi X non è compatto per successioni. □

Lemma 5.6.10. *Ogni spazio metrico totalmente limitato è limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio metrico totalmente limitato. In particolare esiste $n \in N$ e $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $X = \cup B(x_i, 1)$. Per la disuguaglianza triangolare $X = B(x_1, 2n)$. □

Lemma 5.6.11. *(X, d) totalmente limitato $\Rightarrow$ (X, d) separabile (e quindi a base numerabile).*

DIMOSTRAZIONE. Siccome X è totalmente limitato, per ogni n esiste un ricoprimento fatto di palle di raggio al più $1/n$; sia C_n l'insieme, finito, dei centri di tali palle. Sia $C = \cup_n C_n$. C è un insieme numerabile, vediamo che è denso in X. Sia $x \in X$. Siccome le palle di raggio $1/n$ centrate nei punti di C_n ricoprono X, per ogni n esiste $c_n \in C_n$ tale che $d(c_n, x) < 1/n$. Quindi $c_n \to x$. (La parte dell'enunciato tra parentesi segue dal Teorema 1.5.14.) □

Esempio 5.6.12. Sia $X = \mathbb{Z}$ con la metrica $0/1$. Esso è tautologicamente limitato e separabile. Inoltre le uniche successioni di Cauchy sono quelle definitivamente costanti, in particolare sono convergenti e quindi X è completo. X non è però totalmente limitato perché ogni $x \in X$ è contenuto in una sola palla di raggio $1/2$ e siccome X è infinito, non può essere ricoperto da un numero finito di tali palle.

Lemma 5.6.13. *Sia (X, d) uno spazio metrico totalmente limitato. Allora ogni successione in X ha una sottosuccessione di Cauchy.*

DIMOSTRAZIONE. Sia x_n una successione in X. Siccome X è totalmente limitato esiste un ricoprimento finito di X fatto di palle di raggio al più $1/2$. Per il principio dei cassetti c'è una sottosuccessione di $\{x_n\}$ che sta tutta dentro una di queste palle, che chiamiamo B_1. Sia $I_1 \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli indici i tali che $x_i \in B_1$.

Definiamo B_k e $I_k \subseteq I_{k-1}$ induttivamente. Siccome X è totalmente limitato, per ogni k esiste un ricoprimento finito di X fatto di palle di raggio al più $1/2^k$. Per il principio dei cassetti esiste una palla B_k di raggio al più $1/2^k$ e un sottoinsieme infinito $I_k \subseteq I_{k-1}$ tale che $x_i \in B_k$ per ogni $i \in I_k$.

Sia ora i_1 il primo elemento di I_1 e definiamo ricorsivamente i_k come il primo elemento di I_k maggiore di i_{k-1}. La sottosuccessione $\{x_{i_k}\}$ è di Cauchy perché $x_{i_s} \in B_k$ per ogni $s \geq k$ e il raggio di B_k tende a zero. □

Teorema 5.6.14. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora*

$$X \text{ è compatto } \Leftrightarrow X \text{ è compatto per successioni } \Leftrightarrow X \text{ è completo e totalmente limitato.}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio metrico compatto. Per il Lemma 5.6.1 X è compatto per successioni e completo. Per il Lemma 5.6.9 X è totalmente limitato.

Viceversa, se X è completo e totalmente limitato, dal Lemma 5.6.13 segue che ogni successione in X ha una sottosuccessione convergente, per cui X è compatto per successioni. Siccome X è totalmente limitato, per il Lemma 5.6.11 esso è separabile e per il Teorema 3.4.9 è compatto. □

Corollario 5.6.15. *Sia A un sottoinsieme di uno spazio metrico completo X. Allora A è compatto se e solo se è chiuso e totalmente limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 5.4.13 A è chiuso se e solo se è completo. Il Teorema 5.6.14 conclude. □

5.7. Teorema di Ascoli-Arzelà

Una conseguenza famosa del Teorema 5.6.14 è il celebre teorema di Ascoli-Arzelà, che si può enunciare brevemente dicendo che ogni successione di funzioni equicontinue ed equilimitate ammette una sottosuccessione convergente. (Si veda più sotto per un enunciato preciso.)

Definizione 5.7.1. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice **relativamente compatto** se la sua chiusura in X è compatta.

Esempio 5.7.2. Per il Teorema 3.1.19 ogni sottoinsieme di uno spazio compatto è relativamente compatto.

Definizione 5.7.3 (ε-net)**.** Un ε-reticolo (o ε-net) in uno spazio metrico X è un sottoinsieme $Y \subseteq X$ tale che

$$\forall x \in X \exists y \in Y :\ d(x,y) < \varepsilon.$$

In altre parole, Y è un ε-reticolo se la famiglia $\{B(y,\varepsilon)\}_{y\in Y}$ è un ricoprimento di X.

Con questa terminologia, uno spazio metrico è totalmente limitato se per ogni $\varepsilon > 0$, esso contiene un ε-reticolo finito.

Lemma 5.7.4. *Sia $A \subseteq (X,d)$ un sottoinsieme totalmente limitato. Allora $\overline{A}$ è totalmente limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $x \in \overline{A}$ esiste $a \in A$ tale che $d(x,a) < \varepsilon/2$. Per ipotesi A contiene un $\varepsilon/2$-reticolo finito $\{a_1,\dots,a_n\}$. Esiste quindi a_i tale che $d(a,a_i) < \varepsilon/2$. Per la disuguaglianza triangolare $d(x,a_i) < \varepsilon$. Dunque $\{a_1,\dots,a_n\}$ è un ε-reticolo finito in $\overline{A}$. □

Definizione 5.7.5. Il **diametro** di un sottoinsieme A di uno spazio metrico è l'esetremo superiore delle distanze tra punti di A

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) :\ x,y \in A\}.$$

Teorema 5.7.6 (Ascoli-Arzelà)**.** *Siano X uno spazio compatto e Y uno spazio metrico. Sia F una famiglia di funzioni da X a Y equicontinue ed equilimitate, e cioè tali che:*

- *Equilimitatezza: esiste un totalmente limitato $A \subseteq Y$ tale che $f(X) \subseteq A$ per ogni $f \in F$;*
- *Equicontinutità: per ogni $\varepsilon > 0$ per ogni $x \in X$ esiste un intorno U_x di x tale che per ogni $f \in F$ il diametro di $f(U_x)$ sia minore di ε.*

Allora F è un insieme totalmente limitato rispetto alla metrica del sup di Y^X. In particolare, se Y è completo allora F è relativamente compatto.

DIMOSTRAZIONE. L'ultima affermazione deriva dal Lemma 5.7.4 e dal Corollario 5.6.15 perché se Y è completo, allora Y^X è completo (Teorema 5.4.15.)

Mostriamo ora che per ogni $\varepsilon > 0$ lo spazio F ha un 4ε-reticolo finito. Vista l'arbitrarietà di ε, ciò sarà sufficiente. Sia $\{y_i\}_{i\in I}$ un ε-reticolo finito in A. Per equicontinuità, ogni x in X ha un intorno U_x tale che $f(U_x)$ ha diametro al più ε. Il ricoprimento aperto $\{U_x\}$ ha un sotto ricoprimento finito $U_{x_1},\dots,U_{x_n}$. Sia Σ l'insieme delle funzioni da $\{1,\dots,n\}$ a I. Esso è chiaramente un insieme finito. Ad ogni funzione f da X in A possiamo associare una (non unica in generale) $\sigma(f) \in \Sigma$ tale che

$$d(f(x_i), y_{\sigma(f)(i)}) < \varepsilon$$

per ogni $i = 1,\dots,n$.

Per ogni funzione $\sigma \in \Sigma$ scegliamo, se esiste, una funzione $f_\sigma \in F$ tale che $\sigma(f_\sigma) = \sigma$.

L'insieme

$$\{f_\sigma :\ \sigma \in \Sigma\}$$

è un 4ε-reticolo finito in F, con la metrica del sup di Y^X. Infatti se $g \in F$, per ogni $i = 1,\dots,n$ si ha:

$$d(g(x_i), f_{\sigma(g)}(x_i)) \le d(g(x_i), y_{\sigma(g)(i)}) + d(y_{\sigma(g)(i)}, f_{\sigma(g)}(x_i)) < 2\varepsilon$$

e quindi se $x \in U_{x_i}$

$$d(g(x), f_{\sigma(g)}(x)) \leq d(g(x), g(x_i)) + d(g(x_i), f_{\sigma(g)}(x_i)) + d(f_{\sigma(g)}(x_i), f_{\sigma(g)}(x)) < \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

quindi

$$d_\infty(g, f_{\sigma(g)}) = \sup_{x \in X} d(g(x), f_{\sigma(g)}(x)) < 4\varepsilon.$$

□

OSSERVAZIONE 5.7.7. Si noti che se Y è completo allora $\overline{A}$ è compatto. L'insieme $\overline{A}^X$ delle funzioni da X ad $\overline{A}$ è dunque compatto per il teorema di Tychonoff. A prima vista potrebbe sembrare quindi che il Teorema di Ascoli-Arzelà sia una banale conseguenza del teorema di Tychonoff. Ma un prodotto infinito di compatti fornisce il classico esempio di compatto che non è compatto per successioni (Esempio 3.4.2). In particolare la metrica della convergenza uniforme su Y^X non induce la topologia prodotto (che è quella della convergenza puntuale). Il teorema di Ascoli-Arzelà ci dice che la famiglia $\overline{F}$ è compatta in Y^X rispetto alla metrica del sup (ergo compatta per successioni).

OSSERVAZIONE 5.7.8. Spesso l'equicontinuità si riduce a una stima uniforme (quasi ovunque) sulle derivate prime.

Esempio 5.7.9. Il tappeto di Sierpinski è connesso per archi.

DIMOSTRAZIONE. Stiamo lavorando in $\mathbb{R}^2$ Euclideo, che è completo. Sia S il tappeto di Sierpinski e sia S_n l'approssimazione n-esima. Cioè S_0 è un quadrato di lato 1, per formare S_1 si è tolto l'interno del quadratino centrale di lato $1/3$ e così via (si veda la figura dell'Esempio 1.1.17).

In particolare, $S = \cap S_n$. Dati $x, y \in S$, utilizzando solo segmenti orizzontali e verticali, si costruisce facilmente un arco α_n in S_n che unisce x a y e di lunghezza totale al massimo 2. Parametrizziamo α_n con $[0,1]$ a velocità costante. Le funzioni $\alpha_n : [0,1] \to S \subseteq S_0$ sono quindi equicontinue. Esse sono anche equilimitate perché S_0 è compatto. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà la chiusura $\overline{F}$ dell'insieme $F = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ è compatto. Siccome F è numerabile, $\overline{F}$ è separabile. Per il Teorema 3.4.9, $\overline{F}$ è compatto per successioni. Esiste quindi una sottosuccessione di α_n che converge, per la metrica del sup — che è quella della convergenza uniforme —, a una funzione $\alpha : [0,1] \to S_0$. Per continuità α è un arco continuo da x a y tale che $\alpha(t) \in S_n$ per ogni n, ergo $\alpha(t) \in S$. □

Lo stesso ragionamento funziona anche per mostrare la locale connessione per archi e vale anche per la guarnizione di Sierpinski.

5.8. Esercizi

Esercizio 5.8.1. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$, la palla chiusa $D(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ è un chiuso.

Esercizio 5.8.2. Dare un esempio di spazio metrico non discreto in cui esistono palle aperte $B(x, r)$ la cui chiusura non coincide col disco $D(x, r)$.

Esercizio 5.8.3. Dare un esempio di spazio metrico non discreto X tale che esista $x \in X$ e $r > 0$ per cui $\overline{B(x,r)} = B(x, r) \neq D(x, r)$.

Esercizio 5.8.4. Dare un esempio di spazio metrico non discreto X tale che esista $x \in X$ e $r > 0$ per cui $\overline{B(x,r)} \neq B(x, r) \neq D(x, r)$.

Esercizio 5.8.5. Dare un esempio di spazio metrico non discreto X tale che esista $x \in X$ e $r > 0$ per cui $\overline{B(x,r)} = B(x, r) = D(x, r)$.

Esercizio 5.8.6. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $x \in X$. Dimostrare che la funzione $f(y) = d(x, y)$ è continua.

Esercizio 5.8.7. Sia $X = [0,1]$ e sia $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. Verificare che d è una distanza. Verificare che induce la stessa topologia della metrica Euclidea.

Esercizio 5.8.8. Sia $\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ la distanza $0/1$ su $\mathbb{R}$ (dimostrare che δ è una distanza) e sia

$$d((x,y),(a,b)) = |y-b| + \delta(x,a).$$

Dimostrare che d è una distanza su $\mathbb{R}^2$. Descrivere le palle aperte di centro $(0,0)$ e raggi $1/2, 1, 2$ e la palla chiusa di centro $(0,0)$ e raggio 1. Dimostrare che d non è equivalente alla topologia Euclidea. Qual è la topologia indotta da d?

Esercizio 5.8.9. Dimostrare che la topologia dell'ordine lessicografico di $\mathbb{R}^2$ è metrizzabile.

Esercizio 5.8.10. Dimostrare che per $1 \leq p, q < \infty$ gli spazi l^p sono tutti omeomorfi tra loro. (Usare la corrispondenza $(x_i) \to (x_i^{\frac{p}{q}})$; serviranno un po' di disuguaglianze tipo convessità e di Holder.)

Esercizio 5.8.11. Trovare funzioni $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ e $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che la spirale $f(x)e^{i\theta(x)}$ abbia lunghezza finita. Trovare funzioni f e θ tali che la spirale $fe^{i\theta}$ abbia lunghezza infinita.

Esercizio 5.8.12. Dimostrare che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione disgiunta di intervalli aperti.

Esercizio 5.8.13. Esibire un aperto di $\mathbb{R}^2$ che non sia unione disgiunta di palle aperte.

Esercizio 5.8.14. Si dica se la successione $x_n = e^{in}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$. E la successione $y_n = e^{in}/n$?

Esercizio 5.8.15. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia (x_n) una successione di Cauchy. Si dimostri che $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$.

Esercizio 5.8.16. Si dia un esempio di uno spazio metrico (X,d) che contiene una successione (x_n) che non sia di Cauchy ma tale che $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$.

Esercizio 5.8.17. Siano K, C sottoinsiemi disgiunti di uno spazio metrico (X,d), tali che K sia compatto e C chiuso. Dimostrare che la distanza tra K e C, definita come $\inf_{k \in K, c \in C} d(k,c)$, è strettamente positiva.

Esercizio 5.8.18. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi è completo.

Esercizio 5.8.19. Trovare i completamenti metrici di $\mathbb{R}$ con le metriche degli Esempi 5.5.11 e 5.5.12, senza usare i teoremi sui sottoinsiemi di spazi completi, ma usando direttamente la costruzione delle successioni di Cauchy.

Esercizio 5.8.20. Sia (X,d) uno spazio metrico compatto e sia δ la metrica dei cammini su X. Dimostrare che per ogni $x, y \in X$ tali che $\delta(x,y) < \infty$ esiste un cammino γ da x a y la cui lunghezza realizza δ.

Esercizio 5.8.21. Dimostrare che uno spazio metrico compatto è separabile, senza usare la compattezza per successioni.

Esercizio 5.8.22. Dimostrare che uno spazio metrico compatto è a base numerabile.

Esercizio 5.8.23. Dimostrare che uno spazio compatto T_2 è metrizzabile se e solo se è a base numerabile.

Esercizio 5.8.24. Sia $X = \{a,b,c,d\}$. Si dimostri che $\tau = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{c,d\}\}$ è regolare non T_2.

Esercizio 5.8.25. Sia X un insieme con almeno due punti. Sia τ la topologia banale e σ quella discreta. Si dimostri che $\tau \times \sigma$ è regolare ma non T_2.

Esercizio 5.8.26. Si dimostri che $\mathbb{Z}$ con la topologia delle successioni aritmetiche (Esempio 1.2.5) è metrizzabile. (Suggerimento: si usi il Teorema di Uryshon 5.2.10.)

Esercizio 5.8.27. Si dia un esempio di spazio topologico X non metrizzabile ma tale che ogni sottoinsieme $A \subset X$, con $A \neq X$, sia metrizzabile.

Esercizio 5.8.28. Si dia un esempio di spazio T_2 non metrizzabile, ma con un denso metrizzabile.

Esercizio 5.8.29. Sia X uno spazio T_3 e sia $A \subseteq X$ un chiuso. Dimostrare che X/A è T_2.

Esercizio 5.8.30. Sia X uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un chiuso. Dimostrare che X/A è T_2.

Esercizio 5.8.31. Sia X uno spazio metrico. Dimostrare che se ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ è limitata, allora X è compatto.

Esercizio 5.8.32. Si dia un esempio di uno spazio X con due metriche d, δ che inducono la stessa topologia, ma tali che d sia completa e δ no.

Esercizio 5.8.33. Dimostrare che il prodotto numerabile di spazi metrici è metrizzabile.

Esercizio 5.8.34. Dimostrare che uno spazio metrico non separabile non è compatto per successioni.

Esercizio 5.8.35. Si dimostri che ω_1 non è metrizzabile.

Esercizio 5.8.36. Sia $\mathbb{R}$ con la topologia discreta e sia X la sua compattificazione di Alexandroff. Dimostrare che X è compatto, T_2, ma non metrizzabile.

Esercizio 5.8.37. Si dimostri che lo spazio descritto nell'Esempio 3.4.4 non è metrizzabile.

CAPITOLO 6

Topologia dal vivo

6.1. Riconoscere spazi diversi attraverso la connessione

Riconoscere quando due spazi non sono omeomorfi è una cosa difficile. Vediamo come la connessione ci può togliere le castagne dal fuoco in alcuni casi. Chiaramente due spazi, uno connesso e l'altro no, non sono omeomorfi. Così come non sono omeomorfi spazi con un numero diverso di componenti connesse. Questo ragionamento si può localizzare e si può guardare al numero delle componenti connesse (per archi) di $U \setminus \{x\}$ al variare del punto x e dell'intorno U di x.

Esempio 6.1.1. In $\mathbb{R}^2$ sia X un simbolo "ics" e sia Y un simbolo "ipsilon" (maiuscole, senza grazie). X e Y sono diversi perché se x è l'incrocio di X, allora $X \setminus \{x\}$ ha 4 componenti connesse mentre per i punti $y \in Y$ si ha che $Y \setminus \{y\}$ ha 3 o 2 componenti connesse (a seconda se y sia l'incrocio di Y o no).

Esempio 6.1.2. Sia X una "ics" e sia Y un simbolo "8". X e Y sono diversi perché se x è l'incrocio di X allora $X \setminus \{x\}$ ha 4 componenti connesse mentre per ogni x dell'8 si ha che $8 \setminus \{x\}$ ha al massimo 2 componenti connesse.

Definizione 6.1.3. Sia X uno spazio topologico connesso (per archi). Un punto $x \in X$ si dice **punto di taglio** (per archi) (in inglese *cut point*) se $X \setminus \{x\}$ è sconnesso (per archi); si dice **punto di taglio locale** (per archi) se x possiede un intorno connesso (per archi) per il quale x sia un punto di taglio (per archi).

L'avere un punto di taglio o un punto di taglio locale è un invariante topologico.

Esempio 6.1.4. Ogni punto è di taglio e di taglio locale per $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^2$ non ha punti di taglio, né punti di taglio locale, S^1 non ha punti di taglio ma ogni punto è di taglio locale. In particolare $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, S^1$ sono tre spazi diversi tra loro.

Esempio 6.1.5. Il tappeto e la guarnizione di Sierpinski sono diversi. Il tappeto non ha punti di taglio locali, la guarnizione sì (i vertici dei triangoli). Se questa cosa sembra naturale, sia detto che il tappeto di Sierpinski è una curva piana (sottoinsieme unidimensionale del piano nel senso di Lebesgue) universale: ogni sottoinsieme unidimensionale del piano è omeomorfo a un sottoinsieme del tappeto di Sierpinski[1]. Inoltre, ogni curva piana localmente connessa e senza punti di taglio locali è omeomorfa al tappeto di Sierpinski.[2]

Esercizio 6.1.6. Dimostrare che il tappeto di Sierpinski non ha punti di taglio locali.

Definizione 6.1.7. Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso (per archi) e sia $x \in X$. La **valenza di taglio** (per archi) di x è il numero delle componenti connesse (par archi) di $X \setminus \{x\}$. La **valenza ti taglio locale** (per archi) di x è definita come

$$v(x) = \sup_U \left\{\text{numero di componenti connesse (per archi) di } U \setminus \{x\}\right\}$$

[1] Sierpiński, Wacław (1916). "Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée". C. r. hebd. Seanc. Acad. Sci., Paris. 162: 629—632.

[2] Whyburn, Gordon (1958). "Topological characterization of the Sierpinski curve". Fund. Math. 45: 320—324.

al variare di U intorno connesso di x.[3]

Il seguente lemma ci dice che la valenza di un punto di taglio può essere calcolata facendo il limite su un sistema fondamentale di intorni connessi.

Lemma 6.1.8. *Sia X uno spazio T_2 e localmente connesso (per archi). Siano $V \subseteq U$ intorni aperti e connessi di $x \in X$. Allora il numero di componenti connesse (per archi) di $U \setminus \{x\}$ è minore o uguale al numero di quelle di $V \setminus \{x\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo sulle componenti connesse, per le componenti connesse per archi la dimostrazione è identica. Mostriamo che esiste una funzione suriettiva

$$f : \{\text{componenti connesse di } V \setminus \{x\}\} \to \{\text{componenti connesse di } U \setminus \{x\}\}$$

e ciò sarà sufficiente. Sia C una componente connessa di $V \setminus \{x\}$. In particolare C è un connesso di $V \setminus \{x\}$ e quindi anche un connesso di $U \setminus \{x\}$. (Per definizione C è massimale in $V \setminus \{x\}$ ma potrebbe non esserlo in $U \setminus \{x\}$.) Possiamo quindi definire $f(C)$ come la componente connessa di C in $U \setminus \{x\}$. Per mostrare la suriettività di f, si osservi che una componente connessa di $U \setminus \{x\}$ appartiene all'immagine di f se e solo se interseca V.

Siccome X è T_2, i suoi punti son chiusi e $U \setminus \{x\}$ è aperto, quindi anch'esso è localmente connesso (Teorema 4.4.3). Le sue componenti connesse son quindi aperte e chiuse in $U \setminus \{x\}$ (Teorema 4.4.6). In particolare sono aperte anche in U. Siccome U è connesso, esse non possono essere anche chiuse. Ne segue che x sta nell'aderenza di ogni componente connessa di $U \setminus \{x\}$. Quindi, siccome V è un intorno di x, ogni componente connessa di $U \setminus \{x\}$ interseca V. $\square$

Esempio 6.1.9. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo un simbolo "8" (oppure "∞"). Esso ha un punto x, l'incrocio, che ha valenza di taglio locale pari a 4. Tale spazio è diverso da S^1, i cui punti hanno valenza 2.

Volendo, si può compattificare X a un punto e poi guardare la valenza di taglio locale di ∞. Intuitivamente, in questo modo si contano le "fini" di uno spazio topologico.

Esempio 6.1.10. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$ e sia $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$. X e Y non sono omeomorfi perché, se compattifichiamo X a un punto, ∞ ha valenza di taglio locale quattro; mentre ogni punto $y \in \widehat{Y}$ ha valenza al più due.

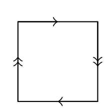
Esercizio 6.1.11. Dimostrare, usando la connessione, che l'orecchino Hawaiano (Esempio 3.5.5) e lo spazio dell'Esempio 2.2.11 non sono omeomorfi.

Esercizio 6.1.12. Siano $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ e $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$. Dimostrare che X e Y non sono omeomorfi tra loro.

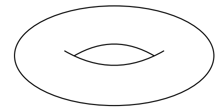
Esercizio 6.1.13. Siano $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ e $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$. Dimostrare che X e Y sono omeomorfi tra loro.

6.2. Taglia e cuci

In questa sezione ci dedicheremo a chirurgie topologiche, dette anche "tagli a cuci" (in inglese si usa solitamente *surgery*). Ci focalizzeremo principalmente su oggetti bidimensionali, ma il lettore audace saprà generalizzare il tutto in dimensione qualsiasi. Cominciamo con un paio di domande che classicamente turbano gli studi dei giovani topologi.

Esempio 6.2.1. Come si dimostra rigorosamente che $\mathbb{RP}^2$ è omeomorfo a questo  ?

[3] Si avverte il lettore che non esistono notazioni uniformi in letteratura per indicare le valenze.

Esempio 6.2.2. Come si dimostra che $S^1 \times S^1$ è omeomorfo a questo  ?

Vediamo subito un paio di utili risultati facilmente ottenibili con quanto sviluppato sin ora.

Teorema 6.2.3. *Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su uno spazio X tale che $X/\sim$ sia T_2. Se $A \subseteq X$ è compatto e interseca tutte le classi di equivalenza, cioè $\mathrm{sat}(A) = X$, allora $X/\sim$ è omeomorfo a $A/\sim$.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome i quozienti dei compatti son compatti (Teorema 3.1.24), allora $A/\sim$ è compatto. Per il Corollario 2.2.17, l'inclusione $A \to X$ induce una funzione continua $f : A/\sim \to X/\sim$. Tale funzione è iniettiva per definizione e siccome A interseca tutte le classi di equivalenza, f è anche suriettiva. Se $X/\sim$ è T_2, il Teorema del Compatto-Hausdorff conclude. □

Teorema 6.2.4. *Siano X, Y spazi topologici e siano $\sim_X$ e $\sim_Y$ relazioni di equivalenza su X e Y rispettivamente. Supponiamo che $X/\sim_X$ sia compatto e che $Y/\sim_Y$ sia T_2. Se esiste una funzione continua $f : X \to Y$ che coniuga le relazioni, e cioè tale che*

$$x \sim_X y \Longleftrightarrow f(x) \sim_Y f(y),$$

e tale che l'immagine di f intersechi tutte le classi di equivalenza, allora $X/\sim_X$ è omeomorfo a $Y/\sim_Y$.

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 2.2.17, f induce una funzione continua $[f]$ tra gli spazi quozienti. Siccome f coniuga le relazioni, $[f]$ è iniettiva; siccome l'immagine di f interseca tutte le classi di equivalenza allora $[f]$ è suriettiva. Per il Teorema del Compatto-Hausdorff essa è un omeomorfismo. □

Esercizio 6.2.5. Esibire un controesempio al Teorema 6.2.4 nel caso Y non sia T_2.

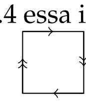
Adesso vediamo come, con questi strumenti, possiamo risolvere il primo problema.

Lemma 6.2.6. *Lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$ è omeomorfo a S^n modulo la relazione antipodale (cioè $x \sim -x$).*

DIMOSTRAZIONE. Il proiettivo è il quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ per la relazione $v \sim \lambda v$. Esso è T_2 perché due punti che non stanno sulla stessa retta sono separati da coni aperti (che sono aperti saturi). Siccome $S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : ||v|| = 1\}$ è compatto e interseca tutte le classi di equivalenza, allora per il Teorema 6.2.3 $\mathbb{RP}^n$ è omeomorfo a $S^n/\sim$. La relazione $v \sim \lambda v$, ristretta a S^n, non è altro che l'antipodale. □

Lemma 6.2.7. *Il proiettivo $\mathbb{RP}^n$ è omeomorfo al disco D^n modulo l'antipodale al bordo.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 6.2.6 sappiamo che $\mathbb{RP}^n \simeq S^n/\sim$. L'emisfero boreale di S^n, cioè l'insieme $E = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1, x_0 \geq 0\}$, è compatto e interseca tutte le classi di equivalenza. Per il Teorema 6.2.3 il proiettivo è omeomorfo a $E/\sim$. La proiezione $D^n \to E$ data da $f(x_1, \ldots, x_n) = (1 - \sqrt{\sum x_i^2}, x_1, \ldots, x_n)$ è continua, biunivoca e coniuga la relazione antipodale sul bordo di D^n con $\sim$. Per il Teorema 6.2.4 essa induce un omeomorfismo tra i quozienti. □

Lemma 6.2.8. *$\mathbb{RP}^2$ è omeomorfo a*  .

DIMOSTRAZIONE. Possiamo pensare il quadrato centrato nell'origine di $\mathbb{R}^2$ perché le traslazioni sono omeomorfismi. Inoltre possiamo suppore che il quadrato abbia lato 2 perché le omotetie sono omeomorfismi. La funzione $f(x,y) = \frac{\sup(|x|,|y|)}{||(x,y)||}(x,y)$ è una funzione continua e biunivoca da $[-1,1]^2$ al D^2. Gli incollamenti dati dalle freccette possono essere espressi tramite la relazione d'equivalenza $(x,y) \sim (-x,-y)$ sul bordo di $[-1,1]^2$, cioè l'antipodale. Per il Teorema 6.2.4 f induce un omeomorfismo tra i quozienti. □

Per dimostrare che un quadrato e un cerchio sono omeomorfi, abbiamo esibito un omeomorfismo esplicito. In generale però questa cosa potrebbe risultare ardua. L'uso della geometria affine ci può aiutare.

Teorema 6.2.9. *Due triangoli qualsiasi in $\mathbb{R}^2$ (e in generale in $\mathbb{R}^n$) sono omeomorfi tra loro.*

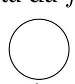
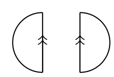
DIMOSTRAZIONE. Un triangolo è univocamente individuato dai suoi vertici, che sono punti affinemente indipendenti di $\mathbb{R}^2$ (altrimenti il triangolo degenera a un segmento o a un punto). Indichiamo con $T(P_0, P_1, P_2)$ il triangolo di vertici P_0, P_1, P_2. Dati due triangoli $T(P_0, P_1, P_2)$ e $T(Q_0, Q_1, Q_2)$ esiste una (unica) affinità F di $\mathbb{R}^2$ tale che $F(P_i) = Q_i$ per $i = 0, 1, 2$. È immediato verificare che $F : T(P_0, P_1, P_2) \to T(Q_0, Q_1, Q_2)$ è un omeomorfismo. Discorso analogo vale per triangoli in $\mathbb{R}^n$. $\square$

Affrontiamo adesso il secondo problema, quello del toro. La cosa è un po' più complicata perché si chiede di dimostrare che $S^1 \times S^1$ è omeomorfo a un disegnino. Si tratta di creare un ponte, il più formale possibile, tra i disegnini e una loro formalizzazione matematica. Con un disegno si intende generalmente un qualsiasi oggetto di $\mathbb{R}^3$ visivamente omeomorfo al disegno dato. Nel caso in questione, il disegno voleva raffigurare la superficie di una ciambella.

Una buona strategia in questi casi è quella di suddividere i due spazi in pezzi (per esempio triangoli) in modo tale da poter agilmente dimostrare che i pezzi sono omeomorfi a due a due e che tali omeomorfismi sono compatibili sulle intersezioni. Diamo adesso degli strumenti precisi per trattare questi casi. Son tutte istanze del Teorema 6.2.4.

Teorema 6.2.10. *Sia Y uno spazio di Hausdorff. Supponiamo che Y sia ricoperto da un numero finito di compatti $Y = \cup_{i=1}^n T_i$. Per ogni i sia $f_i : T_i \to Y$ l'inclusione. Sia X l'unione disgiunta dei T_i e sia $\sim$ la relazione d'equivalenza su X data dalle intersezioni, ovvero quella generata da $x_i \sim x_j$ se $f_i(x_i) = f_j(x_j)$ in Y. Allora Y è omeomorfo a $X/\sim$.*

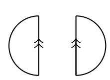
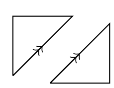
DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teorema 6.2.4 ponendo su Y la relazione d'equivalenza banale. La funzione continua da X a Y è data da $f|_{T_i} = f_i$. $\square$

Esempio 6.2.11. Lo spazio  è omeomorfo a  (ove le frecce indicano le identificazioni e i disegni sono da considerarsi come figure bidimensionali "piene").

Teorema 6.2.12. *Siano X, Y spazi topologici di Hausdorff. Supponiamo che $X = \cup_i K_i$ sia unione finita di compatti e siano $f_i : K_i \to X$ le inclusioni. Similmente, sia $Y = \cup_i T_i$ unione di compatti e siano $g_i : T_i \to Y$ le inclusioni.*

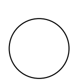
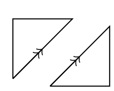
Supponiamo che per ogni i esista un omeomorfismo $\varphi_i : K_i \to T_i$ tale che $f_i(x) = f_j(y)$ se e solo se $g_i(\varphi_i(x)) = g_j(\varphi_j(y))$. Allora X è omeomorfo a Y.

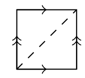
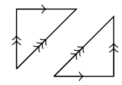
DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 6.2.10 X è omeomorfo al quoziente di $\sqcup K_i$ modulo la relazione d'equivalenza generata da $x_i \sim x_j$ se $f_i(x_i) = f_j(x_j)$. Similmente Y è il quoziente di $\sqcup T_i$. La tesi segue dal Teorema 6.2.4 applicato a $\sqcup K_i$ e $\sqcup T_i$. La funzione f è data da $f|_{K_i} = \varphi_i$. $\square$

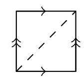
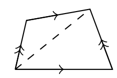
Esempio 6.2.13. Lo spazio  è omeomorfo a  .

Teorema 6.2.14. *Siano $K_1, \ldots, K_n$ compatti e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su $K = \sqcup K_i$. Sia Y uno spazio di Husdorff tale che $Y = \cup_i T_i$ sia unione di compatti e siano $g_i : T_i \to Y$ le inclusioni. Se per ogni i esiste un omeomorfismo $\varphi_i : K_i \to T_i$ tale che $x_i \sim x_j$ se e solo se $g_i(\varphi_i(x_i)) = g_j(\varphi_j(x_j))$ allora Y è omeomorfo a $K/\sim$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 6.2.10 Y è omeomorfo al quoziente di $\sqcup T_i$ modulo la relazione d'equivalenza generata da $y_i \sim y_j$ se $g_i(y_i) = g_j(y_j)$. La tesi segue dal Teorema 6.2.4 applicato a $\sqcup K_i$ e $\sqcup T_i$. La funzione f è data da $f|_{K_i} = \varphi_i$. $\square$

Esempio 6.2.15. Lo spazio  è omeomorfo a  .

Esempio 6.2.16. Lo spazio  è omeomorfo a  .

Esempio 6.2.17. Lo spazio  è omeomorfo a  (usando anche il Teorema 6.2.9.)

Definizione 6.2.18 (Incollamenti tramite mappe)**.** Siano X, Y due spazi topologici e sia f una funzione continua da un sottoinsieme A di X a Y. Su $X \sqcup Y$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da $x \sim f(x)$. Lo spazio $(X \sqcup Y)/\sim$ è l'incollamento di X e Y tramite la mappa f.

Chiaramente gli incollamenti si possono definire su un numero qualsiasi di spazi.

Esempio 6.2.19. Il Teorema 6.2.10 si può riformulare dicendo che Y è omeomorfo all'incollamento dei T_i tramite le mappe $f_i \circ f_j^{-1}$ (definite su $T_i \cap T_j$).

Esempio 6.2.20. Nel caso particolare in cui A sia un punto, si ha l'incollamento di due spazi su un punto, noto in letteratura come **wedge** (o *one-point union*, per gli anglofoni) o **bouquet** (per i francofoni) dei due spazi.

Esempio 6.2.21. Un "8" è omeomorfo a un bouquet di due circonferenze.

Definizione 6.2.22 (Triangolazioni)**.** Uno **spazio triangolato** *in senso stretto*[4] è il quoziente di un numero finito di triangoli incollati, tramite omeomorfismi affini, lungo alcuni lati e con alcuni vertici identificati; il tutto in modo tale che, nel quoziente,

(1) ogni lato abbia due vertici diversi;
(2) ogni coppia di vertici appartenga al più a un lato;
(3) ogni tripla di vertici appartenga al più a un triangolo.

Una **triangolazione** (in senso stretto) di uno spazio topologico X è il dato di uno spazio triangolato T e di un omeomorfismo tra X e T.

Uno **spazio triangolato** *in senso lato* è il quoziente di un numero finito di triangoli incollati lungo alcuni lati e vertici tramite omeomorfismi affini, senza le tre richieste aggiuntive. Una **triangolazione** (in senso lato) di uno spazio topologico X è il dato di uno spazio triangolato T e di un omeomorfismo tra X e T.

Esempio 6.2.23. Sia $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ un triangolo in $\mathbb{R}^2$. Identificando il lato orizzontale con quello verticale tramite $(t, 0) \sim (0, t)$ si ottiene una triangolazione del disco. Tale triangolazione non è stretta perché il lato corrispondente al lato obliquo di T ha, nel disco, i due vertici identificati.

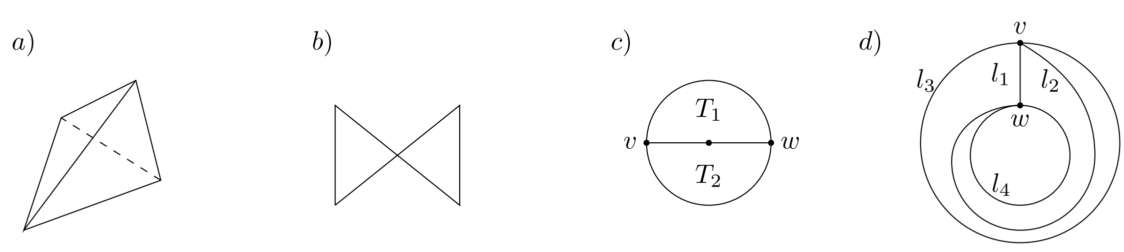


FIGURA 1. Triangolazioni in senso stretto e non

[4] La nozione di triangolazione che diamo qui è puramente bidimensionale. In generale esisteranno triangolazioni di dimensione qualsiasi. Quello che qui chiamiamo "spazio triangolato in senso stretto" è la versione bidimensionale di ciò che è comunemente chiamato "complesso simpliciale".

Esempio 6.2.24. Quella di Figura 1 $a)$ è una triangolazione in senso stretto di una sfera.

Esempio 6.2.25. Quello di Figura 1 $b)$ è uno spazio triangolato in senso stretto con due triangoli incollati lungo un vertice.

Esempio 6.2.26. Quella di Figura 1 $c)$ è una triangolazione in senso lato, ma non stretto, del disco D^2. Si noti che i triangoli T_1 e T_2 sono immersi nel disco, ma la coppia di vertici (v, w) appartiene a due lati diversi.

Esempio 6.2.27. Quella di Figura 1 $d)$ è una triangolazione in senso lato, ma non stretto, di una corona circolare. Infatti la coppia di vertici (v, w) appartiene ai due lati l_1, l_2. Inoltre vi sono due lati (l_3 e l_4) ognuno incidente a un sol vertice. Si noti che ci sono due triangoli, nessuno dei due immerso.

Esempio 6.2.28. Il cosiddetto cuscino triangolare (Figura 2) è uno spazio triangolato ottenuto da due triangoli uguali identificando ogni lato del primo al corrispondente lato del secondo. La triangolazione ottenuta non è una triangolazione in senso stretto perché la tripla di vertici è comune ai due triangoli.

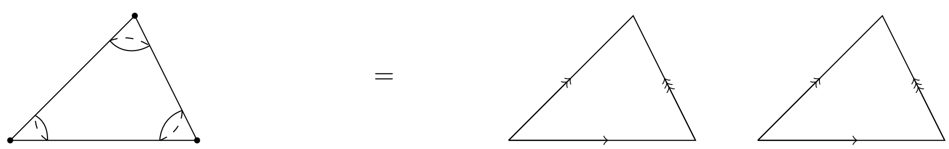


FIGURA 2. Il cuscino triangolare

La definizione di triangolazione usa i triangoli perché sono oggetti universali dal punto di vista affine (Teorema 6.2.9). Va da sé che si possono dare anche definizioni di quadrangolazioni et cetera.

Esempio 6.2.29. Un quadrato si può triangolare tagliandolo in due sulla diagonale (ottenendo due triangoli), ma anche considerando un punto interno e i segmenti da esso verso i vertici (quattro triangoli); una sfera si può triangolare con un cubo (triangolando le facce) come in Figura 3.

FIGURA 3. Triangolazioni di un quadrato e di una sfera (rappresentata come un cubo con le facce triangolate) e una quadrangolazione di una sfera (un cubo semplice)

Definizione 6.2.30. Uno **schema simpliciale** bidimensionale è un sottospazio K di $\mathbb{R}^n$, triangolato in senso stretto e tale che:

(1) Ogni vertice di K sia un elemento della base canonica;
(2) ogni lato di K sia il segmento congiungente due elementi della base canonica;
(3) ogni triangolo di K sia l'inviluppo convesso di tre elementi della base canonica.

In particolare, K è contenuto nell'inviluppo convesso della base canonica $\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$.

Esempio 6.2.31. Il triangolo standard è l'inviluppo convesso della base canonica di $\mathbb{R}^3$, $\Delta = \{(x, y, z) : x + y + z = 1,\ x, y, z \geq 0\}$. Esso è uno schema simpliciale bidimensionale.

Esempio 6.2.32. Il bordo del tetraedro standard è lo schema simpliciale di $\mathbb{R}^4$ formato da tutti i triangoli ottenibili come inviluppo convesso di tre elementi della base canonica e_1, e_2, e_3, e_4. Esso è uno schema simpliciale bidimensionale omeomorfo a S^2 (si veda anche la Figura 1 a)).

Teorema 6.2.33. *Ogni spazio X triangolato in senso stretto è omeomorfo a uno schema simpliciale di $\mathbb{R}^n$, ove n è il numero dei vertici di X. In particolare esso è T_2.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = \sqcup T_i / \sim$ uno spazio triangolato in senso stretto. Esso è compatto perché è quoziente di un numero finito di triangoli, che sono compatti. Siano $v_1, \ldots, v_n$ i vertici di X. Sia $e_1, \ldots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Poniamo $\varphi(v_i) = e_i$. Essa è una corrispondenza biunivoca tra i v_i e gli e_i. L'idea è che φ si estende, in modo naturale tramite mappe affini, ad una immersione topologica.

La condizione (1) della Definizione 6.2.22 implica che ogni triangolo T_i ha tre vertici distinti in X. È quindi ben definito il corrispondente triangolo Δ_i in $\mathbb{R}^n$, ossia l'inviluppo convesso dell'immagine dei vertici di T_i. Per ogni i esiste un unico omeomorfismo affine $f_i : T_i \to \Delta_i$ che estende φ. L'unione delle f_i definisce una funzione continua da $f : \sqcup_i T_i \to \mathbb{R}^n$. Se I è un lato di T_i identificato a un lato J di T_j tramite l'unica mappa affine $g : I \to J$, allora $f_i = f_j \circ g$ su I. Ne segue che f è costante sulle classi di equivalenza e quindi per il Teorema 2.2.16 induce una funzione continua $F : X \to \mathbb{R}^n$ che estende φ.

F è iniettiva sui vertici perché per definizione φ lo è. La condizione (2) della Definizione 6.2.22 implica che F è iniettiva sui lati. La condizione (3) della Definizione 6.2.22 implica che F è iniettiva sui triangoli. L'immagine di F è T_2 perché $\mathbb{R}^n$ lo è, quindi per il Teorema del compatto Hausdorff, F è un omeomorfismo tra X e $F(X)$. Si noti che $F(X)$ è uno schema simpliciale per costruzione. $\square$

Come si evince da questa dimostrazione, F dipende solo dai vertici, il resto è a botte di estensioni affini uniche. Il bello delle triangolazioni è proprio che il tipo di omeomorfismo è completamente codificato dalla combinatoria.

Teorema 6.2.34. *Siano X, Y due spazi T_2 triangolati in senso stretto. Supponiamo che esista una corrispondenza biunivoca tra i vertici di X e quelli di Y tale che*

(1) *due punti di X sono vertici di un lato se e solo se lo stesso succede in Y;*
(2) *tre punti di X sono vertici di un triangolo se e solo se lo stesso succede in Y.*

Allora X e Y sono omeomorfi.

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 6.2.33 possiamo suppore che X e Y siano schemi simpliciali in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente. Siccome i vertici sono in corrispondenza biunivoca, $n = m$. Inoltre la corrispondenza tra i vertici induce una permutazione degli elementi della base di $\mathbb{R}^n$ che si estende ad una unico isomorfismo lineare, che in particolare è affine. Tale isomorfismo, ristretto a X, è un omeomorfismo tra X e Y. $\square$

Per triangolare oggetti disegnati o parametrizzati da funzioni esplicite, basta considerare un insieme abbastanza fitto di punti, in modo che essi determinino il disegno di una *triangolazione curva* sull'oggetto. A questo punto ogni triangolino curvo si mostra essere omeomorfo al triangolo affine individuato dai suoi vertici e ciò fornirà una triangolazione del nostro oggetto. Questo è esattamente il procedimento che si fa per elaborare immagini 3D (e in questo ambito di lavoro, non chiedetemi perché, le triangolazioni si chiamano *mesh*; la loro forza sta proprio nel fatto che bastano i vertici per determinare l'oggetto.)

Usando la quadrangolazione della Figura 4 diventa chiaro come dimostrare che il toro "disegnato" è omeomorfo a $S^1 \times S^1$. Infatti quest'ultimo è omeomorfo a $[0, 2\pi]^2$ modulo la relazione $(0, y) \sim (2\pi, y)$ e $(x, 0) \sim (x, 2\pi)$ (Esempio 3.2.5), che si può agilmente quadrangolare usando un reticolo regolare di punti $(\frac{2k\pi}{n}, \frac{2h\pi}{m}) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ al variare di $k = 0, 1, \ldots, n$ e $h = 0, 1, \ldots, m$. La quadrangolazione così ottenuta di $S^1 \times S^1$ è combinatorialmente equivalente a quella della Figura 4.

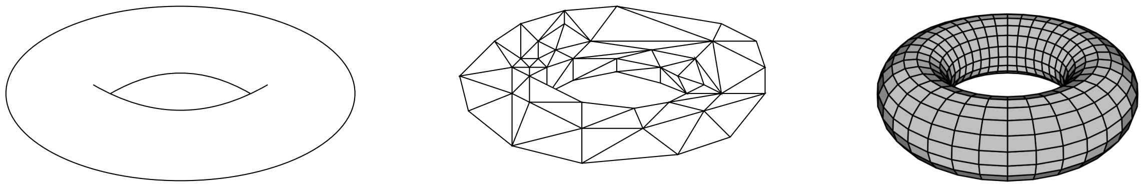


FIGURA 4. Una toro, una sua triangolazione (fatta a mano) e una sua quadrangolazione (algoritmicamente generata)

Per finire, vediamo un altro classico del taglia e cuci: la superficie di genere due. Essa è una "ciambella per due", cioè quella disegnata in Figura 5.

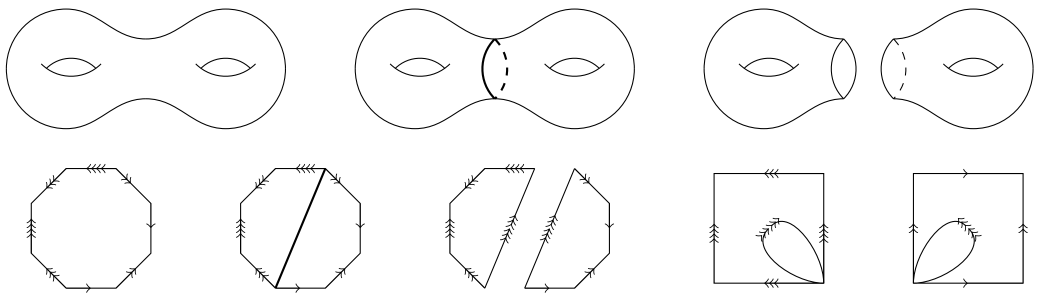


FIGURA 5. Una superficie di genere due

Esempio 6.2.35. Una superficie di genere due è omeomorfa a un ottagono con i lati identificati come in Figura 5 (lati con frecce uguali vengono incollati d'accordo con l'orientazione data dalla freccia).

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 6.2.10, possiamo tagliare la superficie lungo una curva, come descritto in figura, spezzandola in due tori bucati. Sull'ottagono invece, grazie al Teorema 6.2.4, tagliamo lungo una diagonale (sempre come in Figura 5) ottenendo due pentagoni.

Adesso osserviamo che i vertici dell'ottagono sono tutti identificati tra loro e quindi possiamo incollare i vertici dei lati lunghi dei pentagoni (sempre usando il Teorema 6.2.4). Otteniamo due quadrati bucati, ciascuno dei quali ha i lati identificati in modo da formare un toro bucato (per il teorema del Compatto-Hausdorff). Abbiamo quindi tagliato sia la superficie sia l'ottagono in modo da ottenere due pezzi omeomorfi a tori bucati. Per il Teorema 6.2.12, entrambi gli spazi di partenza quindi sono omeomorfi una coppia di tori bucati attaccati tra loro lungo i bordi (con le orientazioni invertite). □

6.3. La topologia compatto-aperta

Lavorando con funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, si è abituati a parlare di convergenza di successioni di funzioni. Ci sono molte nozioni differenti di convergenza, per esempio quella puntuale e quella uniforme. In generale, per poter parlare di convergenza, è necessaria una topologia sugli spazi di funzioni. Se si lavora con spazi topologici senza ulteriori particolari strutture, la scelta naturale è quella della topologia compatto-aperta. (Si rimanda il lettore curioso del perché tale scelta sia quella naturale, al libro del Kelley citato in introduzione, ove potrà trovare una discussione dettagliata sull'argomento.)

Definizione 6.3.1. Siano X, Y spazi topologici. La topologia **compatto-aperta** su Y^X è la topologia $\mathcal{K}$-aperta (Esempio 1.2.20) ove $\mathcal{K}$ è la famiglia dei compatti di X. Essa è dunque generata dagli insiemi del tipo $V(K,U) = \{f : f(K) \subseteq U\}$ al variare di K compatto in X e U aperto in Y e una sua base è data dalle intersezioni finite di tali insiemi.

La topologia compatto-aperta si può definire (come si è fatto) su tutto Y^X, ma di solito se ne usa la restrizione allo spazio $C(X,Y) \subseteq Y^X$ delle funzioni continue da X a Y. (Addirittura, in molti testi viene definita solo su $C(X,Y)$).

Esempio 6.3.2. Nel caso in cui X sia un punto (ergo ogni funzione da X in Y è continua) allora la topologia compatto-aperta rende $C(X,Y) = Y^X$ omeomorfo a Y.

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = \{x\}$. Ogni $f \in Y^X$ è caratterizzata dal suo unico valore $f(x) \in Y$. È dunque naturalmente definita una biiezione $F : Y^X \to Y$ ponendo $F(f) = f(x)$. Se U è un aperto di Y allora $F^{-1}(U) = \{f \in Y^X : f(x) \in U\}$ che è un aperto di base per la compatto-aperta in quanto $\{x\}$ è compatto. Quindi F è continua. Viceversa, l'unico compatto non vuoto di X è X stesso e quindi ogni aperto non vuoto della compatto-aperta è della forma $V = \{f : f(x) \in U\}$ con U aperto di Y. Dunque $F(V) = U$ è aperto, quindi F è una mappa aperta. Essendo continua e biunivoca, è dunque un omeomorfismo. □

Esercizio 6.3.3. Dimostrare che se X è dotato della topologia discreta, allora $C(X,Y)$ con la topologia compatto-aperta è omeomorfo a Y^X con la topologia prodotto.

Teorema 6.3.4. *Siano X, Y spazi topologici. Se Y è T_2 allora la topologia compatto-aperta su Y^X è T_2.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $f \neq g \in Y^X$. Allora esiste $x \in X$ tale che $f(x) \neq g(x)$. Siccome Y è T_2 esistono aperti disgiunti U, V tali che $f(x) \in U$ e $g(x) \in V$. L'insieme $\{x\}$ è compatto. Quindi gli insiemi $A = \{\varphi : \varphi(x) \in U\}$ e $B = \{\varphi : \varphi(x) \in V\}$ sono aperti per la topologia compatto-aperta, e sono chiaramente disgiunti, l'uno contenente f e l'altro g. □

Teorema 6.3.5. *Se Y è uno spazio metrico, allora la topologia compatto-aperta su $C(X,Y)$ è quella della convergenza uniforme sui compatti: $f_n \to f$ se e solo se per ogni compatto $K \subseteq X$ si ha che $(f_n)|_K$ converge uniformemente a $f|_K$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $f_n \to f$ per la compatto-aperta e sia K un compatto di X. Sia $\varepsilon > 0$. Siccome f è continua allora per ogni $x \in K$ esiste U_x intorno di x tale che $f(U_x) \subseteq B(f(x), \varepsilon/4)$. Per compattezza esistono $x_1, \dots, x_k$ tali che $K \subseteq \cup_i U_{x_i}$. Gli insiemi $K_i = \overline{U_{x_i}}$ sono chiusi in un compatto, ergo compatti. Siccome f è continua (usando il Teorema 1.7.10) si ha che $f(K_i) = f(\overline{U_{x_i}}) \subseteq \overline{f(U_{x_i})} \subseteq B(f(x_i), \varepsilon/2)$. Gli insiemi $A_i = \{\varphi \in C(X,Y) : \varphi(K_i) \subseteq B(f(x_i), \varepsilon/2)\}$ sono quindi intorni aperti di f nella compatto-aperta. Quindi $A = \cap_i A_i$ è un intorno aperto di f. Si noti che, siccome i K_i coprono K, allora per ogni $g \in A$ si ha $\sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon$.

Siccome $f_n \to f$ per la compatto-aperta, allora esiste n_ε tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha $f_n \in A$, in particolare

$$\sup_{x \in K} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Siccome ciò vale per ogni $\varepsilon > 0$, allora $f_n \to f$ uniformemente in K.

Viceversa, supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente su ogni compatto. Sia V un intorno di f nella compatto-aperta. Esistono dunque compatti $K_1, \dots, K_k$ e aperti $U_1, \dots, U_k$ di Y tali che l'insieme $A = \{\varphi : \varphi(K_i) \subseteq U_i \text{ per ogni } i\}$ contiene f ed è contenuto in V. Siccome f è continua, $f(K_i)$ è un compatto dentro l'aperto U_i. Esiste quindi $\varepsilon_i > 0$ tale che l'insieme $\cup_{y \in f(K_i)} B(y, \varepsilon_i) = \{y \in Y : d(y, f(K_i)) < \varepsilon_i\}$ è interamente contenuto in U_i. Siccome $f_n \to f$ uniformemente su K_i, allora per ogni $x \in K_i$ si ha $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon_i$ definitivamente in n e quindi $f_n(K_i) \subseteq \{y \in Y : d(y, f(K_i)) < \varepsilon_i\} \subseteq U_i$. Siccome i K_i sono in numero finito, definitivamente in n si ha $f_n(K_i) \subseteq U_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Ossia $f_n \in A$. Abbiamo quindi dimostrato che per ogni intorno V di f la successione f_n sta in V da un certo n in poi. Quindi $f_n \to f$ per la topologia compatto-aperta. □

Esercizio 6.3.6. Dimostrare che se U è un aperto di uno spazio metrico X e $K \subseteq U$ è compatto, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'insieme $\{x \in X : d(x, K) < \varepsilon\}$ è interamente contenuto in U.

Si noti che nella dimostrazione del Teorema 6.3.5 si è usata l'ipotesi che la funzione limite f sia continua. In generale infatti, limite compatto-aperto di funzioni continue potrebbe non essere continuo.

Esempio 6.3.7. Siano $X = [0, 1]$ e $Y = [-1, 1]$ con le topologie Euclidee. Siano

$$f(x) = \begin{cases} sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases} \qquad f_n(x) = \begin{cases} sin(1/x) & x > \frac{1}{2\pi n} \\ 0 \quad x \leq \frac{1}{2\pi n} \end{cases}.$$

Chiaramente f non è continua mentre ogni f_n lo è. Ebbene, $f_n \to f$ nella topologia compatto-aperta.

DIMOSTRAZIONE. Vediamo quali sono gli intorni di f nella compatto-aperta. Per ogni compatto K di X e U aperto di Y sia $V(K, U) = \{g : g(K) \subseteq U\}$. Supponiamo che $f \in V(K, U)$. Ci sono due casi:

(1) $0 \notin K$ e allora $f_n \in V$ per n abbastanza grande in quanto non appena $\min K > 1/2\pi n$, f_n coincide con f su K.
(2) $0 \in K$. In tal caso, siccome $f \in V(K, U)$ e $f(0) = 0$, allora $0 \in U$. Ma allora $f_n \in V$ per ogni n in quanto f_n vale 0 ove non coincide con f.

In entrambi i casi f_n sta in V definitivamente in n. Siccome una base della compatto-aperta è data da intersezioni finite di insiemi tipo $V(K, U)$, ne segue che $f_n \to f$ per la compatto-aperta. $\square$

6.4. Gruppi topologici

Definizione 6.4.1. Un **gruppo topologico** è un gruppo G, dotato di una topologia tale che:

- la moltiplicazione $G \times G \to G$, data da $(g, h) \mapsto gh$, è continua ($G \times G$ si intende dotato della topologia prodotto);
- l'inversione $G \to G$ data da $g \to g^{-1}$ è continua.

Esempio 6.4.2. Ogni gruppo è un gruppo topologico se dotato della topologia discreta. In questo caso si parla di **gruppo discreto**. I gruppi finiti o numerabili si considerano usualmente come gruppi discreti.

Esempio 6.4.3. Gli esempi più classici di gruppi non discreti sono $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ (con la struttura additiva).

Esempio 6.4.4. I gruppi di matrici, per esempio i gruppi $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ e tutti i loro sottogruppi, dotati dell'usuale topologia derivante dall'identificazione di $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}^{n^2}$, sono gruppi topologici.

In particolare sono gruppi topologici $\mathbb{R}^* = GL(1, \mathbb{R})$, $\mathbb{C}^*$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ etc... Così come sono gruppi topologici $\mathbb{P}SL(n, \mathbb{R})$ e $\mathbb{P}SL(n, \mathbb{C})$. Siccome $\mathbb{C}^{n^2}$ è metrizzabile, lo sono anche tutti i gruppi di matrici.

Esempio 6.4.5. S^1, identificato con la sfera unitaria di $\mathbb{C}$, è un gruppo topologico.

Esempio 6.4.6. La sfera S^3 è un gruppo topologico. La struttura di gruppo è data dall'identificazione con la sfera unitaria dei quaternioni.

Teorema 6.4.7. *$SO(2)$ è omeomorfo a S^1.*

DIMOSTRAZIONE. Identifichiamo S^1 con $[0,2\pi]$ modulo $0 \sim 2\pi$. La funzione $f : S^1 \to SO(2)$ data da
$$f(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
è continua e biunivoca tra un compatto e un T_2, ergo è un omeomorfismo. □

Teorema 6.4.8. *$SO(3)$ è omeomorfo a $\mathbb{RP}^3$ (che quindi eredita una struttura di gruppo topologico).*

DIMOSTRAZIONE. $\mathbb{RP}^3$ è compatto ed omeomorfo a D^3 modulo l'antipodale al bordo (Lemma 6.2.7). Il gruppo $SO(3)$ è il gruppo delle isometrie lineari di $\mathbb{R}^3$ che preservano l'orientazione, cioè il gruppo delle rotazioni. Definiamo ora una funzione $F : \mathbb{RP}^3 \to SO(3)$ che sia continua e biunivoca; siccome $SO(3)$ è T_2 ciò sarà sufficiente.

Ad ogni punto $0 \neq x \in D^3$ associamo la rotazione di angolo $\pi||x||$ attorno alla retta passante per x, l'angolo è considerato in senso orario rispetto alla regola della mano destra con il pollice che punta verso x. Si noti che $F(-x)$ ha lo stesso asse di rotazione di $F(x)$ e stesso angolo, ma in senso antiorario rispetto a $F(x)$. Tale funzione si estende per continuità nell'origine ponendo $F(0) = Id$. Inoltre se $||x|| = 1$ allora, siccome la rotazione oraria di π coincide con la antioraria di $-\pi$, si ha $F(x) = F(-x)$. In altre parole
$$x \sim y \quad \Rightarrow F(x) = F(y).$$
Per il Teorema 2.2.16 F induce una funzione continua da D^3 modulo antipodale a $SO(3)$. F è biunivoca perché una rotazione è univocamente determinata dall'asse e angolo di rotazione. □

Teorema 6.4.9. *$SU(2)$ è omeomorfo a S^3.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $U(2)$ è il gruppo delle matrici complesse 2×2 tali che A^{-1} è il coniugato della trasposta di A e che $SU(2)$ è il sottogruppo di quelle con determinante 1. In formule $SU(2)$ è l'insieme dalle matrici del tipo
$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1$$
Se $a = x + iy$ e $b = z + it$ l'equazione $|a|^2 + |b|^2 = 1$ diventa $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$, che definisce S^3 come sfera unitaria di $\mathbb{R}^4$. L'applicazione
$$(x, y, z, t) \mapsto \begin{pmatrix} x + iy & -z + it \\ z + it & x - iy \end{pmatrix}$$
definisce quindi una funzione continua e biunivoca da S^3 a $SU(2)$, il Teorema del Compatto Hausdorff conclude. □

Esempio 6.4.10. Il gruppo di Heisenberg è il gruppo delle matrici 3×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, che siano triangolari superiori con unico autovalore 1. In altre parole, il gruppo delle matrici della forma $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esso è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$ tramite la corrispondenza $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Ma la struttura di gruppo non è quella usuale di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 6.4.11. Il gruppo delle affinità di $\mathbb{R}^2$ può essere identificato col gruppo delle matrici 3×3 della forma $M = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con A matrice 2×2 e b vettore colonna di $\mathbb{R}^2$. Ad ogni affinità, che è del tipo $f(x) = Ax + b$, possiamo associare una matrice M come sopra e viceversa. L'azione su $\mathbb{R}^2$ è data dall'usuale moltiplicazione riga per colonna, una volta identificato $\mathbb{R}^2$ con $\{(x, y, 1), x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Ne segue che il gruppo delle affinità di $\mathbb{R}^2$ è un gruppo topologico.

Esempio 6.4.12. Dato un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ il gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ rispetto a tale prodotto scalare è un gruppo topologico.

Esempio 6.4.13. Il gruppo delle isometrie dello spaziotempo di Minkowski è un gruppo topologico.

6.5. Azioni di gruppi

Sia X uno spazio topologico. L'insieme $\mathrm{omeo}(X)$ di tutti gli omeomorfismi è un gruppo rispetto alla composizione: l'elemento neutro è l'identità e $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Definizione 6.5.1 (Azioni di gruppi)**.** Si dice che un gruppo G **agisce** su un spazio topologico X (tramite omeomorfismi) se è data una rappresentazione (cioè un morfismo di gruppi) $\rho : G \to \mathrm{omeo}(X)$. Quando è necessario specificare la rappresentazione, si dice che G agisce via ρ.

Se non ci sono ambiguità, è generalmente usata la terminologia semplificata "gx" al posto di $\rho(g)(x)$. Dato $x \in X$, l'**orbita** di x è l'insieme $Gx = \{gx : \ g \in G\} = \{y \in X : \exists g \in G : y = gx\}$.

Esempio 6.5.2. Se $G \leq \mathrm{omeo}(X)$ allora G agisce su X tramite l'inclusione $G \subseteq \mathrm{omeo}(X)$.

Un'azione di G su X è dunque una funzione da $G \times X \to X$ data da $(g, x) \mapsto \rho(g)(x)$. Per ogni g fissato, $\rho(g)$ è un omeomorfismo di X. Per studiare l'effetto di un'azione su X, non è importante tanto la rappresentazione $\rho : G \to \mathrm{omeo}(X)$ quanto l'immagine $\rho(G) \leq \mathrm{omeo}(X)$.

Esempio 6.5.3. $\mathbb{Z}$ agisce naturalmente su $\mathbb{R}$ tramite traslazioni, cioè via la rappresentazione τ:

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{omeo}(\mathbb{R}) \qquad n \mapsto \tau_n \qquad \tau_n(x) = x + n.$$

L'orbita di 0 è $\mathbb{Z}$, l'orbita di π è $\pi + \mathbb{Z}$.

Esempio 6.5.4. Il gruppo $\mathbb{Z}$ può agire su $\mathbb{R}$ (e più in generale su $\mathbb{R}^n$) in altri modi, per esempio per moltiplicazione per 2^k:

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{omeo}(\mathbb{R}) \qquad n \mapsto \sigma_k \qquad \sigma_k(x) = 2^k x.$$

L'orbita di 0 è $\{0\}$. L'orbita di 1 è formata dai multipli positivi di due: $\mathbb{Z}1 = \{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Visivamente è una successione che si accumula a zero da un lato e tende all'infinito dall'altro.

Esempio 6.5.5. $\mathbb{Z}^2 < \mathbb{R}^2$ agisce su $\mathbb{R}^2$ per traslazioni. $\mathbb{Z}^n < \mathbb{R}^n$ agisce su $\mathbb{R}^n$ per traslazioni.

Esempio 6.5.6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, con la topologia indotta da un prodotto scalare. Allora $\mathbb{R}^*$ (come gruppo moltiplicativo) agisce su V per moltiplicazione:

$$\mathbb{R} \to \mathrm{omeo}(V) \qquad \lambda \mapsto \rho(\lambda) \qquad \rho(\lambda)(v) = \lambda v.$$

L'orbita di 0 è $\{0\}$, l'orbita di $v \neq 0$ è la retta per v privata dello zero.

Esempio 6.5.7. Sia $X = GL(n, \mathbb{R})$ con la topologia indotta dall'identificazione di $GL(n, \mathbb{R})$ con un aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$. X agisce su sé stesso tramite coniugio:

$$\rho : X \to \mathrm{omeo}(X) \qquad M \mapsto \rho(M) \qquad \rho(M)A = MAM^{-1}.$$

L'orbita dell'identità è l'identità. L'orbita di A è l'insieme di tutte le matrici simili ad A.

Esempio 6.5.8. S^1 agisce su S^2 per rotazioni orizzontali. Usando $S^1 \simeq \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$, $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ e ponendo $S^2 = (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \ |z|^2 + t^2 = 1$, si ha

$$\rho : S^1 \to \mathrm{omeo}(S^2) \qquad \rho(\xi)(z, t) = (\xi z, t)$$

Con una terminologia geografica, le orbite dei poli nord e sud sono i poli stessi, le altre orbite sono i paralleli.

Esempio 6.5.9. Se G è un gruppo topologico allora la moltiplicazione a sinistra definisce un'azione di G su sé stesso: $\rho(g)h = gh$.

Esempio 6.5.10. Se G è un gruppo topologico non commutativo allora la moltiplicazione a destra $\rho(g)h = hg$ non definisce un'azione di G su sé stesso in quanto non è un morfismo: $\rho(g_1)(\rho(g_2)h) = hg_2g_1 \neq hg_1g_2 = \rho(g_1g_2)h$.

Esercizio 6.5.11. Dimostrare che se G è un gruppo topologico allora la moltiplicazione per inverso a destra: $\rho(g)h = hg^{-1}$ definisce un'azione di G su sé stesso.

A questo punto è d'uopo una precisazione sulle **azioni a destra e a sinistra**. Il fatto che ρ sia una rappresentazione ci dice che $\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$ e $\rho(1) = id$, per cui la notazione moltiplicativa **a sinistra** "gx" è coerente:

$$\rho(1)(x) = 1x = x \qquad \rho(gh)(x) = ghx = g(hx) = \rho(g)(\rho(h)(x)) = (\rho(g) \circ \rho(h))(x).$$

Se invece, pur avendo $\rho(1) = id$, succede che $\rho(gh) = \rho(h) \circ \rho(g)$ — e ciò è equivalente a chiedere che $g \mapsto \rho(g)^{-1}$ sia una rappresentazione — allora la notazione coerente è quella della moltiplicazione **a destra** "xg":

$$\rho(1)(x) = x1 = x \qquad \rho(gh)(x) = xgh = (xg)h = \rho(h)(\rho(g)(x)) = (\rho(h) \circ \rho(g))(x).$$

Quando si parla di azioni di gruppi senza specificare, o è chiaro dal contesto se l'azione sia a destra o a sinistra, o generalmente si intende un'azione a sinistra. Nel caso fosse necessario essere più precisi, si parlerà di azione a destra o sinistra a seconda che ρ inverta o meno l'ordine della moltiplicazione.

Esempio 6.5.12. La moltiplicazione a sinistra fornisce un'azione a sinistra di G su sé stesso. La moltiplicazione a destra fornisca un'azione a destra. Il coniugio $\rho(g) = ghg^{-1}$ fornisce un'azione a sinistra. Il coniugio $\rho(g) = g^{-1}hg$ fornisce un'azione a destra.

Lemma 6.5.13. *Sia G un gruppo che agisce su uno spazio X. Allora le orbite sono a due a due disgiunte.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x, y \in X$ tali che $Gx \cap Gy \neq \emptyset$. Allora esistono $g, h \in G$ tali che $gx = hy$. Ma allora $y = h^{-1}gx$ e quindi $y \in Gx$. Ne segue che $Gx = Gy$. □

Definizione 6.5.14. Un'azione di G su X si dice **transitiva** se per ogni $x, y \in X$ esiste $g \in G$ tale che $gx = y$.

Esempio 6.5.15. L'azione di G su sé stesso per moltiplicazione a sinistra è transitiva perché per ogni $g, h \in G$ si ha $h = (hg^{-1})g$.

Esempio 6.5.16. L'azione di $GL(2, \mathbb{R})$ su se stesso per coniugio non è transitiva. Infatti le matrici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ non sono simili.

Esempio 6.5.17. L'azione di un gruppo non banale su sé stesso per coniugio non è transitiva. Infatti l'orbita dell'identità è costituita da un sol punto: l'identità.

Esercizio 6.5.18. Dimostrare che un'azione di G su X è transitiva se e solo se in X v'è una sola orbita, ossia se per ogni $x \in X$ si ha $X = Gx$.

Definizione 6.5.19. Un'azione di G su X si dice **libera** se per ogni $x \in X$, $gx = x \iff g = id$.

Esempio 6.5.20. L'azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su S^2 data dall'antipodale è libera in quanto ogni punto è diverso dal suo antipodale.

Esempio 6.5.21. L'azione di un gruppo su sé stesso per moltiplicazione a sinistra è libera in quanto $gh = h$ se e solo se $g = id$.

Esempio 6.5.22. L'azione di un gruppo (non banale) su sé stesso per coniugio non è libera perché per ogni $x \in G$, $gxg^{-1} = x$ se $g = x$.

Definizione 6.5.23. Sia G un gruppo che agisce su X. Per ogni punto $x \in X$ lo **stabilizzatore** di x è il sottogruppo di G che fissa x

$$\mathrm{stab}(x) = \{g \in G : gx = x\}$$

Esempio 6.5.24. Un'azione è libera se e solo se tutti gli stabilizzatori sono banali.

Esempio 6.5.25. L'azione di S^1 su S^2 per rotazioni orizzontali (Esempio 6.5.8) non è libera in quanto gli stabilizzatori dei poli sono tutto S^1.

Esercizio 6.5.26. Dimostrare che un'azione di G su X è libera se e solo se la funzione $F : X \times G \to X \times X$ data da $F(x, g) = (x, gx)$ è iniettiva.

Data un'azione di G su X, si definisce la relazione di equivalenza $\sim_G$

$$x \sim_G y \Leftrightarrow \exists g \in G : \ y = gx$$

essa è una relazione d'equivalenza perché G è un gruppo. Le classi di equivalenza sono le orbite $[x] = Gx$.

Definizione 6.5.27. Sia G un gruppo che agisce su uno spazio topologico X. Il quoziente di X per l'azione di G, detto anche spazio delle orbite, è $X/\sim_G$. È solitamente in uso la notazione $X/G = X/\sim_G$.

La notazione X/G va usata con cura, infatti è uguale a quella del collasso di sottoinsiemi. Per esempio: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è il quoziente che si ottiene da $\mathbb{R}$ identificando tutto $\mathbb{Z}$ a un punto o è il quoziente di $\mathbb{R}$ per l'azione di $\mathbb{Z}$? E quale azione stiamo considerando? Di solito tutte queste cose sono chiare dal contesto, altrimenti vanno specificate.

Nel caso si stia lavorando con azioni a destra/sinistra e si voglia specificare, sono in uso le notazioni $G\backslash X$ e X/G per denotare il quoziente di X per un'azione a sinistra e a destra rispettivamente. (Si noti che in generale, quando non si specifica, si usa la notazione X/G per le azioni a sinistra).

Teorema 6.5.28. *Se X è uno spazio topologico e $G \leq \mathrm{omeo}(X)$, allora la proiezione naturale $\pi : X \to X/G$ è aperta. Se inoltre G è un gruppo finito, allora π è anche chiusa.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $A \subseteq X, \mathrm{sat}(A) = \pi^{-1}(\pi(A))$. Per definizione di topologia quoziente, $\pi(A)$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto. Quindi dire che π è aperta è equivalente a dire che il saturato di un aperto è aperto. Sia A un aperto di X. Per ogni $g \in \mathrm{omeo}(X)$, $g(A)$ è aperto. Inoltre, visto che stiamo trattando l'azione di un gruppo, $\mathrm{sat}(A) = GA = \cup_{g \in G} g(A)$. Ne segue che $\mathrm{sat}(A)$ è unione di aperti e quindi è aperto.

Lo stesso ragionamento dimostra che se G è finito allora π è anche chiusa (gli omeomorfismi sono mappe chiuse e unione finita di chiusi è chiusa). □

Corollario 6.5.29. *Se un gruppo G agisce su uno spazio topologico X a base numerabile, allora X/G è a base numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema 2.2.15 e il Teorema 6.5.28. □

Corollario 6.5.30. *Il quoziente di un compatto T_2 per l'azione di un gruppo finito è compatto e T_2.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dai Teoremi 3.1.25, 3.1.24 e 6.5.28. □

La seguente è una generalizzazione del Teorema 2.1.4.

Teorema 6.5.31. *Sia X uno spazio topologico e $G \leq \mathrm{omeo}(X)$. Allora X/G è di Hausdorff se e solo se l'insieme*

$$\Delta = \{(x, g(x)) : \ x \in X, g \in G\}$$

è chiuso in $X \times X$.

DIMOSTRAZIONE. Dire $[x] \neq [y]$ è equivalente a dire $(x, y) \notin \Delta$. Δ è chiusa se e solo se il suo complementare è aperto, se e solo se ogni $(x, y) \notin \Delta$ è interno a Δ^c, se e solo se esistono aperti A, B tali che $x \in A$ e $y \in B$ con $A \times B \subseteq \Delta^c$. $A \times B \subseteq \Delta^c$ equivale a dire che non esiste $g \in G$ tale che $g(a) \in B$ con $a \in A$. Cioè $\operatorname{sat}(A) \cap \operatorname{sat}(B) = \emptyset$. Ma ciò è equivalente a dire che $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$. Chiarmente $[x] \in \pi(A)$ e $[y] \in \pi(B)$. Quindi Δ chiuso equivale a dire che ogni $[x] \neq [y]$ sono separati da aperti. □

Corollario 6.5.32. *Sia X uno spazio topologico e sia $G < \operatorname{omeo}(X)$. Se c'è anche una sola orbita che non è chiusa, allora X/G non è T_2.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che esista $x \in X$ tale che l'orbita Gx non sia chiusa. Allora esiste $y \in X$ tale che $[x] \neq [y]$ ma $y \in \overline{Gx}$. Per ogni intorno A di y esiste quindi $g \in G$ tale che $gx \in A$. Per cui $(x, y) \notin \Delta$ è un punto di aderenza di Δ, il quale risulta non chiuso, ergo X/G non è T_2. □

Esempio 6.5.33. Sia $X = \mathbb{R}^3$ e consideriamo l'azione di $\mathbb{R}^*$ data dalla moltiplicazione. Le orbite non son chiuse perché si accumulano nell'origine. Dunque il quoziente non è T_2. Questo è uno dei motivi per cui quando si fa il proiettivo si toglie l'origine.

Il viceversa del Corollario 6.5.32 in generale non è vero:

Esempio 6.5.34. Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Consideriamo l'azione di $\mathbb{R}^*$ data da $\rho(\lambda)(x, y) = (\lambda x, y/\lambda)$. Se $ab \neq 0$, l'orbita di (a, b) è
$$[(a, b)] = \{(x, y) : \; xy = ab\}.$$
Se $x = 0$ l'orbita di $(0, y)$ è l'asse Y meno l'origine e se $y = 0$ l'orbita di $(x, 0)$ è l'asse X meno l'origine. I punti di $A/\mathbb{R}^*$ sono quindi
$$[(1, c)] = \{xy = c\} \text{ per } c \neq 0, \qquad [X], \qquad [Y].$$
Le orbite son dunque chiuse in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Ma un aperto saturo che contiene l'asse X e un aperto saturo che contiene l'asse Y si intersecano sempre in un ramo di iperbole $xy = \varepsilon$ per un certo $\varepsilon \neq 0$. Quindi $A/\mathbb{R}$ non è T_2.

Vediamo adesso un esempio classico di azione di gruppi: il vento in direzione d. Fissiamo una direzione non nulla $d \in \mathbb{R}^2$ e consideriamo l'azione su $\mathbb{R}^2$ di $\mathbb{R}$ come gruppo additivo
$$\rho_d : \mathbb{R} \to \operatorname{omeo}(\mathbb{R}^2) \qquad \rho_d(\lambda)(v) = v + \lambda d$$
Le orbite dell'azione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^2$ sono rette parallele con direzione d (e quindi son chiuse).

Esercizio 6.5.35. Dimostrare che, per qualsiasi direzione d, il quoziente $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Sia ora $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (l'azione è quella naturale per traslazioni). Usando il Teorema del Compatto Hausdorff si dimostra agilmente che X è omeomorfo al toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

Se $[v] = [w]$ in X, cioè se $v - w \in \mathbb{Z}^2$, allora $\rho_d(\lambda)v - \rho_d(\lambda)w = v - w \in \mathbb{Z}^2$, cioè $[\rho_d(\lambda)(v)] = [\rho_d(\lambda)(w)]$. Per il Corollario 2.2.17, ρ_d induce una rappresentazione
$$\mathbb{R} \to \operatorname{omeo}(T^2) \qquad \lambda([v]) = [\rho_d(\lambda)(v)].$$
Le orbite nel toro sono linee "parallele" che si avvolgono su T^2. La direzione $d = (x, y)$ si dice razionale se $x/y \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, per esempio se $d \in \mathbb{Q}^2$. Se d è razionale allora si può dimostrare che il quoziente è Hausdorff.

Esercizio 6.5.36. Determinare il quoziente $T^2/\mathbb{R}$ nel caso $d \in \mathbb{Q}^2$. (Si pensi a cosa succede quando si srotola il cilindretto di cartone dei rotoli di carta igienica.)

Se la direzione non è razionale, per esempio $d = (1, \sqrt{2})$, le orbite in T^2 sono dense. In particolare in questo caso il quoziente non è Hausdorff.

Esercizio 6.5.37. Dimostrare che per $d = (1, \sqrt{2})$ le orbite dell'azione di $\mathbb{R}$ su T^2 sono tutte dense.

6.6. Azioni continue, proprie e propriamente discontinue

Prima di cominciare dimostriamo un lemmetto, che sistema il problema della definizione non universale di mappa propria (per alcuni una mappa propria è chiusa per definizione).

Lemma 6.6.1. *Siano X e Y spazi di Hausdorff. Se Y è localmente compatto allora ogni mappa $f : X \to Y$ che sia propria è anche chiusa.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : X \to Y$ una mappa propria e sia $A \subseteq X$ un chiuso. Dobbiamo far vedere che $\overline{f(A)} = f(A)$. Sia $y \in \overline{f(A)}$. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un sistema fondamentale di intorni compatti di y, che esiste per il Teorema 3.5.9 in quanto Y è T_2 e localmente compatto. Siccome f è propria allora ogni $f^{-1}(U_i)$ è compatto, ergo chiuso in X perché X è T_2.

Siccome $y \in \overline{f(A)}$, ogni intersezione finita degli U_i interseca $f(A)$. Sia $U_o \in \mathcal{U}$. Gli insiemi $f^{-1}(U_i) \cap A \cap f^{-1}(U_o)$ sono dei chiusi di $f^{-1}(U_o)$ con la proprietà delle intersezioni finite (Definizione 3.3.1). Siccome $f^{-1}(U_o)$ è compatto, per il Lemma 3.3.2, esiste

$$x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i) \cap A.$$

Quindi $f(x) \in U_i$ per ogni $i \in I$. Da ciò, essendo Y di Hausdorff e $\mathcal{U}$ un sistema fondamentale di intorni di y, segue che $f(x) = y$. Siccome $x \in A$ allora $y \in f(A)$. □

Esercizio 6.6.2. Sia $f : X \to Y$ una mappa continua e propria tra spazi topologici. Dimostrare che se Y è localmente compatto allora anche X lo è. Trovare un controesempio se f è propria ma non continua.

Definizione 6.6.3. Sia G un gruppo topologico e X uno spazio topologico. Un'azione di G su X si dice **continua** se la funzione $f : X \times G \to X$ data da

$$f(x, g) = gx$$

è continua rispetto alla topologia prodotto di $X \times G$.

Esempio 6.6.4. L'azione di G su sé stesso per moltiplicazione o coniugio è continua per definizione di gruppo topologico.

Esempio 6.6.5. Sia $G < \mathbb{R}$ il gruppo additivo generato da 1 e π, con la topologia indotta da $\mathbb{R}$. Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\varphi \in \mathrm{omeo}(X)$ data da $\varphi(x) = x + 1$. Sia $\rho : G \to \mathrm{omeo}(\mathbb{R})$ definita da $\rho(m + n\pi) = \varphi^n$. Essa è una rappresentazione e dunque definisce un'azione di G su $\mathbb{R}$. Siccome π non è razionale, esistono $m_k, n_k \in \mathbb{Z}$ tali che $m_k + n_k\pi \to 0$, con $n_k \to \infty$. In particolare $\rho(m_k + n_k\pi) = \varphi^{n_k}$ non converge all'identità. Ponendo $g_k = m_k + n_k\pi$, si ha che $(0, g_k) \to (0, 0)$ ma $f(0, g_k) = \varphi^{n_k}(0) = n_k$ non converge a $0 = f(0, 0)$. Quindi f non è continua (Teorema 1.7.9) e l'azione non è continua.

Definizione 6.6.6. Un'azione di un gruppo topologico G su uno spazio X si dice **chiusa** se la funzione $F : X \times G \to X \times X$ data da

$$F(x, g) = (x, gx)$$

è chiusa. L'azione si dice **propria** se F è propria.

Lemma 6.6.7. *Se X e G sono T_2 e localmente compatti, allora un'azione di G su X è propria se e solo se è chiusa e ogni punto ha stabilizzatore compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome la locale compattezza e l'essere Hausdorff passano ai prodotti, per il Lemma 6.6.1 se X e G sono T_2 e localmente compatti allora ogni azione propria è anche chiusa. Inoltre, se l'azione è propria allora $F^{-1}(x, x) = \{x\} \times \mathrm{stab}(x)$ è compatto, quindi gli stabilizzatori dei punti son compatti.

Viceversa, se l'azione è chiusa e ogni punto ha stabilizzatore compatto allora $F^{-1}(x, gx) = \{x\} \times g\,\mathrm{stab}(x)$ è compatto e per il Corollario 3.1.33 l'azione è anche propria. □

Teorema 6.6.8 (Azione chiusa, quoziente T_2)**.** *Sia G un gruppo topologico che agisce su uno spazio topologico X. Se l'azione è chiusa allora X/G è di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F(x,g) = (x, gx)$. Siccome F è chiusa, la sua immagine è un chiuso di $X \times X$. L'immagine di F è l'insieme $\{(x, gx) : x \in X, g \in G\}$. Per il Teorema 6.5.31, X/G è T_2. $\square$

Esercizio 6.6.9. Sia G un gruppo topologico che agisce su X. Dimostrare che se G è T_2 e l'azione è chiusa allora X è T_2. (Si suggerisce di usare i Teoremi 1.6.12 e 2.1.4).

Teorema 6.6.10. *Sia G un gruppo compatto e T_2 che agisce in modo continuo su uno spazio X localmente compatto e T_2. Allora l'azione è chiusa. In particolare X/G è di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F : X \times G \to X \times X$ data da $F(x,g) = (x, gx)$. Siccome l'azione è continua, le componenti di F sono continue e quindi F è continua. Se dimostriamo che F è propria abbiam finito perché per il Lemma 6.6.1 essa risulta anche chiusa e per il Teorema 6.6.8 il quoziente è T_2.

Sia $K \subseteq X \times X$ un compatto. L'insieme K è compatto in un T_2 e quindi chiuso. Per continuità l'insieme $F^{-1}(K)$ è chiuso in $X \times G$. Sia ora K_1 la proiezione di K sul primo fattore di $X \times X$. Siccome le proiezioni sono continue, K_1 è compatto. Inoltre

$$F^{-1}(K) = \{(x,g) : (x, gx) \in K\} \subseteq \{(x,g) : x \in K_1\} = K_1 \times G$$

Quindi $F^{-1}(K)$ è un chiuso di $K_1 \times G$. Siccome G è compatto allora $K_1 \times G$ è compatto e quindi $F^{-1}(K)$ è compatto. Quindi F è propria. $\square$

Vi è una naturale corrispondenza biunivoca $G/\operatorname{stab}(x) \to Gx$ che è continua se l'azione di G lo è (Teorema 2.2.16, $\operatorname{stab}(x)$ agisce a destra su G in quanto suo sottogruppo).

Teorema 6.6.11. *Sia G un gruppo topologico che agisce in modo continuo su uno spazio topologico X. Se l'azione è chiusa, allora per ogni $x \in X$ la mappa naturale $G/\operatorname{stab}(x) \to Gx$ è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F : X \times G \to X \times X$ definita da $F(x,g) = (x, gx)$. Sia $x \in X$. La mappa naturale $f : G/\operatorname{stab}(x) \to G_x$ data da $f[g] = gx$ è continua e biunivoca per come è definita ($G/\operatorname{stab}(x)$ è dotato della topologia quoziente). Vediamo che è anche chiusa e ciò concluderà grazie al Teorema 1.7.43.

Sia A un chiuso di $G/\operatorname{stab}(x)$ e sia C la sua preimmagine in G. C è un chiuso di G perché la proiezione $G \to G/\operatorname{stab}(x)$ è continua. Quindi $X \times C$ è un chiuso di $X \times G$. Siccome F è chiusa, allora $F(X \times C)$ è un chiuso di $X \times X$. Dunque $F(X \times C) \cap \{x\} \times X$ è un chiuso di $\{x\} \times X$. D'altronde $F(X \times C) \cap \{x\} \times X = \{(x, gx) : g \in C\} = \{(x, gx) : [g] \in A\} = \{x\} \times f(A)$. Quindi $\{x\} \times f(A)$ è un chiuso di $\{x\} \times X$. Dunque $f(A)$ è un chiuso di X, in particolare di $G_x \subseteq X$. $\square$

Esempio 6.6.12. Se G agisce su X in modo continuo, chiuso e libero, allora per ogni $x \in X$ l'orbita G_x è omeomorfa a G.

Esempio 6.6.13. Se G agisce su X in modo continuo, chiuso e transitivo, allora per ogni $x \in X$ si ha che $Gx = X$ è omeomorfo a $G/\operatorname{stab}(x)$.

Se si lavora con spazi T_2 e localmente compatti (come le varietà topologiche per esempio) la nozione di azione propria è più forte di quella di azione chiusa (Lemma 6.6.7). Vediamo adesso una caratterizzazione topologica delle azioni proprie.

Teorema 6.6.14. *Sia G un gruppo che agisce continuamente su uno spazio X. Se entrambi X e G sono T_2 e localmente compatti, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *L'azione è propria;*
(2) *l'azione è propria e chiusa;*
(3) *per ogni compatto $K \subseteq X$ l'insieme*

$$B = \{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

è compatto in G;

(4) *per ogni* $x, y \in X$ *esistono aperti* $x \in U_x$ *e* $y \in U_y$ *per cui l'insieme*

$$A = \{g \in G : g(U_x) \cap U_y \neq \emptyset\}$$

è relativamente compatto (ha chiusura compatta) in G.

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con $F : X \times G \to X \times X$ la funzione $F(x, g) = (x, gx)$ data dall'azione di G su X. Per il Lemma 6.6.7, (1) e (2) sono equivalenti.

(1) $\Rightarrow$ (3). Sia $K \subseteq X$ un compatto. Allora $K \times K$ è compatto in $X \times X$. Siccome F è propria l'insieme $F^{-1}(K \times K) = \{(x, g) : x \in K, gx \in K\}$ è compatto. Compatta è quindi anche la sua proiezione su G, che è data da $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Siccome X è localmente compatto, per ogni x, y esistono intorni compatti $x \in V_x$ e $y \in V_y$. Siano $U_x \subseteq V_x$ e $U_y \subseteq V_y$ intorni aperti rispettivamente di x e y. L'unione $K = V_x \cup V_y$ è compatta. L'insieme $A = \{g \in G : g(U_x) \cap U_y \neq \emptyset\}$ è un sottoinsieme di $B = \{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ che è compatto — e quindi chiuso perché G è T_2 — per (3). Quindi la chiusura di A è contenuta nel compatto B e dunque $\bar{A}$ è compatto.

(4) $\Rightarrow$ (1). Diamo la dimostrazione nel caso in cui X e G siano a base numerabile. In questo caso la compattezza equivale alla compattezza per successioni (Teorema 3.4.9).[5] Sia $K \subseteq X \times X$ un compatto. Dobbiam far vedere che $F^{-1}(K)$ è compatto. Sia (x_n, g_n) una successione in $F^{-1}(K)$. Mostriamo che a meno di sottosuccessioni essa ha un limite in $F^{-1}(K)$. Siccome K è compatto, a meno di sottosuccessioni $(x_n, g_n x_n)$ converge a un punto $(x, y) \in K$. In particolare $x_n \to x$. Siano U_x e U_y intorni come in (4). Siccome $(x_n, g_n x_n) \to (x, y)$ possiamo supporre che $(x_n, g_n x_n) \in U_x \times U_y$. L'insieme dei g_n è contenuto in A, che è relativamente compatto per (4) e quindi, a meno di sottosuccessioni, esiste $g \in G$ tale che $g_n \to g$. Quindi $(x_n, g_n) \to (x, g)$. Siccome F è continua $(x_n, g_n x_n) = F(x_n, g_n) \to F(x, g) = (x, gx)$. Siccome $(x_n, g_n x_n) \to (x, y)$ si ha $gx = y$ (nei T_2 c'è unicità del limite) e dunque $(x, g) \in F^{-1}(K)$. □

Due parole meritano le azioni di gruppi discreti. Se un gruppo G è discreto esso è automaticamente T_2 e localmente compatto, e tutte le azioni di G su spazi topologici sono continue. Inoltre un sottoinsieme di G è compatto se e solo è relativamente compatto se e solo se è finito. In particolare, il Teorema 6.6.10 ci dice che se X è T_2 e localmente compatto, allora i suoi quozienti per azioni di gruppi finiti sono T_2.

Definizione 6.6.15. Sia X uno spazio topologico. Sia G un gruppo discreto che agisce su X. L'azione di G si dice **propriamente discontinua** se per ogni compatto $K \subseteq X$ l'insieme $B = \{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ è finito.

Il Teorema 6.6.14 si enuncia così per gruppi discreti:

Teorema 6.6.16. *Sia* G *un gruppo discreto che agisce su uno spazio topologico* X *localmente compatto e* T_2. *Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*

(1) *L'azione è propria;*
(2) *l'azione è propria e chiusa;*
(3) *l'azione è propriamente discontinua;*
(4) *per ogni* $x, y \in X$ *esistono aperti* $x \in U_x$ *e* $y \in U_y$ *tali che l'insieme*

$$A = \{g \in G : g(U_x) \cap U_y \neq \emptyset\}$$

sia finito.

Per i gruppi discreti, di particolare rilievo sono le azioni libere e propriamente discontinue.

[5] Il caso generale si dimostra esattamente nello stesso modo rimpiazzando le successioni con le successioni generalizzate, si veda l'Appendice B.

Teorema 6.6.17. *Sia X uno spazio T_2 e localmente compatto. Sia G un gruppo discreto che agisce su X in modo libero e propriamente discontinuo. Allora per ogni $x \in X$ esiste un intorno V_x di x tale che $g(V_x) \cap V_x = \emptyset$ per ogni $g \neq id$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in X$. Per il Teorema 6.6.16 punto (4) (ponendo $y = x$ ed eventualmente rimpiazzando U_x con $U_x \cap U_y$) esiste un aperto U_x di x tale che $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ per $g = id$ e al massimo un numero finito di altri elementi $g_1, \dots, g_k$. Poniamo $g_0 = id$. Siccome l'azione è libera, $x \neq g_i(x)$ per $i \neq 0$. Siccome X è T_2 e i punti $g_i(x)$ sono in numero finito, per ogni $i = 0, \dots, k$ esiste un intorno U_i di $g_i(x)$ tale che gli U_i siano disgiunti tra loro. Siccome G agisce per omeomorfismi per definizione, esiste un intorno V_x di x che sia contenuto in U_x e tale che $g_i(V_x) \subseteq U_i$ (si è usato ancora il fatto che i g_i sono in numero finito). In particolare per ogni $i \neq 0$ si ha $g_i(V_x) \cap V_x \subseteq U_i \cap U_0 = \emptyset$. Siccome $V_x \subset U_x$, per ogni altro $g \neq g_i$ si ha $g(V_x) \cap V_x = \emptyset$. Quindi $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ solo per $g = g_0 = id$. □

Il viceversa del Teorema 6.6.17 non è vero in generale.

Esempio 6.6.18. Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sia $G = \mathbb{Z}$ che agisce su $\mathbb{R}^2$ tramite $n(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. L'azione è libera perché abbiam tolto l'origine. Si noti che l'orbita di (x_0, y_0) è contenuta nell'iperbole $xy = x_0 y_0$ (si veda anche l'Esempio 6.5.34). Se $x \neq 0$ basta prendere $0 < \varepsilon < |x|/3$ e $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \mathbb{R}$. Si verifica immediatamente che $n(U) \cap U = \emptyset$ per ogni $n \neq 0$. Similmente se $y \neq 0$. D'altronde i punti $(1,0)$ e $(0,1)$ non hanno intorni con la proprietà richiesta dal punto (4) del Teorema 6.6.16. Quindi l'azione non è propriamente discontinua.

Teorema 6.6.19. *Sia X una varietà topologica di dimensione n e G un gruppo discreto che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su X. Allora X/G è una varietà topologica di dimensione n.*

DIMOSTRAZIONE. X è T_2, a base numerabile e localmente compatto per definizione di varietà. Siccome la proiezione $\pi : X \to X/G$ è aperta (Teorema 6.5.28) allora X/G è a base numerabile e localmente compatto. Siccome l'azione è propriamente discontinua allora X/G è T_2 (Teorema 6.6.8). Vediamo che X/G è localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Sia $x \in X$ e sia U un intorno di x omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$. Per il Teorema 6.6.17 esiste un intorno aperto $V_x \subseteq U$ tale che $gV_x \cap V_x = \emptyset$ per ogni $g \neq id$. Equivalentemente $gV_x \cap hV_x \neq \emptyset \Rightarrow g = h$. In altre parole, V_x contiene al più un elemento di ogni orbita. Ne segue che $\pi|_{V_x} : V_x \to \pi(V_x)$ è iniettiva. Essa è tautologicamente suriettiva e siccome π è aperta, essa è un omeomorfismo. Siccome π è aperta, $\pi(V_x)$ è un intorno aperto di $\pi(x)$. Siccome $V_x \subseteq U$, anch'esso è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$. La tesi segue. □

Il seguente risultato è una utile variante del Teorema 6.6.11.

Teorema 6.6.20. *Sia G un gruppo T_2, localmente compatto e a base numerabile. Sia X uno spazio T_2 e localmente compatto. Se G agisce su X in modo continuo e transitivo, allora X è omeomorfo a $G/\operatorname{stab}(x)$ (per ogni $x \in X$).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in X$ e $f : G \to X$ definita da $f(g) = gx$. Essa è continua e suriettiva perché l'azione è continua e transitiva. La mappa naturale $[f] : G/\operatorname{stab}(x) \to X$ data da $[f]([g]) = gx$ è quindi continua e biunivoca. Se mostriamo che è aperta abbiam finito. Siccome la proiezione $\pi : G \to G/\operatorname{stab}(x)$ è continua basta mostrare che f è aperta. Siccome ogni aperto è intorno dei suoi punti, basta dimostrare che se U è un intorno di g allora $f(U)$ è un intorno di $f(g)$. Se $U \subseteq G$ è un aperto e $g \in U$, siccome G è un gruppo topologico allora $g^{-1}U$ è un intorno dell'identità. Inoltre, per come è definita la f, si ha che $f(gh) = gf(h)$.

Ci siamo quindi ricondotti a dover dimostrare che per ogni intorno U dell'identità, $f(U)$ è un intorno di x. Sia U un intorno dell'identità. Siccome G è un gruppo topologico, la funzione $\varphi(g,h) = g^{-1}h$ è continua e quindi esiste un intorno V dell'identità tale che $\varphi(V \times V) \subset U$. Ciò significa che $g^{-1}h \in U$ per ogni $g, h \in V$. Inoltre, siccome G è T_2 e localmente compatto, possiamo scegliere V in modo che sia compatto.

Adesso inseriamo il fatto che G è a base numerabile. Sia $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base per la topologia di G. Definiamo il seguente insieme di indici

$$I = \{i \in \mathbb{N} :\ \exists g \in G : g \in B_i \subseteq gV\}.$$

A priori I potrebbe essere vuoto, ma di sicuro è al più numerabile. Per ogni $i \in I$ definiamo $G_i = \{g \in G :\ g \in B_i \subseteq gV\}$. Per ogni $i \in I$ scegliamo $g_i \in G_i$. Per ogni $g \in G$, l'insieme gV è un intorno di g, in particolare la sua parte interna è non vuota ed è unione di elementi di base:

$$\forall g \in G\ \exists i \in \mathbb{N} :\ g \in B_i \subseteq \mathrm{Int}(gV) \subseteq gV$$

da cui

$$\forall g \in G\ \exists i \in I :\ g \in B_i \subseteq g_i V$$

in altre parole

$$G = \cup_{i\in I} g_i V$$

è unione numerabile di traslati di V.

Sia $A_i = f(g_i V) = g_i f(V)$. Ogni A_i è compatto in quanto immagine di un compatto, ergo chiuso poiché X è T_2. Inoltre $X = f(G) = f(\cup_i g_i V) = \cup_i f(g_i V) = \cup_i A_i$. Siccome X è T_2 e localmente compatto, per il Teorema 3.5.10 uno degli A_i ha parte interna non vuota. Quindi $g_i^{-1} A_i = f(V)$ ha parte interna non vuota. Se $gx \in \mathrm{Int}\, f(V)$ allora $g^{-1} f(V)$ è un intorno di x. Si noti che $g \in V$. Siccome V è stato scelto in modo che $g^{-1}h \in U$ per ogni $g, h \in V$, allora $g^{-1} f(V) = \{g^{-1}hx : h \in V\} \subseteq f(U)$. Dunque $f(U)$ è un intorno di x. □

Esempio 6.6.21. Il gruppo $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^3)$ delle isometrie di $\mathbb{R}^3$ che preservano l'orientazione agisce transitivamente su $\mathbb{R}^3$. Gli stabilizzatori dei punti sono tutti coniugati (ergo omeomorfi) a $SO(3) = \mathrm{stab}(0)$. Quindi $\mathbb{R}^3 \simeq \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^3)/SO(3)$.

Esempio 6.6.22. Il gruppo $SO(3)$, che è omeomorfo a $\mathbb{RP}^3$, agisce per isometrie su S^2, con stabilizzatori omeomorfi a $SO(2)$, che è un S^1. Quindi $S^2 \simeq SO(3)/SO(2) \simeq \mathbb{RP}^3/S^1$.

Nel Teorema 6.6.20, se l'azione non è transitiva ma le orbite son chiuse, allora G_x è omeomorfo a $G/\mathrm{stab}(x)$ perché G_x, essendo un chiuso di un T_2 e localmente compatto, è T_2 è localmente compatto. Quindi il Teorema 6.6.20 si può applicare all'azione di G su G_x.

Esempio 6.6.23. L'azione di $\mathbb{R}$ su S^2 per rotazioni orizzontali non è transitiva ma le orbite son chiuse. Se x è il polo Nord o Sud, allora il suo stabilizzatore è tutto $\mathbb{R}$ e l'orbita è un sol punto, omeomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{R}$. Altrimenti lo stabilizzatore è $2\pi\mathbb{Z}$ e l'orbita, che è un parallelo, è omeomorfa a $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq S^1$.

Riassumiamo nella seguente tabella i principali risultati sulle azioni di gruppi topologici

G agisce su X per omeomorfismi, con X e G entrambi T_2 e localmente compatti		
Azione propria	$\Longleftrightarrow$	Azione chiusa e stabilizzatori compatti
Azione chiusa; oppure G compatto e azione continua; oppure G finito, oppure G discreto, azione propriamente discontinua	$\Rightarrow$	X/G di Hausdorff
Azione continua e chiusa; oppure Azione continua, G a base numerabile, orbite chiuse	$\Rightarrow$	$Gx \simeq G/\operatorname{stab}(x)$
Azione continua, chiusa e libera; oppure Azione continua e libera, G a base numerabile	$\Rightarrow$	$Gx \simeq G$
Azione continua, chiusa e transitiva; oppure Azione continua e transitiva, G a base numerabile	$\Rightarrow$	$X \simeq G/\operatorname{stab}(x)$
G discreto, X varietà di dimensione n, azione libera e propriamente discontinua	$\Rightarrow$	X/G varietà di dimensione n

Concludiamo infine questa sezione con un esempio celebre: la **fibrazione di Hopf**.

Esempio 6.6.24. Sia $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ e sia $S^1 = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$. S^1 agisce naturalmente su S^3 per moltiplicazione complessa:

$$u(z,w) = (uz, uw).$$

Il quoziente S^3/S^1 è omeomorfo a S^2.

DIMOSTRAZIONE.

$$\frac{S^3}{S^1} = \frac{S^{\cancel{3}\,2}}{S^{\cancel{1}}} = \frac{S^2}{S^0} = \frac{S^2}{1} = S^2.$$

Ok, siamo seri. L'azione è continua perché la moltiplicazione per un numero complesso è continua. Siccome S^1 e S^3 sono compatti e T_2, il quoziente è compatto e T_2 per il Teorema 6.6.10. Sia $D = \{(z,w) \in S^3 : w \in \mathbb{R}, w \geq 0\}$. D è la calotta superiore della sfera ottenuta dall'intersezione di S^3 col piano $\Im(w) = 0$. Più precisamente $D = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1, t \geq 0\}$. In particolare D è compatto. Inoltre, interseca tutte le orbite, infatti se $(z,w) \in S^3$ e $w \notin \mathbb{R}$, in particolare $w \neq 0$ e quindi, posto $u = \bar{w}/|w|$ si ha $u \in S^1$ e $u(z,w) = (uz, |w|) \in D$. Per il Teorema 6.2.3, S^3/S^1 è omeomorfo a D modulo la relazione d'equivalenza ristretta a D. Vediamo quindi chi sono le intersezioni delle orbite con D. Se $t > 0$ allora l'orbita di (z,t) interseca D solo in (z,t). Se invece $t = 0$ allora il cerchio $\{(z,0) : |z| = 1\}$ è un'unica orbita. Quindi la relazione d'equivalenza ristretta a D è il collasso del bordo di D a un punto, il cui quoziente è omeomorfo S^2. □

Si noti che per il Teorema 6.6.11 le orbite sono omeomorfe a S^1 (gli stabilizzatori sono tutti banali). Geometricamente si è "fibrato" S^3 in cerchi, che sono le orbite dell'azione di S^1 su S^3, e il quoziente è magicamente una sfera S^2.

6.7. La topologia degli spazi proiettivi

Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, il proiettivo di V è per definizione il quoziente di $V \setminus \{0\}$ tramite l'azione naturale di $\mathbb{K}^*$ data dalla moltiplicazione di $v \in V$ per $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$.

Il proiettivo $\mathbb{KP}^n$ è per definizione il proiettivo di $\mathbb{K}^{n+1}$. Ci limiteremo qui al caso di $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, che consideriamo dotati della topologia usuale (e $\mathbb{K}^{n+1}$ di quella prodotto). Gli spazi proiettivi sono quindi naturalmente muniti della topologia quoziente. Denotiamo con $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{KP}^n$ la proiezione. Un punto di $\mathbb{KP}^n$ si denota generalmente attraverso le cosiddette **coordinate omogenee** $[x_0, \ldots, x_n]$ intendendo questa scrittura come sinonimo di $[(x_0, \ldots, x_x)]$. Quindi per esempio $[x_0, \ldots, x_n] = [3x_0, \ldots, 3x_n]$. Se $[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{KP}^n$ con $x_0 \neq 0$, allora possiamo scegliere il rappresentante con $x_0 = 1$ cioè il punto $[1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}]$. In altre parole, dentro $\mathbb{KP}^n$ vive una (molte in effetti) copia di $\mathbb{K}^n$ tramite la corrispondenza

$$\mathbb{K}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow [1, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{KP}^n.$$

Ovviamente questo giochino si può fare per ogni $i = 0, \ldots, n$ (e non solo).

Definizione 6.7.1. Siano $[x_0, \ldots, x_n]$ le coordinate omogenee di $\mathbb{KP}^n$. La i-esima **carta affine** standard di $\mathbb{KP}^n$ è l'insieme $\{x_i \neq 0\}$ identificato con $\mathbb{K}^n$ tramite la corrispondenza

$$\mathbb{KP}^n \ni [x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n] \longrightarrow (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) \in \mathbb{K}^n$$

$$\mathbb{K}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow [x_1, \ldots, x_i, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n] \in \mathbb{KP}^n.$$

Il vettore $(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) \in \mathbb{K}^n$ si chiama vettore delle coordinate affini (o coordinate non omogenee) del punto $[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{KP}^n$ nella carta affine $x_i \neq 0$.

Esercizio 6.7.2. Dimostrare che per $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ l'identificazione di una carta affine (con la topologia indotta dal proiettivo) con $\mathbb{K}^n$ (topologia standard) è un omeomorfismo.

Se si sta lavorando in una carta affine, per esempio $x_0 \neq 0$, i punti con $x_0 = 0$ sono detti **punti all'infinito**. Geometricamente la carta affine corrispondente a $x_0 \neq 0$ si vede così. In $\mathbb{K}^{n+1}$ si considera il piano affine α di equazioni $x_0 = 1$. Ogni retta non parallela ad α lo interseca in uno e un solo punto. L'intersezione di $\mathrm{span}(x_0, \ldots, x_n)$ con α è precisamente il punto $(1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$. Le rette parallele ad α sono i punti all'infinito della carta affine.

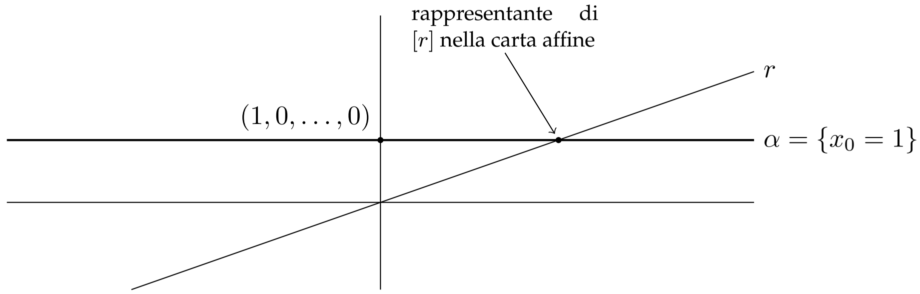


FIGURA 6. Carta affine di $\mathbb{KP}^n$

Se un punto sta in due carte affini diverse, per esempio se $[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{KP}^n$ ha sia x_0 che x_n diversi da zero, esso si leggerà nelle due carte in modo diverso. Nell'intersezione di due carte affini quindi, le due identificazioni con $\mathbb{K}^n$ danno luogo a una mappa di cambio di coordinate affini, da $\mathbb{K}^n$ in sé. Per esempio, nelle carte $\{x_0 \neq 0\}$ e $\{x_n \neq 0\}$ la mappa di cambio di carta è

$$(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow [1, x_1, \ldots, x_n] = [\frac{1}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1] \longleftrightarrow (\frac{1}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n})$$

Per cui il cambio di coordinate diventa

$$(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow (\frac{1}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n})$$

Per il Corollario 2.2.17, ogni elemento di $GL(n+1, \mathbb{K})$ induce un omeomorfismo di $\mathbb{KP}^n$. Inoltre, se f e $g \in GL(n+1, \mathbb{K})$ sono una multipla dell'altra, esse inducono la stessa funzione su $\mathbb{KP}^n$. Quindi $\mathbb{P}GL(n+1, \mathbb{K})$ è naturalmente identificato con un gruppo di omeomorfismi di $\mathbb{KP}^n$.

Definizione 6.7.3. Una **proiettività** di $\mathbb{KP}^n$ è un'applicazione di $\mathbb{KP}^n$ in sé indotta da un elemento di $\mathbb{P}GL(n+1, \mathbb{K})$.

Le proiettività di $\mathbb{KP}^1$ sono molto semplici da descrivere nelle carte affini e prendono il nome di **applicazioni di Moebius**.

L'azione su $\mathbb{K}^2$ di una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{K})$ è data da $A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Nella carta affine $y = 1$ si ha

$$A(z, 1) = [az + b, cz + d] = [\frac{az + b}{cz + d}, 1]$$

quindi nella carta affine $y = 1$, la proiettività indotta da A è l'applicazione di Moebius

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

e si intende che $f(-d/c) = \infty$ e $f(\infty) = a/c$.

Teorema 6.7.4. *Dati $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{KP}^1$ diversi tra loro e $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{KP}^1$ diversi tra loro, esiste un'unica applicazione di Moebius f tale che $f(z_i) = w_i$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $v_i, u_i \in \mathbb{K}^2$ tali che $z_i = [v_i]$ e $w_i = [u_i]$. Siccome z_1, z_2, z_3 sono diversi tra loro, in particolare v_1, v_2 non sono allineati e quindi sono una base di $\mathbb{K}^2$. Esistono quindi λ_1, λ_2 tali che $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ e siccome i punti z_i son distinti tra loro, entrambi i λ_i sono diversi da zero. Quindi $[v_i] = [\lambda_i v_i]$ e, a meno di rimpiazzare v_i con $\lambda_i v_i$, possiamo supporre $v_3 = v_1 + v_2$. Lo stesso dicasi per u_1, u_2, u_3. Siccome v_1, v_2 è una base di $\mathbb{K}^2$, esiste una unica applicazione lineare A di $\mathbb{K}^2$ tale che $Av_1 = u_1$ e $Av_2 = u_2$ e per linearità $Av_3 = u_3$. La proiettività f indotta da A manda gli z_i nei w_i.

Vediamo l'unicità. Se g è una proiettività tale che $g(z_i) = w_i$, allora essa è indotta da un'applicazione lineare B tale che esistano dei coefficienti μ_i tali che $B(v_i) = \mu_i u_i$. Per linearità abbiamo $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = B(v_1) + B(v_2) = B(v_1 + v_2) = B(v_3) = \mu_3 u_3 = \mu_3(u_1 + u_2) = \mu_3 u_1 + \mu_3 u_2$. Siccome u_1, u_2 è una base di $\mathbb{K}^2$, ne segue che $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, quindi $B = \mu_3 A$ e dunque $g = f$. $\square$

Veniamo adesso alla topologia vera e propria degli spazi proiettivi.

Teorema 6.7.5. *I proietivi $\mathbb{RP}^n$ e $\mathbb{CP}^n$ sono T_2.*

DIMOSTRAZIONE. Ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ non allineati sono separati da coni aperti, cioè da aperti saturi. (Discorso simile per $\mathbb{CP}^n$). $\square$

Esercizio 6.7.6. Dimostrare che l'azione di $\mathbb{R}^*$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è chiusa. Dedurne che i proiettivi son T_2. (Stessa cosa per l'azione di $\mathbb{C}^*$ su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.)

Teorema 6.7.7. *I proietivi $\mathbb{RP}^n$ e $\mathbb{CP}^n$ sono a base numerabile e sono, globalmente e localmente, compatti e connessi per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. La relazione d'equivalenza che definisce i proiettivi è data dall'azione di $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ su $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Per il Teorema 6.5.28 la proiezione π è aperta. In particolare, siccome $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ è localmente compatto e localmente connesso per archi, anche gli spazi proiettivi lo sono. Inoltre, per il Teorema 2.2.15, gli spazi $\mathbb{KP}^n$ sono a base numerabile.

Infine, la sfera unitaria di $\mathbb{K}^{n+1}$, $S = \{||x|| = 1\}$, è compatta e interseca tutte le classi di equivalenza. Quindi $\mathbb{KP}^n = \pi(S)$ è compatto e connesso per archi in quanto immagine continua di un compatto e connesso per archi. $\square$

Corollario 6.7.8. *Gli spazi proiettivi su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono metrizzabili.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo compatti T_2 e a base numerabile, per il Corollario 5.2.12 sono metrizzabili. $\square$

In particolare, nei proiettivi si può lavorare con le successioni in modo abbastanza tranquillo (Corollario 1.7.11, Teoremi 1.5.8 e 5.6.14). Nel proiettivo, una successione $p_n = [v_n] \in \mathbb{KP}^n$ converge a $[v]$ se e solo se esistono numeri $\lambda_n \neq 0$ tali che $\lambda_n v_n \to v$ in $\mathbb{K}^{n+1}$.

Teorema 6.7.9. *Ogni carta affine è un aperto denso.*

DIMOSTRAZIONE. Facciamo la dimostrazione per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è analogo. A meno di proiettività possiamo supporre che la carta affine in questione sia quella $x_0 \neq 0$. In $\mathbb{R}^{n+1}$ consideriamo l'emisfero boreale aperto $B = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1, x_0 > 0\}$, e la sua chiusura $\overline{B} = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1, x_0 \geq 0\}$ (Figura 7).

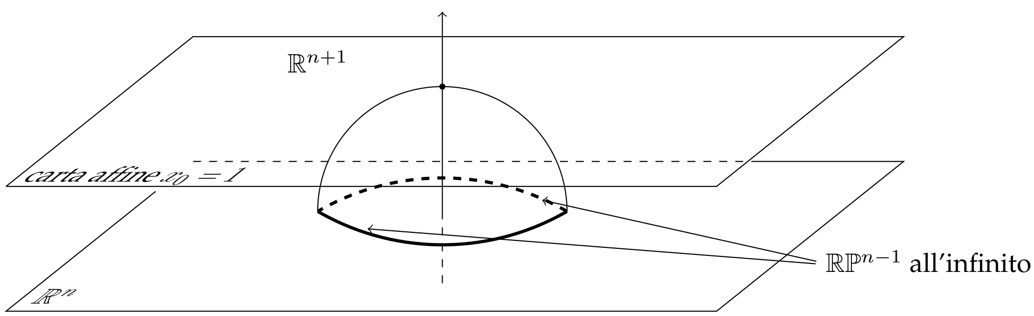


FIGURA 7. Visualizzazione del proiettivo attraverso l'emisfero boreale

Il saturato di B è un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\pi(\mathrm{sat}(B)) = \pi(B)$. L'immagine $\pi(B)$ è la carta affine $x_0 \neq 0$ e siccome π è aperta e $\mathrm{sat}(B)$ è un aperto, allora $\pi(B) = \pi(\mathrm{sat}(B))$ è aperto. Siccome π è continua e $\pi(\overline{B}) = \mathbb{RP}^n$, tale aperto è denso (Teorema 1.7.10). $\square$

In particolare, la frontiera topologica di una carta affine è formata dai punti all'infinito. Nel caso del piano proiettivo $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, i punti all'infinito della carta affine $x_0 \neq 0$ sono una retta proiettiva, corrispondente a $\pi(\{x_0 = 0\})$, che si chiama retta all'infinito. In generale in una carta affine di $\mathbb{KP}^n$ i punti all'infinito sono un $\mathbb{KP}^{n-1}$ per cui

$$\mathbb{KP}^n = \mathbb{K}^n \cup (\mathbb{KP}^{n-1})_\infty.$$

Con la terminologia della dimostrazione del Teorema 6.7.9, il $\mathbb{KP}^{n-1}$ all'infinito non è altro che l'immagine della frontiera di B in $\overline{B}$ (Figura 7). Si noti che ciò è una riformulazione dei Lemmi 6.2.6 e 6.2.7. In particolare abbiamo una ricetta ricorsiva per costruire i proiettivi reali: Si prende un disco D^n e lo si attacca su un proiettivo di dimensione $n-1$ incollando $\partial D_n = S^{n-1}$ su $\mathbb{RP}^{n-1}$ attraverso l'antipodale. Quindi $\mathbb{RP}^0$ è un punto; $\mathbb{RP}^1$ è un segmento con entrambi i vertici incollati su tale punto, quindi è un S^1; $\mathbb{RP}^2$ è un disco col bordo attorcigliato due volte su un $S^1 = \mathbb{RP}^1$; $\mathbb{RP}^3$ è un D^3 incollato su un $\mathbb{RP}^2$ e così via...

Corollario 6.7.10. *$\mathbb{KP}^n$ è una compattificazione di $\mathbb{K}^n$.*

DIMOSTRAZIONE. $\mathbb{KP}^n$ è compatto per il Teorema 6.7.7 e per il Teorema 6.7.9 contiene un sottoinsieme denso omeomorfo a $\mathbb{K}^n$ (una carta affine). $\square$

Un caso particolare è quello di $\mathbb{KP}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$. In questo caso la carta $x_0 \neq 0$ è omeomorfa a $\mathbb{K}$ e c'è un solo punto all'infinito: la classe proiettiva della retta di $\mathbb{K}^2$ di equazione $x_0 = 0$ (che in carta affine corrisponderebbe a $[1, \infty]$). Per questo si suole dire che

$$\mathbb{KP}^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

In altre parole, $\mathbb{KP}^1$ è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{K}$.

Teorema 6.7.11. *$\mathbb{CP}^1$ è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che $\mathbb{C}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$. □

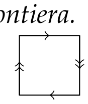
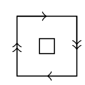
Corollario 6.7.12. *$\mathbb{RP}^1$ è omeomorfo a un cerchio, $\mathbb{CP}^1$ è omeomorfo a una sfera.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ sono T_2 e localmente compatti, le loro compattificazioni di Alexandroff sono uniche a meno di omeomorfismi. S^1 è la compattificazione di $\mathbb{R}$ e S^2 è quella di $\mathbb{R}^2$. □

6.8. $\mathbb{RP}^2$ e la chiusura proiettiva di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

Abbiamo visto che $\mathbb{RP}^2$ e $\mathbb{CP}^1$ sono entrambi compattificazioni di $\mathbb{R}^2$. Intuitivamente sono diversi: il complementare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{RP}^2$ è $\mathbb{RP}^1$ e non un sol punto; ma ciò non basta a priori per dire che $\mathbb{RP}^2$ non è la compattificazione di Alexandrof di $\mathbb{R}^2$ (si veda per esempio l'Esercizio 3.6.33). In effetti è vero che $\mathbb{RP}^2$ e $\mathbb{CP}^1$ non sono omeomorfi, ma il modo più semplice di dimostrarlo è quello di sviluppare invarianti abbastanza potenti come il gruppo fondamentale (che faremo nel Capitolo 7, si veda in particolare il Corollario 7.6.7) o la caratteristica di Eulero, oppure attraverso risultati come il teorema della curva di Jordan. Per il momento, accontentiamoci di sapere che son diversi.

Lemma 6.8.1. *$\mathbb{RP}^2$ è un disco attaccato a un nastro di Moebius lungo la frontiera.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo (Lemma 6.2.8) che $\mathbb{RP}^2$ è omeomorfo a . Se da tale disegno togliamo un quadrato (che è omeomorfo a un disco) otteniamo . Con un po' di taglia e cuci si ottiene un nastro di Moebius (Figura 8). □

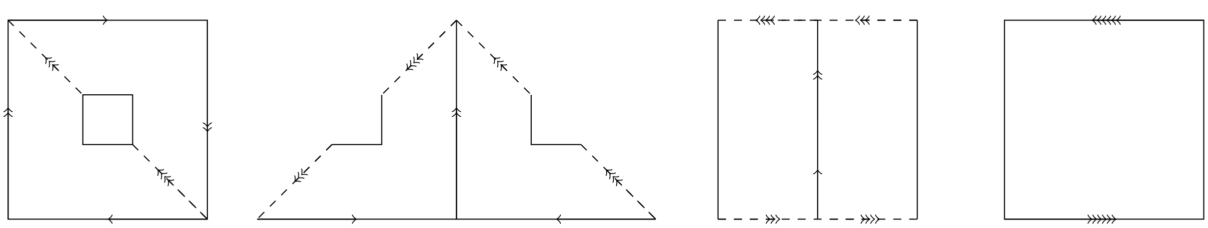


FIGURA 8. $\mathbb{RP}^2$ è un disco più un Moebius

Lo stesso procedimento mostra che rimuovendo un punto da $\mathbb{RP}^2$ si ottiene un nastro di Moebius "aperto". Si noti che rimuovendo un punto da $\mathbb{CP}^1$ si ottiene $\mathbb{R}^2$. (Ma ancora non sappiamo dimostrare che $\mathbb{R}^2$ è diverso da un nastro di Moebius aperto). In particolare, ciò ci dice che un'intorno della retta all'infinito, che è un S^1, è un nastro di Moebius. Si apprezzi la differenza con S^2 ove un'intorno dell'equatore è un cilindro.

Definizione 6.8.2. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$. La **chiusura proiettiva** di X è la chiusura di X in $\mathbb{RP}^2$, ove $\mathbb{R}^2$ è considerato una carta affine di $\mathbb{RP}^2$.

Vediamo come si calcola la chiusura proiettiva di un insieme. Siccome i proiettivi son metrizzabili, per trovare la chiusura di X basta trovare i limiti di tutte le successioni in X. Per le successioni limitate, si fa come in $\mathbb{R}^2$, per quelle che invece "tendono all'infinito in $\mathbb{R}^2$" si devono fare i conti nel proiettivo.

Una successione di punti $p_n \in \mathbb{R}^2$ converge a un punto all'infinito nel proiettivo se la retta per l'origine e p_n converge a una ben definita retta. Questa cosa si può visualizzare bene usando la calotta boreale in $\mathbb{R}^3$ (Figura 9).

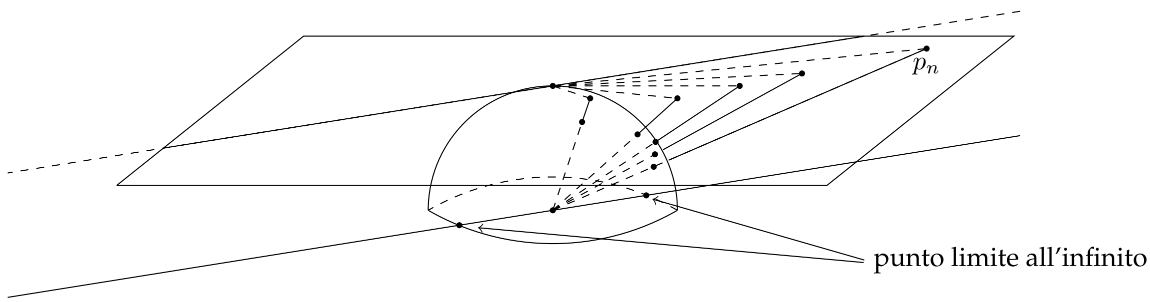


FIGURA 9. Convergenza verso punti all'infinito

In formule, se $p_n = (x_n, y_n)$ in $\mathbb{R}^2$, esso corrisponde al punto di coordinate omogenee $[1, x_n, y_n]$. Sia $C_n = \max\{|x_n|, |y_n|\}$. Se $p_n \to \infty$ in $\mathbb{R}^2$ allora $C_n \to \infty$. Se $x_n/C_n \to x_\infty$ e $y_n/C_n \to y_\infty$ per certi x_∞, y_∞, allora il punto limite all'infinito di p_n nel proiettivo è $[0, x_\infty, y_\infty]$:

$$[1, x_n, y_n] = [\frac{1}{C_n}, \frac{x_n}{C_n}, \frac{y_n}{C_n}] \to [0, x_\infty, y_\infty].$$

Esempio 6.8.3. La chiusura proiettiva di un iperbole è un cerchio. (Figura 10.)

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = \{xy = 1\}$ un'iperbole (a meno di affinità di $\mathbb{R}^2$, che sono proiettività, si può sempre supporre che sia in questa forma). Possiamo descrivere X con l'usuale formula $y = 1/x$. Quindi i punti all'infinito dell'iperbole si hanno quando x tende a zero, da destra o sinistra, o a $\pm\infty$.

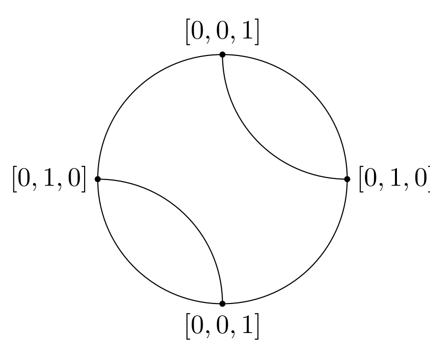


FIGURA 10. Un'iperbole in $\mathbb{RP}^2$ visto come D^2 modulo l'andipodale al bordo (che è equivalente al modello della calotta boreale vista dall'alto).

$$[1, x, \frac{1}{x}] = [x, x^2, 1] \to [0, 0, 1] \text{ per } x \to 0 \text{ da destra o sinistra (in questo caso } C_n = |1/x|)$$

$$[1, x, \frac{1}{x}] = [\frac{1}{x}, 1, \frac{1}{x^2}] \to [0, 1, 0] \text{ per } x \to \pm\infty \text{ (in questo caso } C_n = |x|).$$

Quindi X ha due punti all'infinito: $[0,0,1]$ che è il limite dei due rami che tendono all'asintoto verticale e $[0,1,0]$ che è il limite dei due rami che tendono all'asintoto orizzontale. La chiusura proiettiva di X si ottiene quindi incollando i due rami dell'iperbole ai due punti limite, ottenendo cosí un cerchio. $\square$

Esempio 6.8.4. La chiusura proiettiva di una parabola è un cerchio. (Figura 11.)

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = \{x^2 - y = 0\}$ una parabola (a meno di affinità di $\mathbb{R}^2$, che sono proiettività, si può sempre supporre che sia in questa forma). Possiamo descrivere X con l'usuale formula $y = x^2$. Quindi i punti all'infinito della parabola si hanno quando x tende a $\pm\infty$.

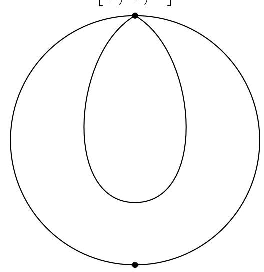


FIGURA 11. Una parabola in $\mathbb{RP}^2$ visto come D^2 modulo l'andipodale al bordo.

$$[1, x, x^2] = [\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1] \to [0,0,1] \text{ per } x \to \pm\infty \text{ (in questo caso } C_n = x^2).$$

Quindi X ha un solo punto all'infinito: $[0,0,1]$. La chiusura proiettiva di X coincide quindi con la sua compattificazione di Alexandroff ed è dunque un cerchio. $\square$

6.9. $\mathbb{CP}^1$ e la compattificazione di Alexandroff di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

Come abbiamo visto, $\mathbb{CP}^1$ è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, ed è quindi una sfera, identificata con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La carta affine $y = 1$ è identificata con $\mathbb{C}$ tramite la corrispondenza

$$z \mapsto [z, 1] \qquad [x, y] = [\frac{x}{y}, 1] \mapsto \frac{x}{y}$$

e includendo il punto all'infinito, possiamo dire che

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \qquad \infty \longleftrightarrow [\infty, 1] = [1, \frac{1}{\infty}] = [1, 0].$$

Topologicamente, se si pensa a $\mathbb{CP}^1$ come una sfera, si può visualizzare il punto all'infinito nel polo nord e la carta affine $y = 1$ come il suo complementare. Un'omeomorfismo esplicito della carta affine con $\mathbb{R}^2$ è dato dalla proiezione stereografica.

Lemma 6.9.1. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un chiuso non limitato (e quindi non compatto). La compattificazione di Alexandroff di X è la chiusura di X in $\mathbb{CP}^1$.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome X è chiuso in $\mathbb{R}^2$, ma non limitato, la sua chiusura in $\mathbb{CP}^1$ è un compatto T_2 ottenuto aggiungendo un sol punto ad X. (Si vedano il Teorema 3.5.24 e l'Esempio 3.5.25). $\square$

Le applicazioni di Moebius di $\mathbb{C}$ hanno proprietà molto interessanti.

Teorema 6.9.2. *Un'applicazione di Moebius manda cerchi e rette di $\mathbb{C}$ in cerchi e rette (un cerchio può andare in una retta e viceversa).*

DIMOSTRAZIONE. Innanzi tutto si noti che un'applicazione di Moebius è composizione di traslazioni ($z \mapsto z + \lambda$), omotetie ($z \mapsto \lambda z$) e l'inversione $f(z) = 1/z$, infatti

$$\frac{az+b}{cz+d} = a\frac{z+b/a}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{cz+cb/a}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{cz+d-d+cb/a}{cz+d} = \frac{a}{c}(1+\frac{-d+cb/a}{cz+d})$$

Le traslazioni e le omotetie mandano cerchi in cerchi e rette in rette e si verifica facilmente (si vedano gli Esercizi 6.11.45 e 6.11.46) che l'inversione manda

- rette passanti per l'origine in rette passanti per l'origine;
- rette non passanti per l'origine in cerchi passanti per l'origine e viceversa;
- cerchi non passanti per l'origine in cerchi non passanti per l'origine.

□

Inoltre, per il Teorema 6.7.4 si può sempre scambiare il punto all'infinito con un punto qualsiasi di $\mathbb{C}$ attraverso un'applicazione di Moebius, che è un omeomorfismo di $\mathbb{CP}^1$. Ciò risulta utile per esempio se si vuole calcolare la compattificazione di Alexandroff di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Infatti, se $X \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ è un insieme illimitato, per farne la compattificazione basta considerare un punto p che non appartiene a X e un'applicazione di Moebius f tale che $f(p) = \infty$ e $f(\infty) = p$. Siccome f è un omeomorfismo, la chiusura di X in $\mathbb{CP}^1$ è omeomorfa alla chiusura di $f(X)$, che è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{C}$ perché $p \notin X$ e quindi la sua chiusura si calcola nel modo usuale.

Esempio 6.9.3. Sia X un'insieme formato da due rette incidenti in $\mathbb{R}^2$. La sua compattificazione di Alexandroff è omeomorfa a due cerchi intersecantesi in due punti.

DIMOSTRAZIONE. Scambiando tra loro l'infinito e un punto $p \notin X$ con una Moebius, le due rette incidenti che formano X diventano due cerchi incidenti in due punti: il punto di incidenza originario e p (che era l'infinito). □

6.10. Birapporto

Dati tre punti distinti $x, y, z \in \mathbb{KP}^1$, il Teorema 6.7.4 ci dice che esiste un'unica applicazione di Moebius f tale che $f(x) = 1, f(y) = 0, f(z) = \infty$. Esplicitamente si ha

$$f(t) = \frac{x-z}{x-y} \cdot \frac{t-y}{t-z}.$$

Definizione 6.10.1. Il **birapporto** (in inglese *cross-ratio*) di quattro punti distinti di $\mathbb{KP}^1$ è definito come

$$(t, x; y, z) = \frac{x-z}{x-y} \cdot \frac{t-y}{t-z}.$$

Per come è definito, il birapporto di quattro punti è l'immagine del primo tramite l'unica applicazione di Moebius che manda gli altri tre in $1, 0, \infty$.

Esercizio 6.10.2. Dimostrare che se $(a, b; c, d) = x$, allora se si permutano a, b, c, d in ogni modo possibile, i birapporti che si ottengono sono esattamente $x, \frac{1}{x}, 1-x, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{x-1}, \frac{x-1}{x}$.

Esercizio 6.10.3. Dimostrare che date due quadruple di punti distinti in $\mathbb{KP}^1$, esiste un'applicazione di Moebius che manda l'una nell'altra se e solo se le due quadruple hanno lo stesso birapporto.

Esercizio 6.10.4. Dimostrare che il birapporto è invariante per trasformazioni di Moebius: $(x, y; z, t) = (f(x), f(y); f(z), f(t))$ per ogni trasformazione di Moebius f e per ogni quadrupla di punti distinti x, y, z, t.

Teorema 6.10.5. *Quattro punti distinti di $\mathbb{C}$ stanno su un cerchio o retta se e solo se il loro birapporto è reale.*

DIMOSTRAZIONE. Siano a, b, c, d quattro punti distinti e sia f l'unica Moebius che manda b, c, d in $1, 0, \infty$. Se a, b, c, d stanno su un cerchio o retta, allora per il Teorema 6.9.2 $f(a)$ giace sull'unico cerchio/retta che passa per $1, 0, \infty$, cioè su $\mathbb{R}$. Viceversa, se $f(a)$ è reale allora a, b, c, d stanno su $f^{-1}(\mathbb{R})$ che, sempre per il Teorema 6.9.2, è un cerchio o una retta. □

Esempio 6.10.6. I punti $0, 2i+1, 2i, 1$ stanno su un cerchio in quanto $(0, 2i+1; 2i, 1) = -4 \in \mathbb{R}$.

6.11. Esercizi

Esercizio 6.11.1. Sia M una varietà topologia connessa avente un punto di taglio locale. Dimostrare che la dimensione di M è uno.

Esercizio 6.11.2. In $\mathbb{R}^2$ siano $X = B((0,0), 10)$, $Y = B((5,0), 1)$, $Z = B((-5,0), 1)$. Dimostrare che $X \setminus \overline{Y}$ non è omeomorfo a $X \setminus (\overline{Y} \cup \overline{Z})$.

Esercizio 6.11.3. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{x^2+y^2 < 1\}$. Dimostrare che X e $X \setminus \{(0,0)\}$ non sono omeomorfi.

Esercizio 6.11.4. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Sia Y un toro privato di un punto. Dimostrare che X e Y non sono omeomorfi.

Esercizio 6.11.5. Per ogni $n \geq 3$ sia P_n un poligono regolare con n lati inscritto in un cerchio unitario e sia X_n la chiusura della regione compresa tra il cerchio e il poligono. Dimostrare che X_n è omeomorfo a X_m se e solo se $m = n$.

Esercizio 6.11.6. Dimostrare che S^2 privato di un punto non è omeomorfo a S^2 privato di due punti.

Esercizio 6.11.7. Si dia un esempio di uno spazio X tale che X meno un punto sia omeomorfo a X meno due punti.

Esercizio 6.11.8. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi ha un punto di taglio.

Esercizio 6.11.9. Dimostrare che ogni punto di $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi è di taglio.

Esercizio 6.11.10. Dimostrare che $\mathbb{R}$ con la topologia di Zariski non ha punti di taglio.

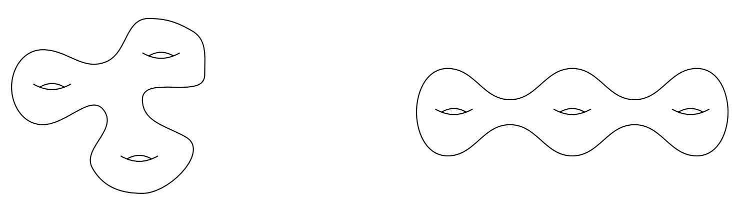
Esercizio 6.11.11. Dimostrare che $\mathbb{R}$ con la topologia di Zariski non ha punti di taglio locali.

Esercizio 6.11.12. Siano $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1\}$ e $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dimostrare che X e Y non sono omeomorfi.

Esercizio 6.11.13. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |xzy| \leq 1\}$. Siano $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $Y = A \cup B \cup C$. Dimostrare che X non è omeomorfo a Y.

Esercizio 6.11.14. Dimostrare che un cubo e una piramide sono omeomorfi.

Esercizio 6.11.15 (Superficie di genere tre). Dimostrare che questi due spazi sono omeomorfi:



Esercizio 6.11.16. Si dica se un cilindro con un buco è omeomorfo a una sfera con tre buchi.

Esercizio 6.11.17. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = [-10, 10] \times [-10, 10] \setminus (((-5, -3) \times (-1, 1)) \cup ((3, 5) \times (-1, 1)))$. (Esso è un quadrato con due buchi quadrati). In $\mathbb{R}^3$ sia $Y = \partial([-1, 1] \times [-1, 1]) \times [-10, 10]$. (Esso è un cilindro a base quadrata). Su $X \sqcup Y$ mettiamo la relazione generata da

$$(x, 10) \sim (x, -10) \quad (10, x) \sim (-10, x) \quad (x, y, -10) \sim (x - 4, y) \quad (x, y, 10) \sim (-x + 4, y).$$

Dimostrare che $X \sqcup Y/\sim$ è una superficie di genere due.

Esercizio 6.11.18. Si provi che la superficie di una tazzina da caffè classica è omeomorfa a un toro.

Esercizio 6.11.19. Dimostrare che un pallone da rugby e uno da calcio sono omeomorfi.

Esercizio 6.11.20. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ meno una retta è omeomorfo a S^2 meno una circonferenza.

Esercizio 6.11.21. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ meno una retta e un punto è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ meno una circonferenza.

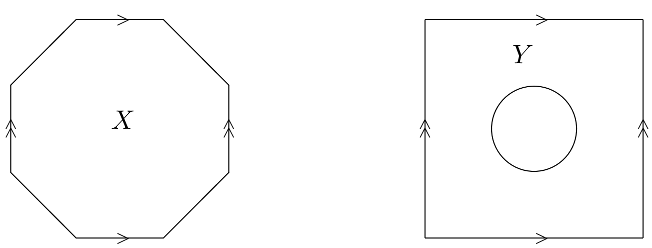
Esercizio 6.11.22. Dimostrare che $\mathbb{R}^3$ meno una retta e un punto è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$ meno una circonferenza.

Esercizio 6.11.23. Dimostrare che la bottiglia di Klein è ottenuta unendo due nastri di Moebius lungo la frontiera.

Esercizio 6.11.24. Sia X lo spazio ottenuto incollando tra loro i lati opposti di un esagono regolare mantenendo le orientazioni. Dimostrare che X è una varietà topologica. Dimostrare che X è omeomorfo a un toro.

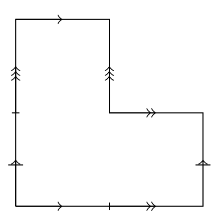
Esercizio 6.11.25. Sia X lo spazio ottenuto incollando tra loro i lati opposti di un ottagono regolare mantenendo le orientazioni. Dimostrare che X è una varietà topologica. Dimostrare che X è omeomorfo a una superficie di genere due.

Esercizio 6.11.26. Sia A un ottagono regolare in $\mathbb{R}^2$ e sia X lo spazio ottenuto identificando i due lati orizzontali tra loro e i due lati verticali tra loro. Sia B un quadrato privato di un disco aperto e sia Y lo spazio ottenuto identificando i due lati orizzontali tra loro e i due lati verticali tra loro.



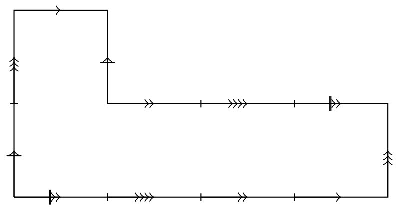
Dimostrare che X e Y sono omeomorfi, che sono varietà a bordo e che sono omeomorfi a un toro a cui è stato rimosso un disco.

Esercizio 6.11.27. Sia X lo spazio ottenuto da una forma a "L" identificando i lati come in figura:



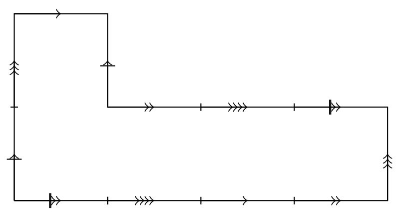
Dimostrare che X è omeomorfo a una superficie di genere due.

Esercizio 6.11.28. Sia X lo spazio ottenuto da una forma a "L" identificando i lati come in figura:



Dimostrare che X è omeomorfo a una superficie di genere due.

Esercizio 6.11.29. Sia X lo spazio ottenuto da una forma a "L" identificando i lati come in figura:



Convincersi che X non è omeomorfo a una superficie di genere due (è una superficie di genere tre).

Esercizio 6.11.30. Dimostrare che lo spazio $\mathbb{R}/Z$ dell'Esempio 2.2.11 è un bouquet di infinite copie di S^1.

Esercizio 6.11.31. Sia $X = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}$. Esso è una successione convergente a zero. Sia $Y = \{0, 1\}$ con la topologia discreta. Sia f la funzione che vale 1 in zero e 0 altrove. Sia f_n la funzione che vale 1 per $x > 1/n$ e 0 altrove. Dimostrare che $f_n \to f$ per la topologia compatto-aperta. Dimostrare che f_n non converge uniformemente a f.

Esercizio 6.11.32. Sia X uno spazio topologico e Y uno spazio metrico. Sia $f_n : X \to Y$ una successione di funzioni continue. Dimostrare che se $f_n \to f$ uniformemente allora f è continua.

Esercizio 6.11.33. Siano X, Y spazi topologici e sia $f_n : X \to Y$ una successione di funzioni che converge a f nella topologia compatto-aperta. Dimostrare che per ogni $x \in X$ si ha $f_n(x) \to f(x)$.

Esercizio 6.11.34. Sia G un gruppo che agisce su X. Dimostrare che se $y = gx$ allora $\operatorname{stab}(y) = g \operatorname{stab}(x) g^{-1}$.

Esercizio 6.11.35. Su S^2 facciamo agire $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ via rotazioni di angolo $2\pi/6$ attorno all'asse Z. Si dimostri che il quoziente è una varietà topologica.

Esercizio 6.11.36. Sia $G \leq \operatorname{omeo}(\mathbb{R}^2)$ il gruppo generato da una rotazione di angolo $\pi/3$ e da un'omotetia di ragione 2. Si determini il quoziente $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/G$.

Esercizio 6.11.37. Sia $G \leq \operatorname{omeo}(\mathbb{R}^2)$ il gruppo generato dalle riflessioni rispetto all'asse X e rispetto alla retta $y = 2x$. Si dica se $\mathbb{R}^2/G$ è T_2.

Esercizio 6.11.38. Sia $G \leq \operatorname{omeo}(\mathbb{R}^2)$ il gruppo generato dalle riflessioni rispetto all'asse X e rispetto alla retta $y = 2x$. Sia $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Si determini S^1/G.

Esercizio 6.11.39. Dimostrare che $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è omeomorfo a S^1. Dimostrare che $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è omeomorfo al toro T^2. Dimostrare che $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ è omeomorfo a T^n.

Esempio 6.11.40. Consideriamo l'azione di $SO(2)$ in $\mathbb{R}^3$ per rotazioni orizzontali, *i.e.* per ogni $A \in SO(2)$ sia $A(x, y, z) = (A(x, y), z)$. Si dimostri che il quoziente $S^2/SO(2)$ è uno spazio di Hausdorff. Si dica se è omeomorfo a un segmento.

Esercizio 6.11.41. In $\mathbb{C}^2$ consideriamo l'azione di S^1 data per moltiplicazione su entrambe le coordinate: $\theta(z, w) = (\theta z, \theta w)$. Si dica se $\mathbb{C}^2/S^1$ è T_2.

Esercizio 6.11.42. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'azione per isometrie di $SO(3)$. Si dica se $\mathbb{R}^3/SO(3)$ è T_2.

Esercizio 6.11.43. Dimostrare che gli spazi degli Esempi 2.2.10 e 6.5.34 sono omeomorfi tra loro.

Esempio 6.11.44. Sia $S^3 = \{x+iy+jz+kt : x^2+y^2+z^2+t^2 = 1\}$ la sfera unitaria dei quaternioni, con la struttura di gruppo indotta. Sia $S^2 = \{p \in S^3 : \Re(p) = 0\} = \{iy + jz + kt : y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$. Dimostrare che l'azione per coniugio di S^3 su sé stesso preserva S^2. Determinare gli stabilizzatori di tale azione, dedurne che $S^2 = S^3/S^1$. Confrontare questa costruzione con la fibrazione di Hopf.

Esercizio 6.11.45. Sia $f(z) = 1/z$ definita su $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Sia R_α una retta a distanza $\alpha > 0$ dall'origine. Dimostrare che esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ di modulo uno tale che $R_\alpha = \{\lambda z_0 + i\alpha z_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Dimostrare che $f(R_\alpha)$ è il cerchio di centro $-i\bar{z}_0/2\alpha$ e raggio $1/2\alpha$. (Suggerimento: Per $z \in R_\alpha$ calcolare la distanza tra $f(z)$ e il centro del cerchio).

Esercizio 6.11.46. Sia $f(z) = 1/z$ definita su $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dimostrare che per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ e $R \neq |z_0|$, f manda il cerchio di centro z_0 e raggio R nel cerchio di centro $\bar{z}_0/(|z_0|^2 - R^2)$ e raggio $R/||z_0|^2 - R^2|$. (Suggerimento: calcolare la distanza tra $f(z)$ e il centro del cerchio immagine, ricordando che $R = |z - z_0|$ se z sta nel cerchio di partenza).

Esercizio 6.11.47. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{|x| \geq 1\} \cap \{|y| \geq 1\}$. Dimostrare che la chiusura proiettiva e la compattificazione di Alexandroff di X non sono omeomorfe.

Esercizio 6.11.48. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{|x| > 1\} \cap \{|y| > 1\}$. Dimostrare che la chiusura proiettiva e la compattificazione di Alexandroff di X^c non sono omeomorfe.

Esercizio 6.11.49. Dimostrare che i quattro spazi degli Esercizi 6.11.47 e 6.11.48 sono tutti diversi tra loro.

Esercizio 6.11.50. Sia $X = \{xy \geq 0\}$. Si dica se la compattificazione di Alexandroff e la chiusura proiettiva di X sono omeomorfe.

Esercizio 6.11.51. Si dica se i sei spazi degli Esercizi 6.11.47, 6.11.48, e 6.11.50 son tutti diversi tra loro.

Esercizio 6.11.52. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{(x, 2^n x^2),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\}$. Si determinino la chiusura proiettiva e la compattificazione di Alexandroff di X. Si dica se sono connesse e/o localmente connesse per archi.

Esercizio 6.11.53. Dimostrare che la chiusura proiettiva di un'iperbole qualsiasi e quella di una parabola qualsiasi sono sempre omeomorfe a un'ellisse.

Esercizio 6.11.54. Sia $A = \{xy < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Dimostrare che la chiusura proiettiva di A è omeomorfa a un nastro di Moebius.

Esercizio 6.11.55. Sia $B = \{xy > 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Dimostrare che la chiusura proiettiva di B è omeomorfa a una palla chiusa.

Esercizio 6.11.56. Sia $C = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Dimostrare che la chiusura proiettiva del complementare di C è omeomorfa a un nastro di Moebius.

Esercizio 6.11.57. Sia $D = \{y > x^2\}$. Dimostrare che la chiusura proiettiva di C è omeomorfa a un disco e che la chiusura proiettiva di D^c è omeomorfa a un nastro di Moebius.

Esercizio 6.11.58. Dimostrare che date due quadruple di rette distinte e passanti per l'origine in $\mathbb{R}^2$, esiste un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che manda le une nelle altre se e solo se i birapporti delle due quadruple (come punti di $\mathbb{RP}^1$) coincidono.

CAPITOLO 7

Un pizzico di topologia algebrica: il gruppo fondamentale e i suoi amici

AVVERTIMENTO: In questo capitolo, e soprattutto a partire dalla Sezione 7.2, si parlerà di concetti che trovano il loro ambito di applicazione naturale nella trattazione di spazi decenti, ove il minimo richiesto per la decenza è la locale connessione per archi e l'essere di Hausdorff. Molti autori scelgono quindi di mettere a questo punto l'ipotesi che tutti gli spazi in questione siano decenti. Qui si è scelto di non farlo e di enunciare i teoremi e i risultati con le ipotesi opportune. Va da sé che il lettore può tranquillamente sovraimporre l'ipotesi di decenza ad ogni spazio, semplificando quindi enunciati e definizioni. A proposito di quest'ultime, sia detto che non c'è una scelta standard universale sul chiedere o meno la decenza degli spazi. Per esempio quando leggerete la definizione di "semplicemente connesso" vedrete che la versione più comune è "X è semplicemente connesso se è connesso e il suo gruppo fondamentale è banale" senza specificare se X debba essere localmente connesso per archi o meno. Come si suol dire, queste son questioni di *lana caprina*: in generale uno lavora con spazi decenti, altrimenti avrà la buona creanza di specificare le notazioni e le convenzioni in uso.

7.1. Omotopie e deformazioni

Definizione 7.1.1. Due funzioni continue $f, g : X \to Y$ tra spazi topologici si dicono **omotope** se esiste una funzione continua $F : X \times [0,1] \to Y$ tale che per ogni $x \in X$ si ha

$$F(x,0) = f(x) \qquad F(x,1) = g(x).$$

Tale F si dice **omotopia** tra f e g.

Per le omotopie si usa spesso la notazione $F_t(x) = F(x,t)$. Un'omotopia può quindi essere descritta come una famiglia continua di funzioni $F_t : X \to Y$, ossia un cammino tra f e g nello spazio delle funzioni continue da X a Y. Graficamente, un'omotopia rappresenta una deformazione continua da f a g

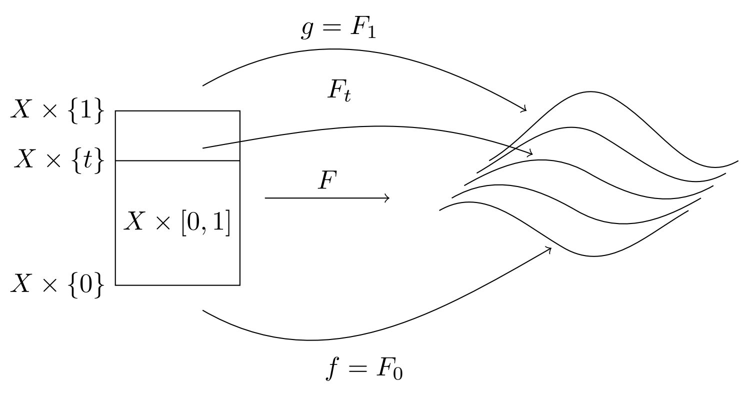


FIGURA 1. Omotopia tra funzioni

Esempio 7.1.2. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) = (\cos x, \sin x)$. La funzione costantemente nulla è omotopa a f tramite l'omotopia $F(x,t) = tf(x)$.

Definizione 7.1.3. Siano X, Y spazi topologici e sia $A \subseteq X$. Siano $f, g : X \to Y$ due funzioni continue che coincidono su A. Un'omotopia $F : X \times [0,1] \to Y$ tra f e g si dice **relativa** ad A se è costante su A:

$$F(x,0) = f(x) \qquad F(x,1) = g(x) \qquad F(a,t) = f(a) = g(a)\ \forall a \in A.$$

In tal caso f e g si dicono **omotope relativamente** ad A.

Esempio 7.1.4. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $f(t) = (t, t^2)$ e sia $g(t) = (t, 0)$. L'omotopia $F(t,s) = (t, st^2)$ è un'omotopia tra g e f relativa a $\{0\}$ ma non relativa a $\{0,1\}$.

Esempio 7.1.5. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $f(t) = (t, t^2 - t)$ e sia $g(t) = (t, 0)$. L'omotopia $F(t,s) = (t, s(t^2 - t))$ è un'omotopia tra g e f relativa a $\{0,1\}$.

Teorema 7.1.6. *La relazione di omotopia (relativa o meno) è una relazione d'equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da X a Y.*

DIMOSTRAZIONE. Siano X, Y spazi topologici e sia $f : X \to Y$ continua. Chiaramente f è omotopa a sé stessa tramite $F(x,t) = f(x)$ indipendentemente da t. Se $g : X \to Y$ è una funzione omotopa a f e se F è un'omotopia tra f e g, allora la funzione $G(x,t) = F(x, 1-t)$ è un'omotopia tra g e f. Quindi la relazione d'omotopia è simmetrica.

Sia ora h una terza funzione continua da $X \to Y$ e supponiamo che esistano omotopie F, G, tra f e g la prima, e tra g e h l'altra. La funzione

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

è un'omotopia tra f e h.

Si noti che la stessa dimostrazione è valida anche per omotopie relative. $\square$

Graficamente, guardando la Figura 1, l'omotopia H si può pensare costruita mettendo "G sopra F" e riscalando l'altezza del cilindro $X \times [0,2]$ ottenuto. Se non diversamente specificato, la scrittura $f \sim g$ indica solitamente due funzioni omotope.

Esercizio 7.1.7. Verificare che la funzione H sopra descritta è continua.

Teorema 7.1.8. *Sia X uno spazio topologico, allora tutte le funzioni continue da X a $\mathbb{R}^n$ sono omotope tra loro.*

DIMOSTRAZIONE. Ciò dipende dalla struttura lineare di $\mathbb{R}^n$. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ due funzioni continue, allora la funzione

$$F(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x)$$

è un'omotopia tra f e g. $\square$

Qui il discorso si fa simile agli omeomorfismi: in generale è fattibile dimostrare che due funzioni sono omotope, mentre per dimostrare che non lo sono servono strumenti più potenti.

Esercizio 7.1.9. Provare a dimostrare che le funzioni $f, g : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ date da

$$f(x) = x \qquad g(x) = f(x) + 3i$$

non sono omotope. (Qui si è identificato S^1 col cerchio unitario di $\mathbb{C}$.) Dimostrare che sono invece omotope in $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$.

Definizione 7.1.10 (Inversa di omotopia)**.** Sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Una funzione continua $g : Y \to X$ si dice inversa di omotopia **destra** di f se $f \circ g : Y \to Y$ è omotopa all'identità di Y; **sinistra** se $g \circ f : X \to X$ è omotopa all'identità di X. Si dice **inversa di omotopia** se è un'inversa destra e sinistra.

Esempio 7.1.11. Se X è costituito da un sol punto, allora qualsiasi funzione $X \to Y$ ha come inversa di omotopia sinistra la funzione costante $Y \to X$. In generale non ci sono però inverse destre $Y \to X$. (Per esempio se Y non è connesso.)

Ovviamente l'inversa di una funzione continua, se continua, è anche un'inversa di omotopia. Gli omeomorfismi quindi hanno sempre un'inversa di omotopia. In generale però le funzioni che hanno un'inversa di omotopia non sono necessariamente biunivoche.

Esempio 7.1.12. Sia $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. Sia $f : S^1 \to X$ l'inclusione e sia $g : X \to S^1$ data da $g(z) = z/|z|$. La funzione f non è suriettiva, g non è iniettiva. Nondimeno f e g sono inverse di omotopia l'una dell'altra.

DIMOSTRAZIONE. $f \circ g : X \to X$ è semplicemente uguale a g. Un'omotopia tra g e l'identità è data da $G(z, t) = z(t + (1 - t)/|z|)$. Ancora più semplice è il caso di $g \circ f : S^1 \to S^1$: essa è già l'identità! $\square$

Definizione 7.1.13. Due spazi topologici X, Y sono **omotopicamente equivalenti** se esiste una funzione continua $f : X \to Y$ che ha un'inversa di omotopia.

Esempio 7.1.14. Due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti.

La relazione d'equivalenza di omotopia però è più debole dell'omeomorfismo.

Esempio 7.1.15. $\mathbb{R}^2$ meno un punto e S^1 sono omotopicamente equivalenti. (Ma non sono omeomorfi perché due punti sconnettono S^1 mentre tre punti non sconnettono $\mathbb{R}^2$.)

Teorema 7.1.16 (La connessione è un invariante per omotopia)**.** *Se due spazi sono omotopicamente equivalenti, allora hanno lo stesso numero di componenti connesse.*

DIMOSTRAZIONE. Siano X, Y spazi topologici e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funzioni continue una inversa omotopica dell'altra. Sia $\mathcal{C}_X$ l'insieme delle componenti connesse di X e $\mathcal{C}_Y$ quello delle componenti di Y. Per ogni $C \in \mathcal{C}_X$ sia $\varphi(C)$ la componente connessa che contiene $f(C)$. Essa è ben definita perché ogni $C \in \mathcal{C}_X$ è connesso e quindi lo è anche $f(C)$. Similmente, se $C \in \mathcal{C}_Y$ definiamo $\psi(C)$ come la componente connessa che contiene $g(C)$. Mostriamo adesso che le funzioni $\varphi : \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_Y$ e $\psi : \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$ sono una inversa dell'altra.

Sia F l'omotopia tra $g \circ f$ e l'identità di X. Sia $C \in \mathcal{C}_X$. Siccome $C \times [0, 1]$ è connesso, $F(C \times [0, 1])$ è contenuto in una sola componente connessa di X. Siccome $F_1 = Id_X$, allora $F(C \times [0, 1])$ è contenuto in C. Similmente $F_0 = g \circ f$ e quindi $F(C \times [0, 1])$ è contenuto in $\psi(\varphi(C))$. Quindi $\psi(\varphi(C)) = C$. Ragionando con l'omotopia tra $f \circ g$ e l'indentità di Y si ottiene $\varphi(\psi(C)) = C$. $\square$

Esempio 7.1.17. $GL(2, \mathbb{R})$ ha due componenti connesse, ambe omotopicamente equivalenti a S^1.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\det : GL(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ il determinante. Siccome $\mathbb{R}^*$ ha due componenti connesse e il determinante è suriettivo, $GL(2, \mathbb{R})$ ha almeno due componenti connesse. Poniamo $GL^+ = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$ e dimostriamo che è omotopicamente equivalente a S^1 (per cui risulterà automaticamente connesso per il Teorema 7.1.16). Simile discorso vale per l'insieme delle matrici a determinante negativo. Definiamo:

(1) M_1 l'insieme delle matrici in GL^+ tali che la prima colonna abbia norma uno.
(2) M_2 l'insieme delle matrici in M_1 tali che le due colonne siano ortogonali tra loro.
(3) $SO(2)$ l'insieme delle matrici in M_2 le cui colonne formano una base ortonormale.

Sappiamo già che $SO(2)$ è omeomorfo a S^1 (Teorema 6.4.7). Dimostriamo che $GL^+ \sim M_1 \sim M_2 \sim SO(2)$ usando il procedimento di Gram-Schmidt.

(1) $GL^+ \sim M_1$. Sia $A \in GL^+$ e siano v_1 e v_2 i suoi vettori colonna. Poniamo $w_1 = v_1/||v_1||$ e definiamo $f(A)$ la matrice in M_1 che ha come colonne w_1 e v_2. Sia $\imath : M_1 \to GL^+$ l'inclusione. Chiaramente $f \circ \imath = Id_{M_1}$ e $\imath \circ f = f$. L'omotopia tra f e l'identità è data definendo $F_t(A)$ come la matrice che ha $tv_1 + (1-t)w_1$ come prima colonna e v_2 come seconda.

(2) $M_1 \sim M_2$. Sia ora $A \in M_1$ e siano w_1, v_2 i suoi vettori colonna. Poniamo $u_2 = \langle v_2, w_1 \rangle w_1$, $w_2 = v_2 - u_2$ e definiamo $g(A)$ come la matrice in M_2 le cui colonne sono w_1 e w_2. Sia $\imath : M_2 \to M_1$ l'inclusione. Come sopra $g \circ \imath = Id_{M_2}$ e $\imath \circ g = g$. L'omotopia tra l'identità e g è data definendo $G_t(A)$ come la matrice che ha w_1 come prima colonna e $v_2 - tu_2$ come seconda colonna. (Si noti che il determinante di $G_t(A)$ non dipende da t.)

(3) $M_2 \sim SO(2)$. Sia infine $A \in M_2$ e siano w_1, w_2 i suoi vettori colonna. Poniamo $u_1 = w_1$ e $u_2 = w_2/||w_2||$ e procediamo come nel caso (1). □

Esercizio 7.1.18. Dimostrare che $GL(3, \mathbb{R})$ ha due componenti connesse, ognuna delle quali è omotopicamente equivalente a $\mathbb{RP}^3$.

Definizione 7.1.19. Le funzioni che sono omotope a una funzione costante si chiamano **omotopicamente banali**, gli spazi che sono omotopicamente equivalenti a un punto si chiamano **contraibili**.

Teorema 7.1.20. *Il cono su un qualsiasi spazio topologico è contraibile.*

DIMOSTRAZIONE. Se $C = X \times [0,1]$ con $X \times \{0\}$ collassato a un punto, la funzione $F : C \times [0,1] \to C$ data da $F((x,t), s) = (x, st)$ è un'omotopia tra la costante sul vertice del cono (per $s = 0$ si ha $F_s(x,t) = (x, 0)$) e l'identità (per $s = 1$ si ha $F_1(x,t) = (x,t)$). □

Corollario 7.1.21. *La compattezza, locale e non, la locale connessione, le proprietà di separazione e numerabilità non sono invarianti per omotopia.*

DIMOSTRAZIONE. Il cono su uno spazio non (localmente) compatto non è (localmente) compatto. Il cono di uno spazio che non è localmente connesso non è localmente connesso. Il cono su uno spazio a base non numerabile non ha base numerabile. Il cono di uno spazio che non è localmente numerabile non è localmente numerabile. Il cono di uno spazio non T_2 non è T_2.

Ma tutti sono omotopicamente equivalenti a un punto che ha tutte queste proprietà. □

Esempio 7.1.22. $\mathbb{R}^n$ è contraibile. L'omotopia tra l'identità e la costante sull'origine è $F(v,t) = tv$.

Esempio 7.1.23. Per il Teorema 7.1.16 uno spazio non connesso non è contraibile.

Definizione 7.1.24. Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$. Sia $\imath : A \to X$ l'inclusione.

1. A si dice **retratto** di X se esiste una funzione continua $f : X \to A$ che sia l'identità su A (cioè tale che $f \circ \imath = Id_A$). Una tale funzione si chiama retrazione.
2. A è un **retratto di deformazione** se esiste una retrazione da X su A che sia omotopa all'identità (cioè tale che $\imath \circ f$ sia omotopa a Id_X.)
3. A è un **retratto di deformazione forte** se esiste una retrazione da X su A che sia omotopa all'identità tramite un'omotopia che fissa i punti di A.

Ogni spazio si retrae su ogni suo punto: se $x_0 \in X$ la funzione costante $f : X \to x_0$ è continua. Se A è un retratto di deformazione di X allora essi sono omotopicamente equivalenti. Quindi non tutti i retratti sono di deformazione. Il pettine delle pulci fornisce un esempio di retratto di deformazione che non sia forte:

Esempio 7.1.25. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1/n : \ 0 < n \in \mathbb{N}\} \times [0,1])$. Sia $A = \{0\} \times [0,1]$ il dente più a sinistra di tutti. Esso è un retratto di deformazione di X. Infatti la mappa $f : X \to A$ data da $f(x,y) = (0,y)$ è continua, fissa A ed è omotopa all'identità. L'omotopia

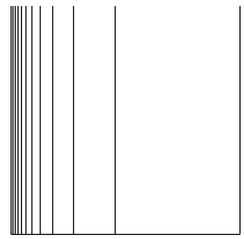


FIGURA 2. Il pettine delle pulci

è costruita prima schiacciando tutto sull'asse orizzontale, poi portando tutto a zero e poi rimettendo gli elementi di A al loro posto. Esplicitamente,

$$F_t((x,y)) = \begin{cases} (x,(1-2t)y) & t \in [0,1/2] \\ ((3-4t)x,0) & t \in [1/2,3/4] \\ (0,(4t-3)y) & t \in [3/4,1] \end{cases}$$

Mostriamo ora che A non è retratto di deformazione forte. Sia $F : X \times [0,1] \to X$ una funzione continua tale che $F(x,1) \in A$ e tale che $F(a,t) = a$ per ogni $a \in A$ e $t \in [0,1]$. Sia $a_0 = (0,1)$ e sia B la palla di centro a_0 e raggio $1/2$. $F^{-1}(B)$ è un aperto che contiene $a_0 \times [0,1]$ perché F fissa A. Tale aperto contiene un aperto $U \times [0,1]$ con U intorno di a_0 in X. Inoltre, possiamo supporre che U sia della forma $(\{1/n : n > 1/\varepsilon\} \cup \{0\}) \times (1-\varepsilon, 1]$. La restrizione di F a $U \times [0,1]$ è quindi una funzione continua da $U \times [0,1]$ in B. B non è connesso e la componente connessa di a_0 è $\{0\} \times (1/2, 1] = A \cap B$. Siccome F è continua e $F(x,1) \in A$, allora $F^{-1}(A)$ interseca tutte le componenti connesse di $U \times [0,1]$. Quindi per connessione l'immagine di $F|_{U\times[0,1]}$ è contenuta in A. In particolare F_0 non può essere l'identità.

7.2. Gruppo fondamentale

Fissiamo le notazioni per i cammini:

- Un cammino in X è una funzione continua $\gamma : [0,1] \to X$.
- Un cammino si dice **chiuso** (o laccetto) se $\gamma(0) = \gamma(1)$; in tal caso si dice che γ è basato in $\gamma(0)$.
- Riguardo ai cammini, con $\sim$ si intenderà la relazione di omotopia a estremi fissi, cioè relativa a $\{0,1\}$.

Definizione 7.2.1. Dato uno spazio X e $a, b \in X$, si definisce $\Omega(X,a,b)$ come l'insieme dei cammini $f : [0,1] \to X$ tali che $f(0) = a, f(1) = b$. L'insieme dei cammini chiusi basati in a si denota con $\Omega(X,a)$.

Definizione 7.2.2. Due cammini $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ si dicono componibili se $\alpha(1) = \beta(0)$. In tal caso si definisce la composizione percorrendo prima α e poi β il tutto riparametrizzato con $[0,1]$; l'inverso di un cammino α si definisce percorrendolo in senso inverso:

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0,1/2] \\ \beta(2t-1) & t \in [1/2,1] \end{cases} \qquad \alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$$

Lemma 7.2.3. *Se α è un cammino in uno spazio X, omotopo (a estremi fissi) a β, allora α^{-1} è omotopo a β^{-1}. Inoltre, $\alpha\alpha^{-1}$ è omotopicamente banale.*

DIMOSTRAZIONE. Se F è un'omotopia tra α e β allora $G(t,s) = F(1-t,s)$ è un'omotopia tra α^{-1} e β^{-1}. L'omotopia tra il cammino costante e $\alpha\alpha^{-1}$ è data da

$$G(t,s) = \begin{cases} \alpha(2ts) & t \in [0,1/2] \\ \alpha(s(2-2t)) & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

□

Lemma 7.2.4. *Se $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$ sono cammini in X tali che gli α sono componibili con i β, allora $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano F l'omotopia a estremi fissi tra α e α' e G quella tra β e β'. La funzione

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & t \in [0,1/2] \\ G(2t-1,s) & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

è un'omotopia a estremi fissi tra $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$. □

Lemma 7.2.5. *Sia α un cammino chiuso in X e sia $x_0 = \alpha(0)$. Se β è il cammino costante in x_0, allora $\alpha\beta \sim \beta\alpha \sim \alpha$.*

DIMOSTRAZIONE. Un'omotopia tra $\alpha\beta$ e α è data da

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2}{s+1}t) & t \in [0, \frac{s+1}{2}] \\ x_0 & t \in [\frac{s+1}{2}, 1] \end{cases}$$

un'omotopia tra $\beta\alpha$ e α si costruisce in modo analogo. □

Esercizio 7.2.6. Dimostrare che se $\xi : [0,1] \to [0,1]$ è una riparametrizzazione che fissa 0 e 1, allora ogni cammino $\alpha(t)$ è omotopo, a estremi fissi, a $\alpha(\xi(t))$.

Esercizio 7.2.7. Dimostrare che l'operazione di composizione di cammini è associativa a meno di omotopia. (Basta riparametrizzare le composizioni $(\alpha\beta)\gamma$ e $\alpha(\beta\gamma)$ in modo opportuno.)

Definizione 7.2.8. Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$. Il **gruppo fondamentale** di X, basato in x_0 è il quoziente di $\Omega(X,x_0)$ modulo la relazione d'equivalenza dell'omotopia a estremi fissi. Il gruppo fondamentale si denota con

$$\pi_1(X,x_0).$$

Il punto x_0 si suole chiamare **punto base**.

Per i Lemmi 7.2.3, 7.2.4 e 7.2.5 (e l'Esercizio 7.2.7) l'operazione di composizione rende $\pi_1(X,x_0)$ un gruppo. L'identità è data dal cammino costante in x_0, che spesso si denota con 1 o con 0. In generale il gruppo fondamentale non è commutativo.

Teorema 7.2.9. *Sia X uno spazio topologico. Se $x_0, x_1 \in X$ stanno nella stessa componente connessa per archi, allora i gruppi fondamentali $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(X,x_1)$ sono isomorfi. Più precisamente, ogni cammino $\gamma \in \Omega(X,x_0,x_1)$ definisce un isomorfismo naturale $\varphi_\gamma : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia γ un cammino tra x_0 e x_1. Per ogni $\alpha \in \pi_1(X,x_0)$ sia $\varphi_\gamma(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma \in \pi_1(X,x_1)$. La funzione φ è un morfismo di gruppi per i Lemmi 7.2.3, 7.2.4 e 7.2.5. Inoltre la funzione $\beta \mapsto \gamma\beta\gamma^{-1}$, è l'inversa di f che quindi risulta un isomorfismo. □

Per questo motivo se uno spazio è connesso per archi si suole parlare di "gruppo fondamentale", anzichè di "gruppo fondamentale basato in x_0", intendendo il gruppo astratto isomorfo a $\pi_1(X,x_0)$. A volte viene usata la notazione $\pi_1(X)$. Si noti che se $x_0 = x_1$ e γ è un laccetto, allora φ_γ è il coniugio per γ.

Esercizio 7.2.10. Dimostrare che se $\gamma \sim \eta$ allora $\varphi_\gamma = \varphi_\eta$.

Definizione 7.2.11. Uno spazio topologico si dice **semplicemente connesso** se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale.

Esempio 7.2.12. Un punto è semplicemente connesso.

Definizione 7.2.13. Siano X, Y spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Sia $x_0 \in X$ e sia $y_0 = f(x_0)$. Si definisce

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

come $f_*(\alpha) = f \circ \alpha$.

Si noti che la definizione è ben posta perché se F è un'omotopia tra α e β allora $f \circ F$ è un'omotopia tra $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$. Inoltre, è immediato verificare che f_* è un morfismo di gruppi, cioè che $f_*(\alpha\beta) = f_*(\alpha)f_*(\beta)$ e $f_*(\alpha^{-1}) = (f_*(\alpha))^{-1}$.

Lemma 7.2.14. *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono funzioni continue, allora $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

DIMOSTRAZIONE. $(g \circ f)_*(\alpha) = g \circ f \circ \alpha = g_*(f_*(\alpha))$. □

Teorema 7.2.15. *Siano $f, g : X \to Y$ due funzioni continue tra spazi topologici. Supponiamo che esista un'ompotopia F tra f e g. Sia $x_0 \in X$ e sia $\gamma : [0, 1] \to Y$ dato da $\gamma(s) = F(x_0, s)$. Allora, se φ_γ è come nel Teorema 7.2.9*

$$g_* = \varphi_\gamma \circ f_*.$$

In altre parole f e g inducono lo stesso morfismo tra i gruppi fondamentali, a meno di isomorfismi. (Si noti che se l'omotopia è relativa a x_0 allora $f_* = g_*$.)

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, la composizione $F \circ \alpha$ è un'omotopia, a priori senza estremi fissi, tra $f_*(\alpha)$ e $g_*(\alpha)$ (Figura 3). Si tratta quindi di sistemare i punti base. Il laccetto $\varphi_\gamma(f_*(\alpha))$

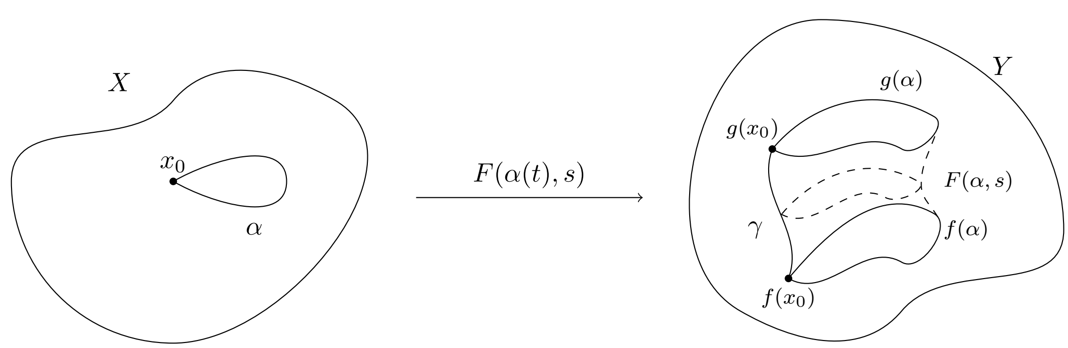


FIGURA 3. Visualizzazione del fatto che $\varphi_\gamma \circ f_* = g_*$

è dato da

$$\varphi_\gamma(f_*(\alpha))(t) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 3t) & t \in [0, 1/3] \\ F(\alpha(3t - 1), 0) & t \in [1/3, 2/3] \\ F(x_0, 3t - 2) & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Per ottenere un'omotopia tra $\varphi_\gamma(f_*(\alpha))$ e $g_*(\alpha)$, basta considerare

$$G(t,s) = \begin{cases} F(x_0, 1-3t(1-s)) & t \in [0,1/3] \\ F(\alpha(3t-1), s) & t \in [1/3, 2/3] \\ F(x_0, 3t(1-s)-2+3s) & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

che è un'omotopia tra $\varphi_\gamma(f*(\alpha))$ e un cammino omotopo a $g_*(\alpha)$. □

Corollario 7.2.16 (Il gruppo fondamentale è un invariante di omotopia)**.** *Se X e Y sono omotopicamente equivalenti allora hanno lo stesso gruppo fondamentale.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f : X \to Y$ ha $g : Y \to X$ come inversa di omotopia, le composizioni $g \circ f$ e $f \circ g$ sono omotope all'identità. L'indentità induce un isomorfismo del gruppo fondamentale. Per il Lemma 7.2.14 e il Teorema 7.2.15 sia f_* che g_* sono isomorfismi. □

In particolare spazi omeomorfi hanno lo stesso gruppo fondamentale (il viceversa non è vero però). Come vedremo, ciò sarà uno strumento molto potente per distinguere spazi diversi tra loro.

Esempio 7.2.17. Gli spazi contraibili sono semplicemente connessi in quanto un punto lo è.

Esempio 7.2.18. $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

Esempio 7.2.19. Il cono su uno spazio X è sempre semplicemente connesso.

Teorema 7.2.20. *Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ e $a_0 \in A$. Sia $\imath : A \hookrightarrow X$ l'inclusione.*

(1) *Se A è un retratto di X, allora $\imath_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ è un morfismo iniettivo.*
(2) *Se inoltre A è retratto di deformazione, allora $\imath_*$ è un isomorfismo.*

In particolare, X ha lo stesso gruppo fondamentale di ogni suo retratto di deformazione.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : X \to A$ una retrazione di X su A. Per definizione $f \circ \imath = Id_A$. Per il Lemma 7.2.14 e il Teorema 7.2.15, $f_* \circ \imath_* = (Id_A)_* = Id_{\pi_1(A,a_0)}$ è un isomorfismo e quindi $\imath_*$ è iniettiva (e f_* suriettiva). Se inoltre A è un retratto di deformazione, possiamo suppore che esista un'omotopia tra $\imath \circ f$ e l'identità di X. Sempre per il Teorema 7.2.15, $\imath_* \circ f_*$ è un isomorfismo. Quindi $\imath_*$ è anche suriettiva (e f_* iniettiva) ergo un isomorfismo. □

Teorema 7.2.21. *Siano X, Y spazi topologici. Allora $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con f_X e f_Y le proiezioni di $X \times Y$ su X e Y rispettivamente (per non far confusione col simbolo π_1 usato per i gruppi fondamentali). Siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ e $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ i punti base dei gruppi fondamentali. Definiamo le mappe

$$\times : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, p_0) \qquad (\alpha \times \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$$

$$H : \pi_1(X \times Y, p_0) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \qquad H(\gamma) = \big((f_X)_*(\gamma), (f_Y)_*(\gamma)\big).$$

Chiaramente $H(\alpha \times \beta) = (\alpha, \beta)$. Quindi $H \circ \times$ è l'identità di $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. D'altronde $((\times \circ H)(\gamma))(t) = \big((f_X)_*(\gamma)(t), (f_Y)_*(\gamma)(t)\big) = \gamma(t)$. Quindi H e $\times$ sono una l'inversa dell'altra. □

Fin'ora abbiamo visto solo esempi di spazi con gruppo fondamentale banale. Possiamo intuire quali possano essere alcuni esempi di spazi con gruppo fondamentale non banale (che dite di S^1?) Ma per poter dimostrare che determinati gruppi fondamentali siano effettivamente non banali, la via più naturale è quella di introdurre la controparte del gruppo fondamentale: la teoria dei rivestimenti.

7.3. Rivestimenti

Definizione 7.3.1. Sia X uno spazio topologico. Un **rivestimento** di X è il dato di uno spazio topologico $\widehat{X}$ e una funzione continua $\pi : \widehat{X} \to X$ tale che ogni $x \in X$ abbia un intorno aperto U — detto **aperto banalizzante** — tale che $\pi^{-1}(U)$ sia unione disgiunta di aperti non vuoti in $\widehat{X}$ — detti **placche** di U— tali che la restrizione di π a ognuno di essi sia un omeomorfismo con U.

A volte può succedere che con la parola *rivestimento* ci si riferisca alla sola proiezione, a volte al solo $\widehat{X}$ (se la proiezione è sottintesa o non rilevante). Ci si può quindi imbattere in frasi del tipo "sia f un rivestimento" oppure "sia $\widehat{X}$ un rivestimento di X". In alcuni testi la proiezione si chiama *proiezione di rivestimento*.

Esempio 7.3.2. Identificando S^1 con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la proiezione naturale $\mathbb{R} \to S^1$ è un rivestimento, che si può visualizzare agevolmente pensando $\mathbb{R}$ *storto* come una molla infinita (Figura 4).

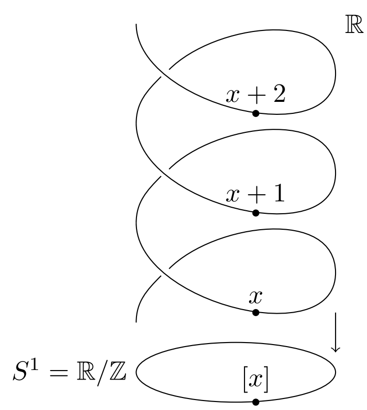


FIGURA 4. Il rivestimento $\mathbb{R} \to S^1$

OSSERVAZIONE 7.3.3. La definizione di rivestimento è una di quelle che van lette con attenzione. Essa impone che esista un ricoprimento fatto di aperti banalizzanti. Si noti però che, affinché U sia un aperto banalizzante, non si richiede solo che $\pi^{-1}(U)$ sia un unione disgiunta di placche omeomorfe a U, ma anche che la proiezione di rivestimento realizzi l'omeomorfismo.

Inoltre si noti che la richiesta è che "per ogni $x \in X$ esista U intorno di x tale che…", e **non** che "per ogni $y \in \widehat{X}$ esista un intorno V tale che la proiezione ristretta a V sia omeomorfismo con $\pi(V)$"; **né** che "la restrizione a ogni componente V di $\pi^{-1}(U)$ sia un omeomorfismo tra V e $\pi(V)$".

Esempio 7.3.4. Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\widehat{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, x > 0\} \cup \{y = 0\}$. La proiezione $\pi(x, y) = x$ non è un rivestimento. Infatti il punto 0 non ha un intorno con le proprietà richieste: Per ogni intorno U dello zero, il pezzo di $\pi^{-1}(U)$ che giace sul ramo d'iperbole non contiene preimmagini dello zero. In particolare π ristretta a $\pi^{-1}(U) \cap \{\text{iperbole}\}$ non può essere suriettiva e quindi non può essere un omeomorfismo con U.

Si noti tuttavia che:

- ogni punto di $\widehat{X}$ ha un intorno V tale che la restrizione di π a V sia un omeomorfismo tra V e $\pi(V)$;
- per ogni intervallo aperto $U \subseteq \mathbb{R}$ contenente lo zero, $\pi^{-1}(U)$ è fatto di due componenti connesse e che la restrizione di π a ognuna di esse è un omeomorfismo con l'immagine.
- $\pi^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ è fatto comunque di due componenti omeomorfe a $(-\varepsilon, \varepsilon)$, ma la proiezione non realizza l'omeomorfismo.

Esempio 7.3.5. Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\widehat{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. La proiezione $\pi(x, n) = x$ è un rivestimento.

Esempio 7.3.6. Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\widehat{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La proiezione $\pi(x, y) = x$ non è un rivestimento.

Esempio 7.3.7. Sia X la retta con due zeri (Esempio 2.2.10). La proiezione da $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ su X non è un rivestimento (i due zeri non hanno la proprietà richiesta).

Esempio 7.3.8. Sia X la retta con due zeri (Esempio 2.2.10). La proiezione di X su $\mathbb{R}$ che identifica i due zeri non è un rivestimento (la preimmagine di un intorno dello 0 non è T_2 quindi non può essere omeomorfa a un sottoinsieme di $\mathbb{R}$).

Esempio 7.3.9. Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\widehat{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$. La proiezione $\pi(x, y) = x$ non è un rivestimento. Infatti il punto 0 non ha un intorno con le proprietà richieste.

Esempio 7.3.10. Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\widehat{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. La proiezione $\pi(x, y) = x$ è un rivestimento.

Esempio 7.3.11. Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\widehat{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$. La proiezione $\pi(x, y) = x$ non è un rivestimento. Infatti il punto 0 non ha un intorno con le proprietà richieste. In questo caso $\pi^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ è omeomorfo ad un intervallo aperto ma la proiezione $\pi : \pi^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ non è iniettiva. Quindi non può essere un omeomorfismo.

Esempio 7.3.12. Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$. La proiezione $C \to \mathbb{R}^2$ data da $\pi(x, y, z) = (x, y)$ non è un rivestimento. Infatti l'origine non ha un intorno con le proprietà richieste.

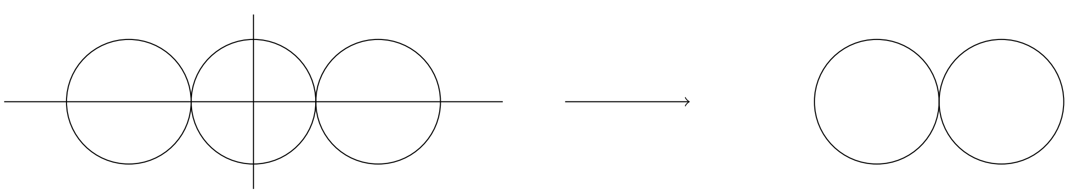
Esempio 7.3.13. Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. La funzione $f : S^1 \to S^1$ data da $f(z) = z^2$ è un rivestimento di S^1 su sé stesso. In generale $z \mapsto z^n$ è un rivestimento di S^1 su sé stesso.

Esempio 7.3.14. Sia $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$. La funzione $f : D \to D$ data da $f(z) = z^2$ non è un rivestimento. Infatti la restrizione di f a un qualsiasi intorno di zero non è mai iniettiva, dunque non può essere un omeomorfismo. In generale $f(z) = z^n$ non è un rivestimento per $n \geq 2$.

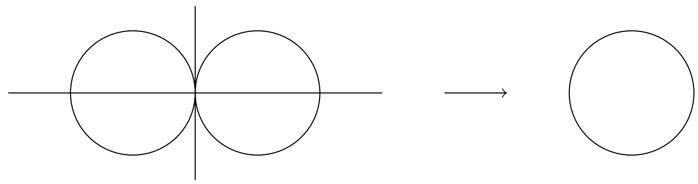
Esempio 7.3.15. Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. La funzione $f : \mathbb{R} \to S^1$ data da $f(x) = e^{ix}$ è un rivestimento.

Esempio 7.3.16. La proiezione $\mathbb{R}^2 \to T^2$ data dal quoziente per $\mathbb{Z}^2$ è un rivestimento.

Esempio 7.3.17. Sia $X \subseteq \mathbb{C}$ un insieme costituito da tre cerchi di raggio unitario e centrati in $-2, 0, 2$ e sia $r(z) = -z$ la rotazione di 180 gradi. Ciò determina un'azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su X. Sia Y il quoziente di X per tale azione. Esso è omeomorfo all'unione di soli due cerchi attaccati per un punto e la proiezione $\pi : X \to Y$ è un rivestimento. Quest'ultima può essere realizzata nella vita reale prendendo due anelli di legno (i cerchi laterali) e legandoli con due spaghi di uguale lunghezza (che formeranno il cerchio centrale). A questo punto si sovrappongono i due cerchi di legno e si arrotola due volte su sè stesso il cerchio centrale, in pratica formando un cerchio con ogni spago e poi sovrapponendoli (in questo modo il cerchio centrale dimezza la propria dimensione nell'arrotolamento, ma dal punto di vista della topologia la lunghezza non conta).



Esempio 7.3.18. Sia $X \subseteq \mathbb{C}$ un insieme costituito da due cerchi di raggio unitario e centrati in ± 1 e sia $r(z) = -z$ la rotazione di 180 gradi. Ciò determina un'azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su X. Sia $X/\sim$ il quoziente. Esso è omemorfo a S^1 e la proiezione $\pi : X \to X/\sim$ non è un rivestimento. Ciò si vede bene guardando le componenti connesse di un intorno dell'origine privato dell'origine.



Esempio 7.3.19. La proiezione $S^2 \to \mathbb{RP}^2$ data dall'identificazione antipodale è un rivestimento.

Esempio 7.3.20. La proiezione $D^2 \to \mathbb{RP}^2$ data dall'identificazione antipodale al bordo non è un rivestimento. Infatti se $x \in \partial D^2$ e U è un intorno di $[x]$ in $\mathbb{RP}^2$, allora $\pi^{-1}(U)$ non è unione disgiunta di copie di U. La restrizione della proiezione a ∂D^2 è invece un rivestimento di $\pi(\partial D^2) = \mathbb{RP}^1 \simeq S^1$.

Esempio 7.3.21. Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con la metrica dei raggi. La proiezione su $\mathbb{R}^+$ data dalle coordinate polari $(r, \theta) \mapsto r$ è un rivestimento.

Esempio 7.3.22. Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con la metrica Euclidea. La proiezione su $\mathbb{R}^+$ data dalle coordinate polari $(r, \theta) \mapsto r$ non è un rivestimento.

Teorema 7.3.23. *Le proiezioni di rivestimento sono mappe aperte.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento. Sia A un aperto di $\widehat{X}$ e sia $a \in A$. Sia U un aperto banalizzante contenente $\pi(a)$ e sia V la placca di U contenente a. $V \cap A$ è un aperto e, siccome $\pi|_V : V \to U$ è un omeomorfismo, essa è una mappa aperta. Quindi $\pi(V \cap A)$ è un aperto contenente $\pi(a)$ e contenuto in $\pi(A)$. Ne segue che ogni punto di $\pi(A)$ è interno e dunque $\pi(A)$ è un aperto. □

Teorema 7.3.24 (G-rivestimenti)**.** *Sia X uno spazio topologico su cui agisce per omeomorfismi un gruppo G. Se ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U tale che per ogni $g \neq h \in G$ si ha $g(U) \cap h(U) = \emptyset$* [1] *allora la proiezione naturale $X \to X/G$ è un rivestimento.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento di X fatto di aperti tali che $gU_i \cap hU_i \neq \emptyset \to g = h$. Vediamo che per ogni i, l'aperto $[U_i] \in X/G$ è un aperto banalizzante. La sua preimmagine non è altro che l'orbita di U_i e per ipotesi $GU_i = \cup_{g \in G} gU_i$ è costituita da aperti disgiunti. La proiezione, ristretta a ogni gU_i, è iniettiva per ipotesi, tautologicamente suriettiva sull'immagine e continua. Inoltre per il Teorema 6.5.28 essa è anche aperta, ergo un omeomorfismo. □

Teorema 7.3.25. *Siano $f : \widehat{X} \to X$ e $g : \widehat{Y} \to Y$ rivestimenti. Allora*

$$f \times g : \widehat{X} \times \widehat{Y} \to X \times Y \qquad (f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

è un rivestimento.

DIMOSTRAZIONE. Siano U, V aperti banalizzanti in X e Y rispettivamente e siano $\widehat{U}$ e $\widehat{V}$ loro placche. La restrizione di $f \times g$ è un omeomorfismo tra $\widehat{U} \times \widehat{V}$ e $U \times V$. Inoltre se $\widehat{U}'$ è un'altra placca di U, allora $\widehat{U}' \times \widehat{V}$ è disgiunto da $\widehat{U} \times \widehat{V}$ e similmente per le altre placche di V. Quindi $(f \times g)^{-1}(U \times V)$ è unione disgiunta di prodotti del tipo $\widehat{U} \times \widehat{V}$, che risultano dunque essere le placche di $U \times V$. □

Esempio 7.3.26. $S^1 \times \mathbb{R}$ riveste il toro $S^1 \times S^1$. Infatti $\mathbb{R}$ riveste S^1 via $t \mapsto e^{it}$ e S^1 riveste sé stesso, per esempio attraverso $z \mapsto z^n$.

Uno spazio sufficientemente patologico da produrre controesempi interessanti è costituito dall'orecchino hawaiano (Esempio 3.5.5). Per esempio, se gli spazi sono sufficientemente regolari, come le varietà o i grafi, la composizione di rivestimenti è un rivestimento (si veda il Corollario 7.9.13). In generale però ciò non è vero.

[1] per esempio se X è una varietà e G agisce in modo libero e propriamente discontinuo, vedasi il Teorema 6.6.17.

Esempio 7.3.27. Con la notazione dell'Esempio 3.5.5, il cosiddetto orecchino hawaiano è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ formato da una famiglia di cerchi C_n sempre più piccoli, tutti tangenti a uno stesso punto. Applicando la costruzione dell'Esempio 7.3.17, ma solo al cerchio C_n, si costruisce un rivestimento $f_n : \widehat{X}_n \to X$ che "srotola" il cerchio C_n e sdoppia gli altri. (In Figura 5 si è srotolato il secondo cerchio.)

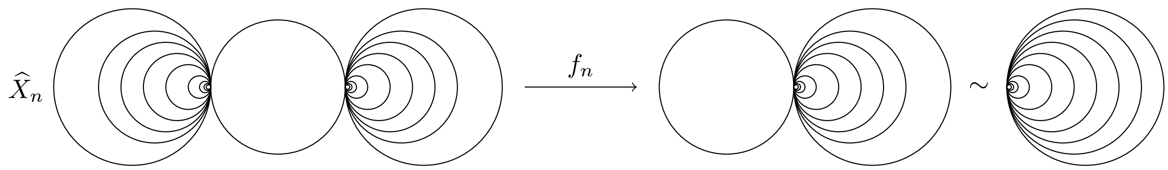


FIGURA 5. Un rivestimento dell'orechino hawaiano

Esempio 7.3.28. Sia X un orecchino hawaiano e sia $\widehat{X}_n$ il rivestimento costruito nell'Esempio 7.3.27. Sia $Y = X \times \mathbb{N}$ un'unione disgiunta di copie di X. Sia Z lo spazio formato dall'unione disgiunta degli $\widehat{X}_n$. Per ogni $x \in \widehat{X}_n$ sia $\pi(x) = (f_n(x), n)$. Ciò definisce una funzione $\pi : Z \to Y$. Si verifica agilmente che π è un rivestimento. La proiezione $p : Y \to X$ data da $p(x,n) = x$ è chiaramente un rivestimento. Ma la composizione $p \circ \pi$ non è un rivestimento in quando ogni intorno del punto singolare contiene un intero cerchio C_n, che però risulta "srotolato" in Z.

7.4. Sollevamenti di cammini e omotopie

Definizione 7.4.1 (Convenzione per gli spazi puntati)**.** Uno spazio puntato è il dato di uno spazio topologico X e di un suo punto x_0. Si indica con (X, x_0). Se (X, x_0) e (Y, y_0) sono spazi puntati, una funzione $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è una funzione $f : X \to Y$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Se (X, x_0) è uno spazio puntato, quando si dice che $(\widehat{X}, \widehat{x}_0)$ è un rivestimento di (X_0, x_0) si intende che $\pi(\widehat{x}_0) = x_0$. I rivestimenti hanno un'importante proprietà di **sollevamento** di cammini, omotopie e mappe. Se $\pi : \widehat{Y} \to Y$ è un rivestimento e $f : X \to Y$ una funzione, per sollevamento si intende una funzione $\widehat{f} : X \to \widehat{Y}$ tale che $f = \pi \circ \widehat{f}$; altrimenti detto, tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \widehat{Y} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widehat{f}"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

I sollevamenti di funzioni continue si intendono sempre continui, se non altrimenti specificato.

Lemma 7.4.2 (Dell'unicità del sollevamento)**.** *Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento, sia C uno spazio connesso e sia $f : C \to X$ una funzione continua. Siano $F, G : C \to \widehat{X}$ due sollevamenti di f. Se esiste $c \in C$ tale che $F(c) = G(c)$ allora $F = G$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = \{x \in C : F(x) = G(x)\}$ l'insieme ove F e G coincidono. Per ipotesi $A \neq \emptyset$. Se dimostriamo che A e A^c sono entrambi aperti, la connessione di C conclude.

Sia $x \in C$ e sia U un aperto banalizzante contenente il punto $f(x) = \pi(F(x)) = \pi(G(x))$. Sia V la placca di U contenente $F(x)$ e W quella contenente $G(x)$. Siccome F e G sono continue, esiste un aperto $B \subseteq C$ contenente x e tale che $F(B) \subseteq V$ e $G(B) \subseteq W$. Siccome $\pi : V \to U$ è un omeomorfismo, la condizione $f(x) = \pi(F(x))$ determina F su B e si ha

$$F(x) = \pi^{-1}(f(x)).$$

Se $x \in A$, alias $F(x) = G(x)$, allora $V = W$ e dunque $G(x) = \pi^{-1}(f(x)) = F(x)$ per ogni $x \in B$. Quindi A è aperto. Se invece $x \in A^c$, et ergo $G(x) \neq F(x)$, allora $W \neq V$. Siccome placche diverse son disgiunte, ciò implica che $F(x) \neq G(x)$ per ogni $x \in B$. Quindi anche A^c è aperto. □

Corollario 7.4.3. *Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento, sia $f : Y \to X$ una funzione continua e sia $\widehat{f} : Y \to \widehat{X}$ un suo sollevamento. Sia $F : Y \times [0,1]$ un'omotopia di f e siano $\widehat{F}, \widehat{G}$ due sollevamenti di F tali che $\widehat{F}_0 = \widehat{f} = \widehat{G}_0$. Allora $\widehat{F} = \widehat{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $y \in Y$ l'insieme $\{y\} \times [0,1]$ è connesso e quindi il Lemma 7.4.2 si applica. Siccome $\widehat{F}_0(y) = \widehat{G}_0(y) = \widehat{f}(y)$, si ha $\widehat{F}(y,t) = \widehat{G}(y,t)$ per ogni (y,t). □

Lemma 7.4.4 (Del sollevamento)**.** *Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento, sia $f : Y \to X$ una funzione continua e sia $\widehat{f} : Y \to \widehat{X}$ un suo sollevamento. Allora ogni omotopia $F : Y \times [0,1] \to X$ di f ha un unico sollevamento $\widehat{F}$ tale che $\widehat{F}_0 = \widehat{f}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $y \in Y$ sia

$$T_y = \{t \in [0,1] : \exists A \text{ intorno aperto di } y, \text{ tale che } F|_{A\times[0,t]} \text{ ha un sollevamento che estende} \widehat{f}|_A\}.$$

Per prima cosa dimostriamo che $T_y = [0,1]$. Per come è definito T_y, esso contiene lo zero e se $t < s \in T_y$, allora $t \in T_y$. In altre parole T_y è un sottosegmento di $[0,1]$ contenente lo zero. Sia $t_0 = \sup T_y$. Sia U un aperto banalizzante contenente $F(y,t_0)$. Per continuità di F, esiste un aperto B di Y contenente y e $\varepsilon > 0$ tale che $F(B \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \subseteq U$. Essendo $t_0 = \sup T_y$, il punto $t_1 = t_0 - \varepsilon/2$ appartiene a T_y. Quindi esiste A aperto contenente y e un sollevamento $\widehat{F}_1$ di $F|_{A\times[0,t_1]}$. Sia V la placca di U contenente $\widehat{F}_1(y,t_1)$. Si noti che V contiene $\widehat{F}_1(z,t_1)$ per ogni $z \in A \cap B$. Definiamo

$$\widehat{F}_2 : (A \cap B) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to V \subseteq \widehat{X} \qquad \text{come} \qquad \widehat{F}_2(z,t) = \pi^{-1}(F(z,t)).$$

Per costruzione, $\widehat{F}_1(z,t) = \widehat{F}_2(z,t)$ per ogni $z \in A \cap B$ e $t \in (t_0 - \varepsilon, t_1]$. È dunque ben definita la funzione

$$\widehat{F}_3 : A \cap B \times [0, t_0 + \varepsilon) \to \widehat{X} \qquad \widehat{F}_3(z,t) = \begin{cases} \widehat{F}_1(z,t) \text{ per } t < t_1 \\ \widehat{F}_2(z,t) \text{ per } t_0 - \varepsilon < t \end{cases}$$

e si verifica immediatamente che essa è continua e un sollevamento di F sull'insieme $(A \cap B) \times [0, t_0 + \varepsilon)$. Ne segue che t_0 è un punto interno di T_y (rispetto alla topologia indotta da $[0,1]$). Essendo $t_0 = \sup T_y$, se ne deduce che $T_y = [0,1]$, come volevasi dimostrare.

Possiamo ora concludere la dimostrazione. Per ogni $y \in Y$ sappiamo infatti che esiste un aperto A_y contenente y e un sollevamento $\widehat{F}_y : A_y \times [0,1] \to \widehat{X}$ della restrizione di F all'insieme $A_y \times [0,1]$.

Se $A_{y_1} \cap A_{y_2} \neq \emptyset$ allora le restrizioni di $\widehat{F}_{y_1}$ e $\widehat{F}_{y_2}$ a $(A_{y_1} \cap A_{y_2}) \times [0,1]$ sono due sollevamenti della restrizione di F, e coincidono al tempo 0. Per il Corollario 7.4.3 essi coincidono per ogni $t \in [0,1]$. Le funzioni $\widehat{F}_y$ definiscono quindi globalmente un sollevamento di F, che è unico per il Corollario 7.4.3. □

Corollario 7.4.5. *Sia $\pi : (\widehat{X}, \widehat{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento. Allora $\pi_* : \pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma \in \pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0)$ un laccetto tale che $\pi(\gamma)$ sia omotopicamente banale in X. Per il Lemma 7.4.4 γ è omotopicamente banale anche in $\widehat{X}$. □

Nel caso particolare in cui lo spazio Y sia un punto (e quindi l'omotopia F è semplicemente un cammino) otteniamo il seguente risultato noto come Teorema del sollevamento unico dei cammini.

Teorema 7.4.6 (Del sollevamento unico dei cammini)**.** *Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento e sia $\gamma : [0,1] \to X$ un cammino. Allora per ogni $\widehat{x}_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ esiste un unico sollevamento $\widehat{\gamma} : [0,1] \to \widehat{X}$ tale che $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{x}_0$.*

Ovviamente, se $\pi : (\widehat{Y}, \widehat{y}_0) \to (Y, y_0)$ è un rivestimento e $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è una funzione continua che ha un sollevamento $\widehat{f} : (X, x_0) \to (\widehat{Y}, \widehat{y}_0)$, allora $f_*(\pi_1(X, x_0)) < \pi_*(\pi_1(\widehat{Y}, \widehat{y}_0))$ perché $f = \pi \circ \widehat{f}$. In realtà vale anche il viceversa.

Teorema 7.4.7. *Sia $\pi : (\widehat{Y}, \widehat{y}_0) \to (Y, y_0)$ un rivestimento, sia (X, x_0) uno spazio connesso e localmente connesso per archi e sia $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una funzione continua. Allora f ha un sollevamento $\widehat{f} : (X, x_0) \to (\widehat{Y}, \widehat{y}_0)$ se e solo se $f_*(\pi_1(X, x_0)) < \pi_*(\pi_1(\widehat{Y}, \widehat{y}_0))$.*

DIMOSTRAZIONE. Del solo se si è già detto. Costruiamo ora esplicitamente un sollevamento di f. In x_0 si pone $\widehat{f}(x_0) = \widehat{y}_0$. Per ogni altro $x \in X$, sia γ un cammino da x_0 a x in X. Per il Teorema 7.4.6 il cammino $f \circ \gamma$ ha un unico sollevamento in $\widehat{Y}$. Si definisce $\widehat{f}(x)$ come il punto finale del sollevamento di $f \circ \gamma$. Se η è un altro cammino da x_0 a x, allora $\eta^{-1}\gamma$ è un laccetto $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$. Per ipotesi $f_*(\alpha) \in \pi_*(\pi_1(\widehat{Y}, \widehat{y}_0))$. Quindi $f \circ \alpha$ è omotopo a un laccetto β che si solleva a un laccetto $\widehat{\beta}$ in $\widehat{Y}$, con punto base $\widehat{y}_0$. Per il Lemma 7.4.4 tale omotopia si solleva e quindi i sollevati di $f \circ \gamma$ e $f \circ \eta$ hanno lo stesso punto finale. Ne segue che $\widehat{f}$ è ben definita e $f = \pi \circ \widehat{f}$.

Dimostriamo infine che $\widehat{f}$ è continua, mostrando che è continua in ogni punto. Sia $x \in X$ e sia B un intorno di $\widehat{f}(x)$ in $\widehat{Y}$. Visto che le proiezioni di rivestimento son mappe aperte (Teorema 7.3.23), $\pi(B)$ è un aperto in Y. Per definizione di rivestimento, esiste un aperto banalizzante U con $\pi(\widehat{f}(x)) = f(x) \in U \subseteq \pi(B)$. Sia V la placca di U contenente $\widehat{f}(x)$. Siccome f è continua, esiste un intorno aperto A di x tale che $f(A) \subseteq U$, ed essendo X localmente connesso per archi, A può essere scelto connesso per archi. Ne segue che, per come è definita $\widehat{f}$, si ha che $\widehat{f}(A) = \pi^{-1}(f(A)) \cap V$. Quindi $\widehat{f}^{-1}(B)$ contiene A e dunque è un intorno di x. □

Esempio 7.4.8 (Sinusoide topologica chiusa). Sia X lo spazio ottenuto dalla sinusoide topologica attaccando la coda a zero. Più precisamente, in $\mathbb{R}^2$ si considera la chiusura del grafico di $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin(1/x)$ e si identifica il punto $(1, \sin(1))$ con $(0,0)$ (Figura 6). Sia ora $\mathbb{R} \to S^1$ il

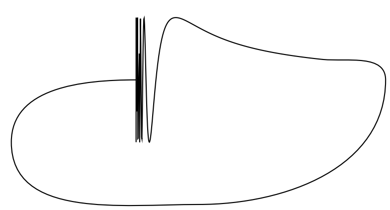


FIGURA 6. La sinusoide topologica chiusa

rivestimento naturale dato dall'identificazione $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La funzione $f : X \to S^1$ data da $(x, y) \to [x]$ è continua ma non ha un sollevamento continuo su $\mathbb{R}$. Eppure X è semplicemente connesso! Ciò non contraddice il Teorema 7.4.7 in quanto X non è localmente connesso per archi.

Esercizio 7.4.9. Dimostrare che lo spazio X dell'Esempio 7.4.8 è semplicemente connesso secondo la Definizione 7.2.11.

Esercizio 7.4.10. Ripercorrere la dimostrazione del Teorema 7.4.7 con in mano l'Esempio 7.4.8 per vedere dove non funziona.

7.5. Fibre, grado e monodromia

Definizione 7.5.1. Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento e sia $a \in X$. La **fibra** di a è l'insieme $\widehat{X}_a = \pi^{-1}(a)$.

Per definizione di rivestimento, la fibra di un punto è un insieme discreto. L'insieme degli automorfismi di una fibra, cioè delle permutazioni dei suoi elementi, si denota con $\mathrm{Aut}(\widehat{X}_a)$.

Teorema 7.5.2. *Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento e siano $a, b \in X$. Ogni cammino $\gamma \in \Omega(X, a, b)$ induce una corrispondenza biunivoca naturale $\psi_\gamma : \widehat{X}_a \to \widehat{X}_b$. Inoltre, se γ è omotopo a γ' a estremi fissi, allora $\psi_\gamma = \psi_{\gamma'}$. Infine, se $\eta \in \Omega(X, b, c)$ allora $\psi_{\gamma\eta} = \psi_\eta \circ \psi_\gamma$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $x \in \widehat{X}_a$, $\psi_\gamma(x)$ è definito come il punto finale dell'unico sollevamento $\widehat{\gamma}$ di γ che inizia per x. Siccome $\widehat{\gamma}$ è un sollevamento di γ, il suo punto finale sta in $\widehat{X}_b$. Per dimostrare che ψ_γ sia biunivoca, si noti che $\psi_{\gamma^{-1}} = (\psi_\gamma)^{-1}$. L'invarianza per omotopia discende direttamente dal Lemma 7.4.4 del sollevamento. La regola di composizione è immediata. □

Dal Teorema 7.5.2 si deducono immediatamente un paio di corollari, che permettono di dare le definizioni di grado e monodromia.

Corollario 7.5.3. *Se $\widehat{X} \to X$ è un rivestimento e X è connesso per archi, allora le fibre hanno tutte la stessa cardinalità.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi di connessione, per ogni $a, b \in X$ l'insieme $\Omega(X, a, b)$ è non vuoto, per cui esiste una corrispondenza biunivoca tra la fibra di a e quella di b. □

Definizione 7.5.4. Se $\widehat{X} \to X$ è un rivestimento di uno spazio connesso per archi, allora si definisce il suo **grado** come la cardinalità di una fibra.

È spesso in uso la notazione
$$\widehat{X} \xrightarrow{d:1} X$$
per indicare un rivestimento di grado d.

Corollario 7.5.5. *Se $\widehat{X} \to X$ è un rivestimento, allora per ogni $x \in X$ si ha una (anti)-rappresentazione*[2]*, cioè un (anti)-morfismo di gruppi ψ , da $\pi_1(X, x)$ nel gruppo degli automorfismi della fibra $\widehat{X}_x$.*

DIMOSTRAZIONE. È un istanza particolare del Teorema 7.5.2 con $a = b = x$. □

Definizione 7.5.6. La rappresentazione $\psi : \pi_1(X, x) \to \mathrm{Aut}(\widehat{X}_x)$ si chiama rappresentazione di **monodromia** o semplicemente monodromia del rivestimento.

OSSERVAZIONE 7.5.7. Si noti che il Teorema 7.5.2 ci dice che la monodromia sulle fibre ψ inverte la moltiplicazione a destra con quella a sinistra. Quindi $\pi_1(X)$ agisce **a destra** sulle fibre e si usa la notazione $x\gamma$ come equivalente di $\psi(\gamma)(x)$. La notazione semplifica i calcoli in quanto $\psi(\gamma\eta)(x) = \psi(\eta) \circ \psi(\gamma)(x) = \psi(\eta)(\psi(\gamma)(x)) = \psi(\eta)(x\gamma) = x\gamma\eta$.

7.6. Prime conseguenze importanti, Teorema del punto fisso di Brouwer e Teorema di Borsuk-Ulam

Con quello che abbiamo sin ora è possibile dimostrare teoremi abbastanza importanti. La monodromia per esempio fornisce finalmente uno strumento che permette di dimostrare che il gruppo fondamentale di certi spazi è non banale.

Teorema 7.6.1. *Se uno spazio topologico X ha un rivestimento connesso per archi e di grado > 1 allora $\pi_1(X)$ è non banale.*

[2] Il prefisso "anti" indica che ψ inverte l'ordine della moltiplicazione.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento connesso per archi e di grado > 1, e sia $a \in X$. La fibra $\widehat{X}_a$ contiene almeno due punti $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2$. Siccome $\widehat{X}$ è connesso per archi, allora esiste $\widehat{\gamma} \in \Omega(\widehat{X}, \widehat{a}_1, \widehat{a}_2)$. Il cammino $\gamma = \pi \circ \widehat{\gamma}$ è un laccetto basato in a e $\psi_\gamma(\widehat{a}_1) = \widehat{a}_2$, in particolare $\psi_\gamma \neq 1$. Quindi $\gamma \neq 1 \in \pi_1(X, a)$. □

Esempio 7.6.2. L'orecchino hawaiano ha gruppo fondamentale non banale: La costruzione dell'Esempio 7.3.27 fornisce infatti un rivestimento connesso per archi e di grado due.

Esempio 7.6.3. Per ogni n, il gruppo fondamentale di $\mathbb{RP}^n$ è non banale. Infatti $\mathbb{RP}^n$ è S^n modulo l'azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ che agisce tramite l'antipodale. Per il Teorema 7.3.24 la proiezione $S^n \to \mathbb{RP}^n$ è un rivestimento. Esso ha grado 2 e S^n è connesso per archi.

Teorema 7.6.4. $\pi_1(S^1) \neq 1$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione $z \mapsto z^2$ è un rivestimento connesso di grado due di S^1 su sé stesso. Il Teorema 7.6.1 conclude. (Si noti che si poteva argomentare come nell'Esempio 7.6.3 notando che $S^1 = \mathbb{RP}^1$.) □

Corollario 7.6.5. $\mathbb{R}^2$ *non è omeomorfo a* $\mathbb{R}^n$ *per ogni* $n \neq 2$ *(senza usare l'invarianza del dominio).*

DIMOSTRAZIONE. Per $n = 1$ si ragiona per connessione togliendo un punto. Per $n > 2$ si ragiona per semplice connessione rimuovendo un punto: $\mathbb{R}^2$ meno un punto si retrae su un cerchio e quindi ha gruppo fondamentale non banale, $\mathbb{R}^n$ meno un punto invece è semplicemente connesso per ogni $n > 2$. □

Esercizio 7.6.6. Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ meno un punto è semplicemente connesso per ogni $n > 2$.

Corollario 7.6.7. *Il gruppo fondamentale del nastro di Moebius è non banale. In particolare il nastro di Moebius non è omeomorfo a* $\mathbb{R}^2$ *e quindi* $\mathbb{RP}^2$ *non è omeomorfo a* $\mathbb{CP}^1$ *(Si dia un'occhiata al Lemma 6.8.1).*

DIMOSTRAZIONE. Il nastro di Moebius si retrae sull'S^1 centrale; per il Teorema 7.2.20 il suo gruppo fondamentale è non banale. □

Corollario 7.6.8. *Il gruppo fondamentale del toro è non banale.*

DIMOSTRAZIONE. Il toro è omeomorfo a $S^1 \times S^1$ il cui gruppo fondamentale è il prodotto di due copie di $\pi_1(S_1)$ (Teorema 7.2.21) che è non banale (Teorema 7.6.4). □

Lemma 7.6.9. *Non esiste una retrazione* $D^2 \to S^1$.

DIMOSTRAZIONE. Se esistesse, per il Teorema 7.2.20 avremmo $\pi_1(S^1) < \pi_1(D^2)$. Ma $\pi_1(D^2)$ è banale (perché D^2 è contraibile) e $\pi_1(S^1)$ no (Teorema 7.6.4). □

Teorema 7.6.10 (del punto fisso di Brouwer bidimensionale)**.** *Ogni funzione continua* $f : D^2 \to D^2$ *ha un punto fisso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : D^2 \to D^2$ continua. Se per ogni $x \in D^2$ avessimo $f(x) \neq x$ allora potremmo definire $g(x)$ come l'intersezione con S^1 della retta passante per x e $f(x)$, dal lato di x. Ciò determinerebbe una retrazione di D^2 su S^1, che non esiste per il Lemma 7.6.9. □

Teorema 7.6.11 (di Borsuk-Ulam unidimensionale, Esercizio 4.6.68)**.** *Sia* $f : S^1 \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora esistono* x, y *antipodali tali che* $f(x) = f(y)$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione $g(x) = f(x) - f(-x)$ è continua, dispari (cioè $g(-x) = -g(x)$) e la tesi equivale a dire che esiste $x \in S^1$ tale che $g(x) = 0$. Siccome S^1 è connesso, $g(S^1)$ è un connesso di $\mathbb{R}$, ergo un intervallo. Dato $x \in S^1$, se $g(x) \neq 0$ allora $g(x)$ e $g(-x)$ sono due numeri di segno opposto in $g(S^1)$ che quindi, essendo un intervallo, contiene anche lo zero. □

Lemma 7.6.12. *Ogni funzione continua* $f : S^1 \to S^1$ *e dispari è omotopicamente non banale.*

DIMOSTRAZIONE. Usiamo il modello $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Parametrizziamo l'$S^1$ di partenza con $[0, 2\pi]$ (ove 0 è identificato con 2π). In questo modo se $\theta \leq \pi$ corrisponde a x, allora $-x$ corrisponde a $\theta + \pi$. In arrivo consideriamo il rivestimento $p : \mathbb{R} \to S^1$ dato da $p(x) = e^{ix}$.

Supponiamo per assurdo che esista una funzione continua e dispari $f : S^1 \to S^1$ che sia omotopicamente banale. A meno di rotazioni non è restrittivo supporre che $f(0) = f(2\pi) = 1 = e^{i0}$. Siccome f è omotopicamente banale, essa si solleva a una funzione $\widetilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}$. Siccome f è dispari si ha $\widetilde{f}(\theta + \pi) = \widetilde{f}(\theta) + k(\theta)\pi$ per un certo $k(\theta) \in \mathbb{Z}$ dispari. Siccome $\mathbb{Z}$ è discreto, per continuità e per connessione di S^1, $k(\theta) = k$ non dipende da θ.

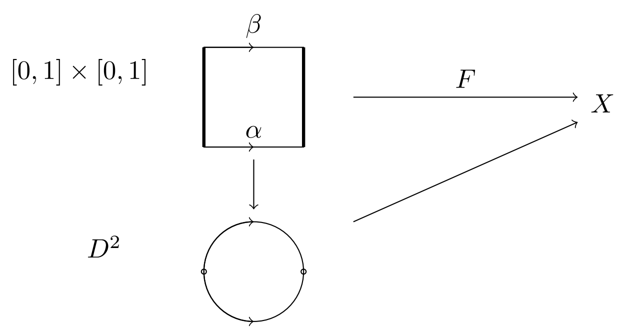
Ne segue che $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(2\pi) = \widetilde{f}(\pi + \pi) = \widetilde{f}(\pi) + k = \widetilde{f}(\pi + 0) + k = \widetilde{f}(0) + k + k$ (stesso k). Da $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(0) + 2k$ si deduce $k = 0$ ma ciò è assurdo perché k è dispari, ergo non nullo. □

Esercizio 7.6.13. Dimostrare che $\pi_1(S^1)$ è non banale usando solo il Lemma 7.6.12.

Definizione 7.6.14. Sia $\gamma : [0, 1] \to X$ un laccetto in uno spazio topologico. Identificando S^1 con $[0, 1]/\{0, 1\}$, γ induce una funzione continua, che continuiamo a chiamare γ, da S^1 a X (Teorema 2.2.16). Diciamo che γ **borda un disco** se esiste una funzione continua $F : D^2 \to X$ tale che la restrizione di F a $S^1 = \partial D^2$ sia γ.

Lemma 7.6.15. *Sia X uno spazio topologico e siano $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ due cammini con gli stessi estremi. Allora α è omotopo a β relativamente a $\{0, 1\}$ se e solo se il laccetto $\alpha\beta^{-1}$ borda un disco .*

DIMOSTRAZIONE. Se α è omotopo a β a estremi fissi allora esiste un'omotopia $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ tra essi tale che $F(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$ e $F(1, t) = \alpha(1) = \beta(1)$ per ogni t. $[0, 1] \times [0, 1]$ è un quadrato da cui, collassando a un punto il segmento $\{0\} \times [0, 1]$ e a un altro punto $\{1\} \times [0, 1]$, si ottiene un disco. Per il Teorema 2.2.16 F induce una funzione continua dal disco a X, la cui restrizione al bordo è il laccetto $\alpha\beta^{-1}$.



Viceversa, supponiamo che $\alpha\beta^{-1}$ bordi un disco. Siano $f_\alpha : [0, 1] \to S^1$ e $f_\beta : [0, 1] \to S^1$ le identificazioni di $[0, 1]$ col semicerchio superiore e inferiore rispettivamente, tali che $f_\alpha(0) = f_\beta(0)$. Sia $F : D^2 \to X$ una funzione continua che estende $\alpha\beta^{-1}$ e cioè tale che $\alpha(x) = F(f_\alpha(x))$ e $\beta(x) = F(f_\beta(x))$. Attraverso le combinazioni convesse si definisce $f_t(x) = t f_\beta(x) + (1 - t) f_\alpha(x)$. Essa è un'omotopia a estremi fissi tra f_α e f_β. La composizione di tale omotopia con F fornisce un'omotopia a estremi fissi tra α e β. □

Il seguente corollario è una conseguenza immediata del Lemma 7.6.15

Corollario 7.6.16. *Sia X uno spazio topologico e γ un laccetto in X. Allora γ borda un disco se e solo se esso è omotopicamente banale a estremi fissi.*

Esercizio 7.6.17. Dimostrare il Corollario 7.6.16.

Teorema 7.6.18 (di Borsuk-Ulam bidimensionale). *Sia $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione continua. Allora esistono p, q antipodali tali che $f(p) = f(q)$.*

DIMOSTRAZIONE. Usiamo il classico modello per la sfera $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Consideriamo $g(p) = f(p) - f(-p)$. Essa è una funzione continua e dispari da S^2 in $\mathbb{R}^2$. Se per ogni p avessimo $g(p) \neq 0$ potremmo definire $h(p) = g(p)/||g(p)||$, che sarebbe una funzione $h : S^2 \to S^1$ continua e dispari. Mostriamo che ciò è assurdo. Sia $S^1 \subset S^2$ il cerchio dato da $S^2 \cap \{z = 0\}$. La restrizione di h a S^1 fornisce una funzione continua $h : S^1 \to S^1$ omotopicamente banale (perché S^1 borda un disco in S^2) e dispari. Che non esiste per il Lemma 7.6.12. □

Corollario 7.6.19. *S^2 non è omeomorfo a un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f : S^2 \to X$ una qualsiasi funzione continua. Per il Teorema di Borsuk-Ulam f non è iniettiva (identifica almeno due punti antipodali). Quindi non può essere un omeomorfismo. Ergo non esistono omeomorfismi tra S^2 e X. □

7.7. Rivestimenti di grafi

I rivestimenti di grafi sono oggetti abbastanza semplici da costruire. In questa sezione ci limiteremo a rivestimenti finiti di grafi finiti e connessi. Ogni grafo sarà dotato della metrica naturale (Teorema 2.3.18) in cui ogni lato ha lunghezza unitaria.

Sia X un grafo. Per costruire tutti i rivestimenti possibili di grado d di X, si fa come segue. Si numerano i vertici $v_1, \ldots, v_n$ e si etichettano i lati con le lettere $e_1, \ldots, e_k$, specificando un'orientazione per ogni lato. Per ogni vertice v_i si considera la palla $B_i = B(v_i, \varepsilon)$ con $0 < \varepsilon < 1/2$. Essa è costituita dal vertice v_i e da segmenti lunghi ε, ognuno dei quali porta l'etichetta e l'orientazione del lato corrispondente. (Figura 7).

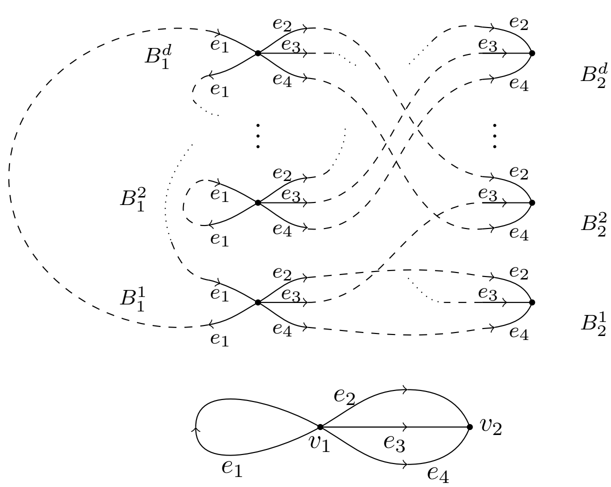


FIGURA 7. Come costruire un rivestimento di un grafo

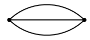
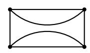
A questo punto, se si vuole un rivestimento di grado d, per ogni B_i si considerano d copie disgiunte $B_i^1, \ldots, B_i^d$ di B_i e si collega ogni segmento uscente di B_i^m ad un segmento entrante di un B_j^h che abbia la stessa etichetta. La possibilità $B_j^h = B_i^m$ è consentita. (Si noti che per ogni lato e_s ci sono esattamente d segmenti entranti etichettati con e_s e d uscenti.) In termini combinatori, se e_s esce dal vertice v_i ed entra in v_j (e potrebbe succedere $v_i = v_j$), si deve dare una permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}(d)$ e collegare il segmento etichettato e_s uscente da B_i^m con quello entrante in $B_j^{\sigma(m)}$.

Ovviamente la proiezione naturale $\sqcup_{i,m} B_i^m \to \cup_i B_i$ è un rivestimento per costruzione e, una volta collegati tutti segmenti, il risultato è un rivestimento di X di grado d. Indipendentemente dalle scelte fatte.

Esercizio 7.7.1. Dimostrare che la procedura appena descritta produce un rivestimento di X di grado d.

Esercizio 7.7.2. Trovare un criterio, basato sulle monodromie, che assicuri che il rivestimento ottenuto sia connesso.

Esercizio 7.7.3. Dimostrare che tutti i rivestimenti di grado d di X si ottengono in questo modo.

Esempio 7.7.4. A meno di omeomorfismi, l'unico grafo connesso che sia un rivestimento di grado due di  è  . (Provare tutte le combinazioni possibili per convincersene).

Esercizio 7.7.5. Trovare tutti i rivestimenti connessi e di grado due, del grafo della Figura 7.

Occhio che se anche due rivestimenti sono omeomorfi come spazi topologici, le proiezioni di rivestimento potrebbero essere diverse. (Provare con gli esempi appena discussi).

7.8. Automorfismi di rivestimento

Definizione 7.8.1. Siano $p : \widehat{X} \to X$ e $q : \widehat{Y} \to Y$ due rivestimenti. Un **morfismo** di rivestimenti tra p e q è una coppia di funzioni continue $f : X \to Y$ e $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ tali che $q \circ \widehat{f} = f \circ p$. In altre parole, un morfismo di rivestimenti è un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \widehat{X} \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "p"'] & \widehat{Y} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

In altre parole ancora, un morfismo è il dato di f e di un sollevamento $\widehat{f}$ di $f \circ p$.

Un morfismo si dice isomorfismo se entrambi f e $\widehat{f}$ sono omeomorfismi. Nel caso in cui $X = Y$ si richiede di solito che f sia l'identità.

Definizione 7.8.2. Siano $p : X_1 \to X$ e $q : X_2 \to X$ due rivestimenti dello stesso spazio X. Un **isomorfismo** di rivestimento è un omeomorfismo $F : X_1 \to X_2$ tale che $q \circ F = p$. In altre parole, un isomorfismo di rivestimenti è un diagramma commutativo ove F è un omeomorfismo:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & & X_2 \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

In altre parole ancora, un isomorfismo è un sollevamento di p che sia un omeomorfismo.

A meno di isomorfismi, i rivestimenti sono determinati dall'immagine del loro gruppo fondamentale.

Teorema 7.8.3. *Siano $p : (X_1, x_1) \to (X, x_0)$ e $q : (X_2, x_2) \to (X, x_0)$ due rivestimenti dello stesso spazio puntato (X, x_0). Supponiamo che X_1 e X_2 siano entrambi connessi e localmente connessi per archi. Allora esiste un isomorfismo $f : (X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$ se solo se $p_*(\pi_1(X_1, x_1)) = q_*(\pi_1(X_2, x_2))$.*

DIMOSTRAZIONE. Se f esiste, allora da $p = q \circ f$ si deduce $p_* = q_* \circ f_*$; siccome f è invertibile $p_* \circ f_*^{-1} = q_*$ e l'uguaglianza richiesta segue. Viceversa se $p_*(\pi_1(X_1, x_1)) = q_*(\pi_1(X_2, x_2))$, allora per il Teorema 7.4.7 p si solleva a una funzione $f : (X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$; similmente q si solleva a una $g : (X_2, x_2) \to (X_1, x_1)$. Ne segue che $p = p \circ g \circ f$. Dunque $g \circ f$ è un sollevamento di p che fissa x_1, per cui può solo essere l'identità (Lemma 7.4.2). Discorso analogo vale per $f \circ g$, ed f risulta essere l'isomorfismo cercato. □

In particolare, se due rivestimenti di uno stesso spazio sono semplicemente connessi e localmente connessi per archi, allora sono isomorfi.

Definizione 7.8.4. Sia X uno spazio localmente connesso per archi. Il **rivestimento universale** di X è, se esiste, un rivestimento semplicemente connesso di X. Esso è unico a meno di isomorfismi e si indica generalmente con
$$\pi : \widetilde{X} \to X.$$

Esempio 7.8.5. $\mathbb{R}$ è il rivestimento universale di S^1.

Esempio 7.8.6. $\mathbb{R}^2$ è il rivestimento universale del toro T^2.

Esercizio 7.8.7. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ è il rivestimento universale della bottiglia di Klein.

Esercizio 7.8.8. Determinare il rivestimento universale del nastro di Moebius.

Esercizio 7.8.9. Sia X la variante della sinusoide topologica chiusa (Esempio 7.4.8) descritta in Figura 8. Si costruiscano, se esistono, due rivestimenti connessi di X, di grado due e non isomorfi.

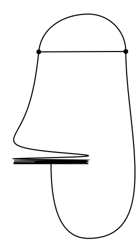


FIGURA 8. L'omino coi baffi: una variante della sinusoide topologica chiusa

Esercizio 7.8.10. Esistono due rivestimenti dell'omino coi baffi (Figura 8) connessi, di grado due e non omeomorfi come spazi topologici? (Si veda l'Esempio 7.7.4).

Esercizio 7.8.11. Si costruiscano due rivestimenti connessi dell'omino coi baffi (Figura 8) di grado tre e non omeomorfi.

Esercizio 7.8.12. Esibire due rivestimenti semplicemente connessi dell'omino coi baffi (Figura 8) non isomorfi né omeomorfi tra loro.

Definizione 7.8.13 (Il gruppo $\mathrm{Aut}(\pi)$)**.** Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento. Un **automorfismo** di π è un isomorfismo di rivestimento da $\widehat{X}$ in sé; in altre parole, un sollevamento di π che sia un omeomorfismo. Il gruppo degli automorfismi di π si chiama spesso gruppo delle trasformazioni *deck*, o *deck tranformations*[3], e si indica con $\mathrm{Aut}(\pi)$ oppure con $\mathrm{Aut}(\widehat{X} \to X)$ o con $\mathrm{Aut}(\widehat{X})$ (se la proiezione di rivestimento è chiara dal contesto).

Esempio 7.8.14. Sia $X = \mathbb{R}$ e $\widehat{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. La proiezione $\pi(x, n) = x$ è chiaramente un rivestimento. La mappa $f : \widehat{X} \to \widehat{X}$ data da $f(x, n) = (x, n+1)$ è un automorfismo di π. Se invece $\widehat{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, la mappa $f(x, n) = (x, n+1)$ è un sollevamento di π che non è un omeomorfismo (non è suriettiva).

[3]Non sembra esserci una buona alternativa italiana all'uso di questo vocabolo inglese "deck".

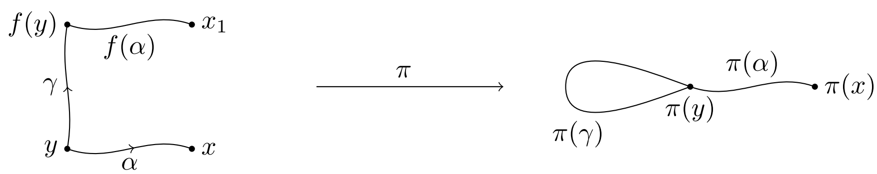
Per definizione, ogni automorfismo preserva le fibre e quindi $\mathrm{Aut}(\pi)$ agisce su ogni fibra attraverso permutazioni.

OSSERVAZIONE 7.8.15. Sia $\widehat{X} \to X$ un rivestimento, sia $x \in X$ e sia $\widehat{X}_x$ la sua fibra. In termini di azioni a destra e a sinistra, il gruppo $\mathrm{Aut}(\widehat{X})$ agisce a sinistra su X_x mentre l'azione di $\pi_1(X,x)$ attraverso la monodromia è a destra. Le due azioni sono compatibili nel senso che $f(y\gamma) = (fy)\gamma$ per ogni $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{X})$ e per ogni $\gamma \in \pi_1(X,x)$. Altrimenti detto $f(\psi(\gamma)(y)) = \psi(\gamma)(f(y))$. Ciò discende immediatamente dalla definizione di monodromia e di automorfismo di rivestimento.

Teorema 7.8.16. *Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento connesso. Allora l'azione di* $\mathrm{Aut}(\pi)$ *su ogni fibra è libera (cioè nessun automorfismo, eccetto l'identità, ha punti fissi). In particolare, ogni automorfismo è determinato dall'immagine di un sol punto.*

DIMOSTRAZIONE. Segue direttamente dal Lemma 7.4.2 (con $C = \widehat{X}$, $f = \pi$, $F \in \mathrm{Aut}(\pi)$ e $G = Id$). Diamo qui una dimostrazione alternativa, supponendo che $\widehat{X}$ sia connesso per archi, che a nostro avviso getta maggior luce sulla natura dell'azione di $\mathrm{Aut}(\pi)$ sulle fibre.

Sia $f \in \mathrm{Aut}(\pi)$ non banale. Allora esiste $y \in \widehat{X}$ tali che $f(y) \neq y$. Sia ora $x \in \widehat{X}$ un punto qualsiasi e mostriamo che $f(x) \neq x$. Siccome $\widehat{X}$ è connesso esiste un cammino γ da y a $f(y)$ e un cammino α da y a x. Il cammino $\pi(\alpha^{-1})\pi(\gamma)\pi(\alpha)$, che è un cammino chiuso basato in $\pi(x)$, si solleva a un cammino che termina in un elemento x_1 della fibra di x. Per il Teorema 7.5.2 applicato ad $\alpha \in \Omega(X,y,x)$, $x_1 \neq x$. Per definizione di automorfismo di rivestimento, il sollevamento di $\pi(\alpha^{-1})\pi(\gamma)\pi(\alpha)$ che parte da x non è altro che $\alpha^{-1}\gamma f(\alpha)$ e quindi $f(x) = x_1 \neq x$.



□

Lemma 7.8.17. *Sia $\pi : (\widehat{X}, \widehat{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento connesso e localmente connesso per archi. Sia $\gamma \in \pi_1(X,x_0)$ e sia $\widehat{x}_1$ il punto finale del sollevamento di γ che parte da $\widehat{x}_0$. Allora esiste (ed è unico) $f \in \mathrm{Aut}(\pi)$ tale che $f(\widehat{x}_0) = \widehat{x}_1$ se e solo se γ appartiene al normalizzatore di $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$ in $\pi_1(X,x_0)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 7.8.3 esiste $f \in \mathrm{Aut}(\pi)$ tale che $f(\widehat{x}_0) = \widehat{x}_1$ se e solo se i due gruppi $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$ e $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_1))$ coincidono.

Per il Teorema 7.2.9 il coniugio per γ induce un isomorfismo tra $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$ e $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_1))$. Quindi $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0)) = \pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_1))$ se e solo se γ appartiene al normalizzatore di $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$.

L'unicità di f discende dal Teorema 7.8.16. □

Definizione 7.8.18. Un rivestimento $\pi : \widehat{X} \to X$ si dice **normale** o **regolare** se il gruppo $\mathrm{Aut}(\pi)$ agisce transitivamente sulle fibre, cioè se per ogni $x \in X$ e per ogni $y, z \in X_x$ esiste $f \in \mathrm{Aut}(\pi)$ tale che $f(y) = z$.

Esempio 7.8.19. Il rivestimento $S^2 \to \mathbb{RP}^2$ è normale. L'antipodale è infatti un automorfismo di rivestimento che permuta gli elementi delle fibre.

Teorema 7.8.20. *Sia $\pi : (\widehat{X}, \widehat{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento connesso e localmente connesso per archi. Allora esso è normale se e solo se $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X,x_0)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x_0)$. Siccome $\widehat{X}$ è connesso, esiste un cammino γ da $\widehat{x}_0$ a $\widehat{x}$. Il cammino $\pi(\gamma)$ determina un elemento di $\pi_1(X,x_0)$ e per sollevamento ogni elemento si ottiene in questo modo. Per il Lemma 7.8.17 esiste $f \in \mathrm{Aut}(\pi)$ tale che $f(\widehat{x}_0) = \widehat{x}$ se e solo se $\pi(\gamma)$ è nel normalizzatore di $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$. Quindi $\mathrm{Aut}(\pi)$ agisce transitivamente sulla fibra di x_0 se e solo se il normalizzatore di $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$ è tutto $\pi_1(X, x_0)$, cioè se $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$ è normale in $\pi_1(X, x_0)$. (Si noti che, per il Teorema 7.2.9, se $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$, ciò rimane vero anche se si cambia punto base). □

Esempio 7.8.21. Se X è connesso e localmente connesso per archi e $\pi_1(X)$ è abeliano allora ogni rivestimento è normale perché ogni sottogruppo di un gruppo abeliano è normale.

Esempio 7.8.22. Il rivestimento universale è normale perché il sottogruppo banale è normale.

Per il Lemma 7.8.17 se $\widehat{X}$ è connesso e localmente connesso per archi, e se $(\widehat{X}, \widehat{x}_0) \to (X, x_0)$ è normale, allora la (anti)-rappresentazione di monodromia della fibra di x_0 induce una rappresentazione suriettiva, talvolta detta **monodromia deck**[4] o semplicemente **monodromia** (se non v'è possibilità di confusione con la monodromia vera e propria)

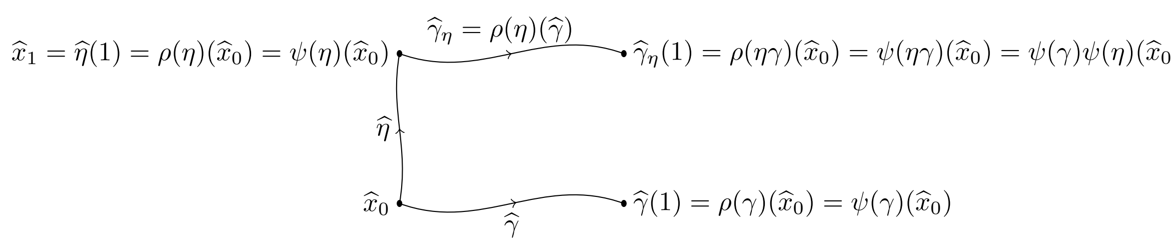
$$\rho : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(\widehat{X}).$$

Per evitare equivoci si usa spesso la dicitura "$\pi_1(X)$ agisce su $\widehat{X}$ via trasformazioni deck", intendendo che l'azione è data dalla rappresentazione di monodromia deck.

OSSERVAZIONE 7.8.23. Anche se si tendono ad omettere i punti base, essendo definita attraverso il Lemma 7.8.17, la monodromia deck $\rho : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(\widehat{X})$ dipende dalla scelta di un punto base $\widehat{x}_0$. Quando ci sarà bisogno di specificare useremo la notazione $\rho_{\widehat{x}_0}$.

OSSERVAZIONE 7.8.24. La rappresentazione di monodromia deck $\rho : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(\widehat{X})$ è una rappresentazione vera e propria, cioè non inverte la moltiplicazione destra con la sinistra, come invece fa la (anti)-rappresentazione di monodromia sulle fibre $\psi : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(\widehat{X}_0)$. In particolare, se il gruppo fondamentale non è abeliano, l'elemento $\psi(\gamma) \in \mathrm{Aut}(\widehat{X}_0)$ non coincide con la restrizione di $\rho(\gamma) \in \mathrm{Aut}(\widehat{X})$ sulla fibra di x_0. (Coincidono solo su $\widehat{x}_0$.)

Siano infatti γ e η sono due laccetti in x_0 e sia $\widehat{x}_0 \in \widehat{X}_{x_0}$ il punto base scelto per definire ρ. Sia $\widehat{\gamma}$ il sollevamento di γ che parte da x_0, $\widehat{\eta}$ quello di η e sia $\widehat{\gamma}_\eta$ il sollevamento di γ che parte da $\widehat{\eta}(1)$.



Si ha

$$\widehat{\gamma}(1) = \rho(\gamma)(\widehat{x}_0) = \psi(\gamma)(\widehat{x}_0)$$
$$\widehat{\eta}(1) = \rho(\eta)(\widehat{x}_0) = \psi(\eta)(\widehat{x}_0)$$

per cui $\widehat{\gamma}_\eta = \rho(\eta)(\widehat{\gamma})$ e

$$\rho(\eta\gamma)(\widehat{x}_0) = \widehat{\gamma}_\eta(1) = \rho(\eta)(\rho(\gamma)(\widehat{x}_0))$$
$$\psi(\eta\gamma)(\widehat{x}_0) = \widehat{\gamma}_\eta(1) = \psi(\gamma)(\psi(\eta)(\widehat{x}_0)).$$

[4] Si è scelto questo nome, ma non c'è una notazione standard per l'azione del gruppo fondamentale via automorfismi deck.

In particolare detto $\widehat{x}_1 = \widehat{\eta}(1)$,

$$\psi(\gamma)(\widehat{x}_1) = \widehat{\gamma}_\eta(1) = \rho(\eta)\rho(\gamma)(\widehat{x}_0) = \rho(\eta)\rho(\gamma)\rho(\eta)^{-1}\rho(\eta)(\widehat{x}_0) = \rho(\eta)\rho(\gamma)\rho(\eta)^{-1}(\widehat{x}_1)$$

e in generale $\rho(\eta)\rho(\gamma)\rho(\eta)^{-1}(\widehat{x}_1) \neq \rho(\gamma)(\widehat{x}_1)$.

OSSERVAZIONE 7.8.25. Con le notazioni di qui sopra, se si cambia punto base scegliendo $\widehat{x}_1$ al posto di $\widehat{x}_0$, avremmo $\rho_{\widehat{x}_1}(\gamma) = \widehat{\gamma}_\eta(1)$ e l'ultimo calcolo fatto ci dice che la monodromia $\rho_{\widehat{x}_1}$ si ottiene da $\rho_{\widehat{x}_0}$ coniugando per $\rho_{\widehat{x}_0}(\eta)$. In particolare, la classe di coniugio della rappresentazione di monodromia deck è ben definita e non dipende dalle scelte dei punti base.

In generale, se $\pi : \widehat{X} \to X$ non è normale, la monodromia deck è definita solo sul normalizzatore di $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}))$ in $\pi_1(X)$. Essa è sempre suriettiva se $\widehat{X}$ connesso.

In termini di successioni esatte, se $\widehat{X}$ è connesso e localmente connesso per archi, abbiamo la seguente successione esatta

$$0 \to K \to N \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(\widehat{X}) \to 0$$

ove $K = \ker(\rho)$ è il nucleo della rappresentazione di monodromia e N è il normalizzatore di $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}))$ in $\pi_1(X)$. Se inoltre $\widehat{X} \to X$ è normale, si ha

$$0 \to K \to \pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(\widehat{X}) \to 0.$$

Si noti che il nucleo della monodromia è formato esattamente dai laccetti che si sollevano in $\widehat{X}$, quindi da $\pi_1(\widehat{X})$. Dunque tale successione esatta si può leggere come

$$0 \to \pi_1(\widehat{X}) \to \pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(\widehat{X}) \to 0. \tag{3}$$

Il tutto può essere riassunto come segue.

Teorema 7.8.26. *Sia $\pi : (\widehat{X}, \widehat{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento connesso e localmente connesso per archi. Identificando $\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0)$ con $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$, sia $N(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$ il suo normalizzatore in $\pi_1(X, x_0)$. Allora*

$$\mathrm{Aut}(\pi) = \frac{N(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))}{\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0)}.$$

In particolare, se π è normale allora

$$\mathrm{Aut}(\pi) = \frac{\pi_1(X, x_0)}{\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0)}.$$

Se $\pi : \widetilde{X} \to X$ è il rivestimento universale, allora

$$\mathrm{Aut}(\widetilde{X} \to X) = \pi_1(X, x_0);$$

e se $\widehat{X}$ è normale, indicando con $K = \pi_1(\widehat{X})$ il nucleo della rappresentazione di monodromia di $\widehat{X} \to X$, si ha

$$\mathrm{Aut}(\widehat{X}) = \frac{\mathrm{Aut}(\widetilde{X})}{\pi_1(\widehat{X})} = \frac{\mathrm{Aut}(\widetilde{X})}{K}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 7.8.17, ad ogni $\gamma \in N(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0))$ possiamo associare un unico elemento $\varphi(\gamma)$ di $\mathrm{Aut}(\pi)$. La funzione $\varphi : N(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0)) \to \mathrm{Aut}(\pi)$ è un morfismo di gruppi per il Teorema 7.5.2. Il nucleo di φ è formato precisamente da tutti i laccetti basati in x_0 che si sollevano a laccetti basati in $\widehat{x}_0$, cioè da $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, x_0))$. □

Corollario 7.8.27. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Il rivestimento universale di S^1 è $\mathbb{R}$ e la proiezione è data da $\pi(r) = e^{2\pi i r}$. Si verifica facilmente che per ogni $f \in \mathrm{Aut}(\pi)$ si ha $f(x) = x + f(0)$. Quindi f è univocamente determinato da $f(0) \in \pi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ e $\mathrm{Aut}(\pi) = \mathbb{Z}$. Per il Teorema 7.8.26 si ha $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. □

Teorema 7.8.28. *Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento normale connesso. Allora X è omeomorfo a $\widehat{X}/\operatorname{Aut}(\pi)$. In particolare, se $\widehat{X} = \widetilde{X}$ è il rivestimento universale, allora*

$$X = \widetilde{X}/\pi_1(X).$$

Ove $\pi_1(X)$ agisce tramite l'identificazione con $\operatorname{Aut}(\pi)$.

DIMOSTRAZIONE. Siccome gli automorfismi preservano le fibre, la proiezione di rivestimento è costante sulle classe di equivalenza e quindi induce una mappa quoziente $f : \widehat{X}/\operatorname{Aut}(\pi) \to X$ che è continua (Teorema 2.2.16). Se $\widehat{X}$ è normale allora essa è biunivoca perché l'azione di $\operatorname{Aut}(\pi)$ è transitiva sulle fibre. Inoltre f è aperta per i Teoremi 6.5.28 e 7.3.23 e quindi è un omeomorfismo. □

7.9. Esistenza del rivestimento universale e altre questioni

Definizione 7.9.1. Uno spazio topologico X si dice **semi-localmente semplicemente connesso** se ogni punto $x \in X$ ha un intorno U tale che l'inclusione $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ sia banale. In altre parole se ogni laccetto in U è omotopicamente banale in X.

Esempio 7.9.2. L'orecchino Hawaiano NON è semi-localmente semplicemente connesso.

Esempio 7.9.3. Se X è semplicemente connesso, per esempio $\mathbb{R}^n$, allora è semi-localmente semplicemente connesso. In particolare, il cono su ogni spazio è semi-localmente semplicemente connesso.

Esempio 7.9.4. Se X è localmente semplicemente connesso, cioè se ogni punto ha un (sistema fondamentale di) intorno(i) semplicemente connesso(i) allora è anche semi-localmente semplicemente connesso. In particolare tutte le varietà topologiche sono semi-localmente semplicemente connesse.

Esempio 7.9.5. Se X è uno spazio tale che ogni punto ha un intorno omeomorfo a un cono su qualche spazio, allora è semi-localmente semplicemente connesso. Per esempio, i grafi lo sono.

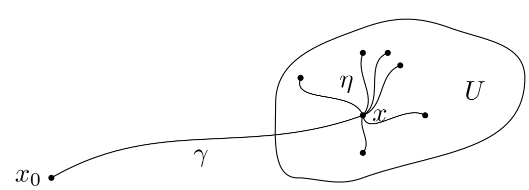
Esempio 7.9.6. Se X è semi-localmente semplicemente connesso e $\widehat{X} \to X$ è un rivestimento, allora anche $\widehat{X}$ è semi-localmente semplicemente connesso (segue dalla definizione di rivestimento e dal Corollario 7.4.5).

Teorema 7.9.7. *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semi-localmente semplicemente connesso. Allora per ogni sottogruppo $H < \pi_1(X, x_0)$ esiste un rivestimento $\pi : (\widehat{X}, \widehat{x}_0) \to (X, x_0)$ tale che $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0)) = H$. In particolare X ha il rivestimento universale (se H è il sottogruppo banale).*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione di questo teorema si fa costruendo esplicitamente $\widehat{X}$. Sia Ω l'insieme dei cammini $\gamma : [0, 1] \to X$ tali che $\gamma(0) = x_0$. Su Ω si mette la relazione d'equivalenza $\alpha \sim \beta$ se $\alpha(1) = \beta(1)$ e la classe di omotopia (a estremi fissi) di $\alpha\beta^{-1}$ sta in H. Poniamo $\widehat{X} = \Omega/\sim$ e definiamo $\widehat{x}_0$ come la classe del cammino costante in x_0 (si noti che se $\gamma \in H$ allora $[\gamma] = \widehat{x}_0$). Per il momento $\widehat{X}$ è solo un insieme, dobbiamo definirci una topologia e una proiezione di rivestimento. Si pone $\pi([\alpha]) = \alpha(1)$. Tale funzione è ben posta perché se due cammini sono equivalenti allora hanno lo stesso punto finale.

Sia $x \in X$. Siccome X è connesso e localmente connesso per archi, allora esiste un cammino γ da x_0 a x. Sia U un intorno aperto di x, connesso e tale che $\pi_1(U, x)$ sia banale in $\pi_1(X, x)$. Sia V l'insieme dei cammini in U che partono da x. Per ogni $[\gamma] \in \pi^{-1}(x)$ sia

$$V_{[\gamma]} = \{[\gamma\eta] : \eta \in V\}.$$



Su $\widehat{X}$ mettiamo la topologia che ha come base gli insiemi $V_{[\gamma]}$, al variare di $\gamma \in \widehat{X}$ e U con le proprietà di cui sopra. (Tale topologia è ben definita per il Teorema 1.2.4).

Siccome $\pi_1(U,x)$ è banale in $\pi_1(X,x)$ i cammini $\gamma\eta$ e $\gamma\eta'$ inducono lo stesso elemento di $V_{[\gamma]}$ se e solo se η e η' hanno lo stesso punto finale. Quindi la restrizione di π a $V_{[\gamma]}$ è biunivoca da $V_{[\gamma]}$ a U e per come abbiamo definito la topologia di $\widehat{X}$, essa è un omeomorfismo. In particolare π è continua in ogni punto e quindi è continua. Vediamo adesso che π è una proiezione di rivestimento. Chiaramente $V_{[\gamma]} \subseteq \pi^{-1}(U)$. Siccome X è connesso e localmente connesso per archi, allora se $\pi([\alpha]) \in U$ allora α è omotopa a estremi fissi a un cammino del tipo $\gamma\eta$ con $\gamma \in \Omega(X, x_0, x)$ e $\eta \in \Omega(U, x, \alpha(1))$. Quindi $\pi^{-1}(U) = \cup_{[\gamma]} V_{[\gamma]}$. Vediamo adesso che se γ_1 e γ_2 non sono equivalenti, allora $V_{[\gamma_1]} \cap V_{[\gamma_1]} = \emptyset$. In questo modo avremo dimostrato che $\pi^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti omeomorfi a U via π.

Sia $[\beta] \in V_{[\gamma_1]} \cap V_{[\gamma_2]}$. Siccome $\pi_1(U,x)$ è banale in X possiamo supporre che $[\beta] = [\gamma_1\eta] = [\gamma_2\eta]$ con $\eta \in \Omega(U, x, \beta(1))$. Ma da $[\gamma_1\eta] = [\gamma_2\eta]$ si deduce $[\gamma_1] = [\gamma_2]$.

Per concludere, dobbiamo dimostrare che $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0)) = H$. Sia $\gamma : [0,1] \to X$ un laccetto basato in x_0. Il suo sollevamento in $\widehat{X}$, che parte da $\widehat{x}_0$, è dato da $\widehat{\gamma}(t) = [\gamma|_{[0,t]}]$ (ove $\gamma|_{[0,t]}$ si considera riparametrizzato con $[0,1]$). Per come si è definito $\widehat{X}$, γ si solleva a un laccetto in $\widehat{X}$ (cioè $\widehat{\gamma}(1) = \widehat{x}_0$) se e solo se $\gamma \in H$. Per il Teorema 7.4.7 $\pi_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}_0)) = H$. □

OSSERVAZIONE 7.9.8. Si noti la somiglianza tra le definizioni di gruppo fondamentale e quella di rivestimento universale: il gruppo fondamentale è formato da classi di omotopia a estremi fissi di laccetti; il rivestimento universale è formato da classi di omotopia a estremi fissi di cammini non necessariamente chiusi.

OSSERVAZIONE 7.9.9. Si noti che l'azione di monodromia a destra sulla fibra di $[x]$ è data semplicemente per concatenazione (a destra) di cammini in $\pi_1(X,x)$. Cioè se $\pi([\eta]) = x$ e $\gamma \in \pi_1(X,x)$ allora $[\eta]\gamma = [\eta\gamma]$. L'azione a sinistra via trasformazioni deck è data per concatenazione a sinistra per cammini in $\pi_1(X,x_0)$. Ossia se per ogni $[\alpha] \in \widehat{X}$ si pone $\gamma[\alpha] = [\gamma\alpha]$. Si noti che essa è ben definita solo se γ è nel normalizzatore di H (come ha da essere) in quanto se $[\beta] = [\alpha]$, cioè $\alpha\beta^{-1}$ in H, allora affinché $[\gamma\beta] = [\gamma\alpha]$ si deve avere $\gamma\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}$ in H.

OSSERVAZIONE 7.9.10. Il Teorema 7.8.3 ci dice che due rivestimenti di X sono isomorfi se e solo se corrispondono allo stesso sottogruppo di $\pi_1(X)$. Il Teorema 7.9.7 ci dice che ogni sottogruppo corrisponde a un rivestimento. Per spazi connessi, localmente connessi per archi e semi-localmente semplicemente connessi, vi è quindi una corrispondenza biunivoca tra sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$ e classi di isomorfismo di rivestimenti puntati.

Teorema 7.9.11. *Sia $\pi : \widehat{X} \to X$ un rivestimento localmente connesso per archi che spezzi lungo uno spazio intermedio Y, cioè tale che esistano funzioni continue $q : \widehat{X} \to Y$ e $p : Y \to X$ tali che $\pi = p \circ q$. Allora p è un rivestimento se e solo se q lo è.*

$$\begin{tikzcd} \widehat{X} \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "\pi"'] & \\ & Y \arrow[dl, "p"] \\ X & \end{tikzcd}$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo p rivestimento (in questo caso q è un sollevamento di π). Sia $x \in X$ e sia U un intorno aperto e connesso di x che sia banalizzante sia per π che per p. Abbiamo

$$p^{-1}(U) = \sqcup V_i \qquad \text{e} \qquad p : V_i \to U \text{ è un omeomorfismo}$$

$$\pi^{-1}(U) = \sqcup U_j \qquad \text{e} \qquad \pi : U_j \to U \text{ è un omeomorfismo.}$$

Siccome $p \circ q = \pi$, si ha $\sqcup_j U_j = \pi^{-1}(U) = q^{-1}(p^{-1}(U)) = \cup_i q^{-1}(V_i)$. $q : U_j \to Y$ è un sollevamento di $\pi|_{U_j}$. D'altronde, anche $p^{-1} \circ \pi : U_j \to V_i \subseteq Y$ è un sollevamento di $\pi|_{U_j}$. Siccome U è connesso, per il Lemma 7.4.2 dell'unicità del sollevamento, se $V_i \cap q(U_j) \neq \emptyset$ allora $V_i = q(U_j)$. Ne segue che $q^{-1}(V_i)$ è unione disgiunta di alcuni degli U_j, la restrizione di q ad ognuno dei quali è $p^{-1} \circ \pi$, dunque un omeomorfismo.

Viceversa, supponiamo q rivestimento. In particolare q è una mappa aperta (Teorema 7.3.23) e suriettiva (per definizione di rivestimento). Sia $x \in X$ e sia U aperto connesso banalizzante per π. Come prima si ha

$$\pi^{-1}(U) = \sqcup U_i \qquad \text{e} \qquad \pi : U_i \to U \text{ è un omeomorfismo.}$$

Poniamo $V_i = q(U_i)$. Siccome U_i è aperto e q è una mappa aperta, allora V_i è aperto. Inoltre, $q(\sqcup U_i) = p^{-1}(U)$ perché q è suriettiva e $\pi = p \circ q$. Siccome $\pi|_{U_i} = p \circ q|_{U_i}$ è un omeomorfismo, allora $q|_{U_i}$ è un omeomorfismo tra U_i e V_i e quindi $p|_{V_i} = \pi|_{U_i} \circ (q|_{U_i})^{-1}$ è un omeomorfismo tra V_i e U. Se dimostriamo che $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ solo se $V_i = V_j$, abbiamo che p è un rivestimento.

Siano $f = (p|_{V_i})^{-1} = q \circ (\pi|_{U_i})^{-1} : U \to V_i$ e $g = (p|_{V_j})^{-1} = q \circ (\pi|_{U_j})^{-1} : U \to V_j$. Se $z \in V_i \cap V_j$, si ha $z = f(x_1)$ e $z = g(x_2)$ per certi x_1, x_2. Siccome $p \circ f = p \circ g = id_U$, si ha $x_1 = x_2$ e $f(x_1) = g(x_1)$. In particolare $V_i \cap V_j$ è l'immagine di $A = \{x \in U, f(x) = g(x)\}$. Mostriamo che se $A \neq \emptyset$ allora $A = U$.

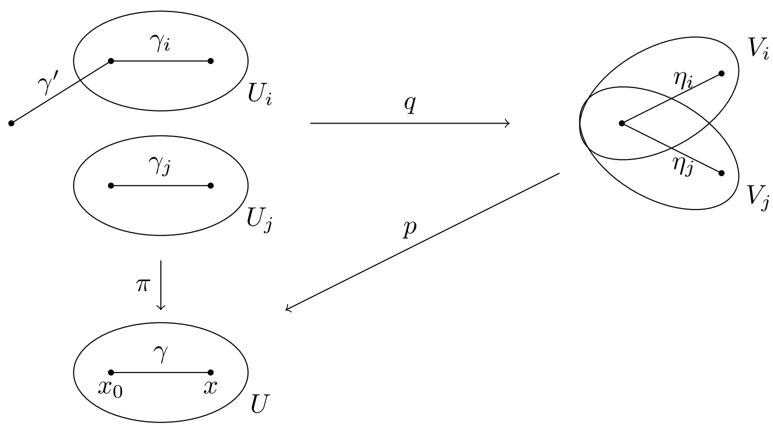


FIGURA 9. A priori η_i e η_j potrebbero essere diversi; a posteriori coincidono.

Come in Figura 9, sia $x_0 \in A$, sia $x \in U$ e sia $\gamma : [0,1] \to U$ un cammino da x_0 a x. Siano γ_i e γ_j i sollevamenti di γ in U_i e U_j rispettivamente e siano η_i, η_j le loro q-proiezioni in V_i e V_j rispettivamente. Per come son definite f, g, si ha $\eta_i = f \circ \gamma$ e $\eta_j = g \circ \gamma$. In particolare $\eta_i(1) = f(x)$ e $\eta_j(1) = g(x)$. Sia α il cammino $\eta_i^{-1}\eta_j$; esso è ben definito perché $f(x_0) = g(x_0)$. Sia α_i il suo sollevamento che parte da $\gamma_i(1)$.

Chiaramente γ_i è un q-sollevamento di η_i. Sia γ' il q-sollevamento di η_j in U_i. Per ogni t si ha $p(q(\gamma'(t))) = p(\eta_j(t)) = p(q(\gamma_j(t))) = \pi(\gamma_j(t)) = \gamma(t)$. Quindi γ' è un sollevamento di γ in U_i, in particolare $\gamma' = \gamma_i$ e $\alpha_i = \gamma_i^{-1}\gamma_i$. Ne segue che $\alpha = \eta_i^{-1}\eta_i$. In particolare $\eta_i = \eta_j$ e $f(x) = g(x)$. $\square$

Corollario 7.9.12. *Sia $Y \to X$ un rivestimento tra spazi connessi, localmente connessi per archi e semi-localmente semplicemente connessi. Allora $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 7.9.7 il rivestimento universale $\pi : \widetilde{X} \to X$ esiste. Per il Teorema 7.4.7 π si solleva a Y e per il Teorema 7.9.11 tale sollevamento è un rivestimento. Siccome $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso allora esso è il rivestimento universale di Y. $\square$

Corollario 7.9.13. *Siano $p : X_2 \to X_1$ e $q : X_1 \to X$ rivestimenti. Se X è connesso, localmente connesso per archi e semi-localmente semplicemente connesso, allora $q \circ p : X_2 \to X$ è un rivestimento.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi : \widetilde{X} \to X$ il rivestimento universale. Esso si solleva a $f : \widetilde{X} \to X_1$, che si solleva a $g : \widetilde{X} \to X_2$, entrambi rivestimenti (universali). Siccome $(q \circ p) \circ g = \pi$, per il Teorema 7.9.11 $q \circ p$ è un rivestimento. □

Possiamo riassumere questi ultimi risultati dicendo che, in spazi adeguatamente connessi, se si ha un triangolo commutativo di mappe tali che due siano rivestimenti, allora anche la terza è un rivestimento. Se gli spazi sono qualsiasi invece l'Esempio 7.3.28 mostra che la composizione di due rivestimenti potrebbe non essere un rivestimento. Vediamo altri due esempi di triangolo commutativo in cui una delle tre mappe non è un rivestimento.

Esempio 7.9.14. Sia $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. In $\mathbb{R}$ consideriamo $X = \{1/n, n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{0\}$ con la topologia di sottospazio. X è una successione che converge a zero – il quale sta in X e non ha intorni connessi – quindi X non è localmente connesso. Sia $\widehat{X} = X \times \mathbb{N}^+$. Chiaramente la proiezione $\pi : \widehat{X} \to X$ data da $\pi(x, n) = x$ è un rivestimento. Sia ora $Y = X \times \{0, 1\}$. La proiezione $p : Y \to X$ data da $p(x, y) = x$ è ancora un rivestimento. Sia $q : \widehat{X} \to Y$ definita come segue

$$q(x,n) = \begin{cases} (x,0) & x < 1/n \\ (x,1) & x \geq 1/n \end{cases}$$

si noti che $p(q(x, n)) = x = \pi(x, n)$. Ma q non è un rivestimento in quanto il punto $(0, 1)$ non ha preimmagini.

Esempio 7.9.15. Consideriamo $X = \{1/n, n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{0\}$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}$ e $\widehat{X} = X \times \mathbb{N}$ con $\pi(x, n) = x$. Sia $Y' = \{(x, n) \in \widehat{X} : x < 1/n\}$, sia $X_o = \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ e sia $Y = Y' \cup (X_o \times \{-1\})$. Sia $p : Y \to X$ data da $p(x, n) = x$. Essa non è un rivestimento perché lo $0 \in X$ non ha un intorno banalizzante. Sia $q : \widehat{X} \to Y$ definita come

$$q(x,n) = \begin{cases} (x,n) & x < 1/n \\ (x,-1) & x \geq 1/n \end{cases}$$

chiaramente $p(q(x, n)) = x = \pi(x, n)$. Inoltre q è un rivestimento, perché è l'identità su Y' e il resto ha la topologia discreta (si noti che $0 \notin X_o$).

Infine, nelle ipotesi del Teorema 7.9.11 potrebbe succedere che né p né q siano rivestimenti.

Esempio 7.9.16. Sia $\mathbb{R}_{disc}$ l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia discreta. Sia $\widehat{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{disc}$ e siano $Y = \mathbb{R}^2$ e $X = \mathbb{R}$ Euclidei. La proiezione di rivestimento $\pi : \widehat{X} \to X$ data da $\pi(x, r) = x$ spezza lungo $\mathbb{R}^2$ con $q = id$ e $p = \pi$ (insiemisticamente Y e $\widehat{X}$ coincidono, sono le topologie a essere diverse). La mappa $q : \widehat{X} \to Y$ non è un rivestimento perché non è aperta. La mappa $p : Y \to X$ non è un rivestimento perché la fibra di un punto non è discreta.

7.10. G-spazi

Ricordiamo che per convenzione s'è definito il rivestimento universale solo per spazi localmente connessi per archi. Quindi la frase "X ha rivestimento universale" comprende "X è localmente connesso per archi".

Definizione 7.10.1 (G-spazi)**.** Sia G un gruppo. Un G-spazio è il dato di uno spazio topologico X e di un'azione di G su X tale che ogni $x \in X$ abbia un intorno aperto U tale che per ogni $g \neq h \in G$ sia $g(U) \cap h(U) = \emptyset$.

Si noti che se X è un G-spazio allora l'azione di G è libera.

Esempio 7.10.2. Per spazi T_2 e localmente compatti, il dato di un'azione libera e propriamente discontinua di G su X fornisce un G-spazio (Teorema 6.6.16).

Esempio 7.10.3. L'Esempio 6.6.18 fornisce un G-spazio.

Il Teorema 7.3.24 ci dice che se X è un G-spazio, allora la proiezione naturale $X \to X/G$ è un rivestimento.

Definizione 7.10.4. Un **G-rivestimento** è un rivestimento $X \to X/G$ ottenuto per quoziente di un G-spazio.

Esempio 7.10.5. Se X ha rivestimento universale allora, ponendo $G = \pi_1(X)$, si ha $G = \mathrm{Aut}(\widetilde{X} \to X)$ (Teorema7.8.26) e $X = \widetilde{X}/G$ (Teorema 7.8.28). Quindi i G-spazi forniscono una classe universale di rivestimenti.

Quando si trattano spazi non connessi, i punti base sono utili per individuare la componente connessa di lavoro. Se $(X, x) \to (X/G, [x])$ è un G-rivestimento puntato, la rappresentazione di monodromia deck è naturalmente definita da $\pi_1(X/G, [x])$ a valori, a priori, solo nel gruppo degli automorfismi della componente di X che contiene x.

Lemma 7.10.6. *Sia G un gruppo e $X \to X/G$ un G-rivestimento. Allora:*
(1) $G \leq \mathrm{Aut}(X \to X/G)$.
(2) *$X \to X/G$ è regolare.*
(3) *Se X è connesso allora $G = \mathrm{Aut}(X \to X/G)$.*
(4) *Per ogni scelta di punto base $x \in X$, la monodromia deck ha valori in G e se si cambia punto base con $y = hx$, essa si coniuga per h. Il nucleo K della monodromia deck è isomorfo a $\pi_1(X, x)$.*
(5) *Se X è connesso per archi, allora la monodromia deck è suriettiva.*

DIMOSTRAZIONE. (1) L'azione di G su X commuta evidentemente con la proiezione al quoziente, quindi ogni $g \in G$ è naturalmente un automorfismo del rivestimento $X \to X/G$.

(2) Per definizione G agisce transitivamente sulle orbite, che sono le fibre e quindi l'azione di $\mathrm{Aut}(X \to X/G)$ è transitiva.

(3) Se X è connesso e $f : X \to X$ è un isomorfismo di rivestimento, allora scelto $x \in X$, si ha $f(x) = gx$ per qualche $g \in G$. Per il Lemma 7.4.2 dell'unicità del sollevamento, f coincide con g su tutto X.

(4) Dato $\gamma \in \pi_1(X/G, [x])$, il punto finale del sollevamento $\widetilde{\gamma}$ di γ che parte da x, appartiene alla fibra di x. Quindi esiste $g \in G$ tale che $gx = \widetilde{\gamma}(1)$. La restrizione di g alla componente connessa di X contenente x è un automorfismo di rivestimento, dunque la monodromia $\rho_x(\gamma)$ è esattamente g. Se si cambia punto base usando $y = hx$ al posto di x, il sollevato $\widetilde{\gamma}_h$ di γ che parte da hx è $h(\widetilde{\gamma})$ e quindi $\widetilde{\gamma}_h(1) = hgx = hgh^{-1}hx = hgh^{-1}y$. (Si veda anche l'Osservazione 7.8.25). Il nucleo della monodrommia è formato dai laccetti che si sollevano a cammini chiusi ed è quindi isomorfo a $\pi_1(X, x)$.

(5) Per ogni $x \in X$ e $g \in G$ esiste un cammino γ tra x e gx, che si proietta a un laccetto in $\pi_1(X/G, [x])$ la cui monodromia è esattamente g. □

Lemma 7.10.7. *Sia $X \to X/G$ un G-rivestimento connesso e localmente connesso per archi. Allora:*
(1) *$\pi_1(X/G)$ è un'estensione di G.*
(2) *Se X è semplicemente connesso allora $\pi_1(X/G) = G$.*
(3) *Se X ammette rivestimento universale, allora detto $H = \mathrm{Aut}(\widetilde{X} \to X/G)$, si ha $G = H/K$ (ove K è il nucleo della monodromia deck).*

DIMOSTRAZIONE. La successione esatta (3) di pagina 173 (rimpiazzando $\widehat{X} \to X$ con $X \to X/G$) diventa
$$0 \to \pi_1(X) \to \pi_1(X/G) \to G \to 0.$$
I punti (1) e (2) seguono. Il punto (3) segue dal fatto che $\pi_1(X/G) = \mathrm{Aut}(\widetilde{X} \to X/G)$ (Teorema 7.8.26). □

Definizione 7.10.8 (G-mappe)**.** Una funzione continua $f : X \to Y$ tra due G-spazi si dice G-mappa se commuta con l'azione di G, cioè se per ogni $x \in X$ si ha

$$f(gx) = gf(x).$$

Se gli spazi sono puntati, si richiede che f mandi il punto base di X in quello di Y.

Lemma 7.10.9. *Sia $f : X \to Y$ una G-mappa tra due G-spazi. Allora f è biunivoca sulle orbite. Più precisamente, per ogni $x \in X$, f è una biiezione tra Gx e $Gf(x)$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Se $x_2 = gx_1$ allora $f(x_1) = f(x_2) = f(gx_1) = gf(x_1)$. Poiché l'azione di G è libera, ciò implica $g = Id$ e dunque $x_1 = x_2$. D'altronde se $y \in Gf(x)$ allora $y = gf(x) = f(gx)$ quindi f è suriettiva dall'orbita di x all'orbita di $f(x)$. □

Definizione 7.10.10 (Isomorfismo tra G-rivestimenti)**.** Siano $X \to X/G$ e $Y \to Y/G$ due G-rivestimenti. Un isomorfismo di G-rivestimenti è un omeomorfismo $f : X \to Y$ che sia una G-mappa.

Per il Corollario 2.2.17 un isomorfismo di G-rivestimenti è anche un isomorfismo di rivestimenti.

Lemma 7.10.11. *Siano $p_1 : (X_1, x_1) \to (X, x_0)$ e $p_2 : (X_2, x_2) \to (X, x_0)$ due G-rivestimenti dello stesso spazio puntato (X, x_0). Se esiste un isomorfismo di G-rivestimenti*

$$f : (X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$$

allora i due rivestimenti hanno la stessa rappresentazione di monodromia deck.

DIMOSTRAZIONE. Per $i = 1, 2$ sia $\rho_i : \pi_1(X, x_0) \to G$ la monodromia deck di p_i. Sia $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ e siano γ_i i sollevamenti di γ in X_i che partono da x_i. Siccome f è un isomorfismo di rivestimenti, $f \circ \gamma_1 = \gamma_2$ e quindi $f(\gamma_1(1)) = \gamma_2(1)$. Ma

$$\rho_1(\gamma)(x_2) = \rho_1(\gamma)(f(x_1)) = f(\rho_1(\gamma)(x_1)) = f(\gamma_1(1)) = \gamma_2(1) = \rho_2(\gamma)(x_2)$$

e quindi $(\rho_1(\gamma))^{-1}\rho_2(\gamma)$ fissa x_2. Siccome l'azione di G è libera ciò implica $\rho_1(\gamma) = \rho_2(\gamma)$. □

Si noti che in generale, se gli spazi non son puntati, le monodromie di rivestimenti isomorfi possono essere diverse come rappresentazioni. Si pensi per esempio a cosa succede cambiando punto base in uno stesso rivestimento. Il Lemma 7.10.11 ci dice che la funzione

$$\Phi : \{\text{classi di isomorfimso di } G\text{-rivestimenti puntati di } (X, x_0)\} \quad \longrightarrow \quad \hom(\pi_1(X, x_0), G)$$

che associa ad ogni rivestimento la sua monodromia deck, è ben definita.

Teorema 7.10.12. *Se X ammette rivestimento universale allora Φ è biunivoca.*

Dividiamo la dimostrazione in due lemmi, dimostrando prima la suriettività e poi l'iniettività.

Lemma 7.10.13 (Costruzione del ρ-rivestimento)**.** *Φ è suriettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ il rivestimento universale e sia $\rho : \pi_1(X, x_0) \to G$ una rappresentazione qualsiasi. Sappiamo che $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}) = \pi_1(X, x_0)$ (Teorema 7.8.26) quindi per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ e per ogni $x \in \widetilde{X}$ è chiaro cosa sia γx. Dotiamo G della topologia discreta. Come in Figura 10, su $\widetilde{X} \times G$ facciamo agire $\pi_1(X, x_0)$ tramite

$$\gamma(x, g) = (\gamma x, g\rho(\gamma^{-1})).$$

Ciò rende $\widetilde{X} \times G$ un $\pi_1(X, x_0)$-spazio. Sia

$$\widehat{X}_\rho = (\widetilde{X} \times G)/\pi_1(X, x_0)$$

il quoziente (che potrebbe essere anche sconnesso, per esempio se ρ è la rappresentazione banale) ove scegliamo $\widehat{x}_0 = [(\widetilde{x}_0, 1)]$ come punto base.

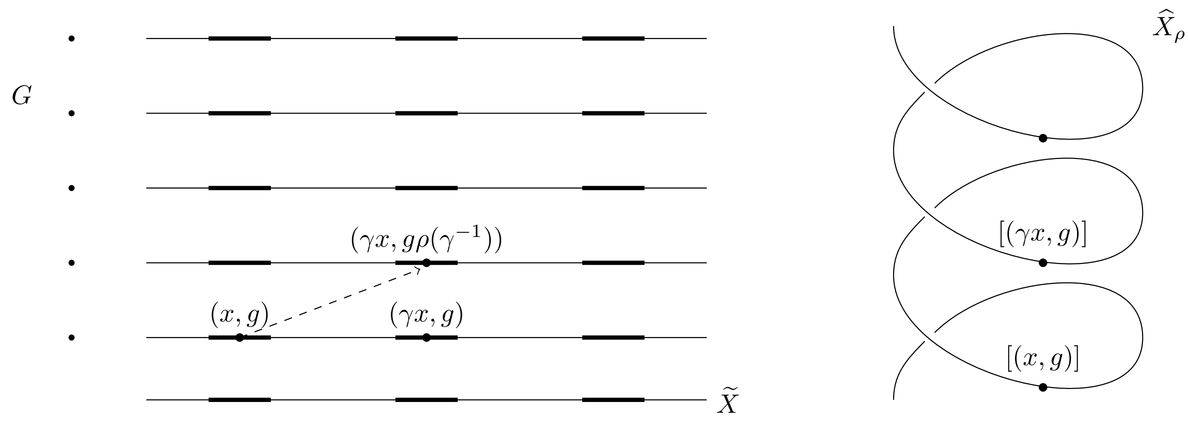


FIGURA 10. Costruzione di $\widehat{X}_\rho$. I segmentini neri rappresentano aperti banalizzanti per $\widetilde{X} \to X$.

Su $\widehat{X}_\rho$ facciamo agire G tramite

$$g[(x,h)] = [(x,gh)].$$

Vediamo com'è fatta quest'azione. $[(x,h)]$ e $[(y,g)]$ stanno nella stessa G-orbita se e solo se

$$\exists \alpha \in G \quad \text{tale che} \quad [(y,g)] = \alpha[(x,h)] = [(x,\alpha h)]$$

se e solo se

$$\exists \alpha \in G,\ \exists \gamma \in \pi_1(X,x_0) \quad \text{tali che} \quad (y,g) = \gamma(x,\alpha h) = (\gamma x, \alpha h \rho(\gamma^{-1}))$$

il che, ponendo $\alpha = g\rho(\gamma)h^{-1}$ equivale a chiedere che

$$\exists \gamma \in \pi_1(X,x_0) \quad \text{tale che} \quad y = \gamma x.$$

Quindi $\widehat{X}_\rho/G = X$, la proiezione è data da $p([(x,g)]) = \pi(x)$ e se U è un aperto banalizzante per π allora lo è anche per p, che risulta quindi un G-rivestimento. La monodromia agisce semplicemente per

$$\mathrm{monodr}(\gamma)(\widehat{x}_0) = \mathrm{monodr}(\gamma)[(x_0,1)] = [(\gamma x_0, 1)]$$

ma

$$[(\gamma x_0, 1)] = [\gamma(x_0, 1\rho(\gamma))] = [(x_0, \rho(\gamma))] = \rho(\gamma)[(x_0,1)]$$

e quindi la monodromia è proprio ρ. □

Lemma 7.10.14. *Φ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(Y,y_0) \to (X,x_0)$ un G-rivestimento con monodromia ρ. Basta far vedere che esso è isomorfo a $(\widehat{X}_\rho, \widehat{x}_0)$. Per ogni $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, sia $\widetilde{\alpha}$ un cammino da $\widetilde{x}_0$ a $\widetilde{x}$, sia α la sua proiezione su X e sia α_Y il suo sollevamento in Y che parte da y_0. Poniamo $f(\widetilde{x}) = \alpha_Y(1)$. Si noti che $f : \widetilde{X} \to Y$ è il rivestimento universale della componente di Y che contiene y_0. Usando la f, si definisce una funzione $F : \widetilde{X} \times G \to Y$ ponendo

$$F(\widetilde{x}, g) = gf(\widetilde{x})$$

(G agisce su Y perché Y è un G-rivestimento di X). La funzione F è costante sulle orbite dell'azione di $\pi_1(X,x_0)$. Infatti per definizione di monodromia, se $\gamma \in \pi_1(X,x_0)$, si ha $\gamma_Y(1) = \rho(\gamma)(y_0)$ e quindi $f(\gamma\widetilde{x}_0) = \rho(\gamma)f(\widetilde{x}_0)$, da cui $f(\gamma\widetilde{x}) = \rho(\gamma)f(\widetilde{x})$ per ogni $\widetilde{x}$ e dunque

$$F(\gamma(\widetilde{x},g)) = F(\gamma\widetilde{x}, g\rho(\gamma^{-1})) = g\rho(\gamma^{-1})f(\gamma\widetilde{x}) = g\rho(\gamma^{-1})\rho(\gamma)f(\widetilde{x}) = gf(\widetilde{x}) = F(\widetilde{x},g).$$

Per il Teorema 2.2.16 F discende a una funzione continua $F : \widehat{X}_\rho \to Y$. In oltre, dalla definizione di f, si vede che F è una G-mappa e che è un rivestimento, in particolare è aperta. Per ogni $y \in Y$ sia $x = [y] \in X = Y/G$ e sia $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ un suo sollevamento. Per costruzione $f(\widetilde{x})$ e y stanno nella stessa fibra Y_x. Esiste quindi $g \in G$ tale che $y = gf(\widetilde{x}) = F[(\widetilde{x}, g)]$. Dunque F è suriettiva. Se $F[(\widetilde{x}, g)] = F[(\widetilde{x}_1, g_1)]$ allora $f(\widetilde{x})$ e $f(\widetilde{x}_1)$ stanno nella stessa G-orbita, da cui segue che $\widetilde{x}$ e $\widetilde{x}_1$ stanno nella stessa $\pi_1(X, x_0)$-orbita et ergo (come abbiamo visto nella dimostrazione del Lemma 7.10.13) $[(\widetilde{x}, g)]$ e $[(\widetilde{x}_1, g_1)]$ stanno nella stessa G-orbita.

Per il Lemma 7.10.9 F è biunivoca sulle G-orbite e dunque è biunivoca globalmente. Quindi è un omeomorfismo, ergo un G-isomorfismo. □

7.11. Il teorema di Van Kampen

Uno degli strumenti principali che si hanno per calcolare il gruppo fondamentale a mano è il celeberrimo Teorema di Van Kampen. Daremo un paio di dimostrazioni, quella classica che è generale ma richiede dettagli assai tediosi (lasciati con affetto al lettore volenteroso) e una "alla Grothendieck" che usa la teoria dei G-spazi, più concisa, ma che vale solo per spazi che possiedono il rivestimento universale.

Prima di enunciare e dimostrare il teorema, richiamiamo (senza dimostrazioni) alcuni fatti sui prodotti amalgamati.

Siano A, B, C gruppi e siano $f : C \to A, g : C \to B$ morfismi di gruppi. Sia $A * B$ il prodotto libero di A e B e sia K il sottogruppo normale di $A * B$ generato dagli elementi del tipo $f(c)g(c^{-1})$, al variare di $c \in C$. Il **prodotto amalgamato** $A *_C B$ è il quoziente $(A * B)/K$.

Se A, B sono sottogruppi di un gruppo G e C è un sottogruppo comune, se non altrimenti specificato le funzioni f, g sono le inclusioni di C in A e B rispettivamente.

Se $A = \langle G_A | R_A \rangle, B = \langle G_B | R_B \rangle, C = \langle G_C | R_C \rangle$ sono dati in termini di generatori e relazioni di equivalenza, allora $A *_C B = \langle G_A, G_B | R_A, R_B, R \rangle$ ove R è l'insieme delle relazioni $f(c) = g(c)$ al variare di $c \in G_C$.

Il prodotto amalgamato si può caratterizzare anche attraverso la sua proprietà universale (vedasi il diagramma in figura 11) come segue. Dati A, B, C come sopra, a meno di isomorfismi, esiste un unico gruppo H con morfismi $j_A : A \to H, j_B : B \to H$ tali che $j_A \circ f = j_B \circ g$, tale che per ogni altro gruppo G e morfismi $f_A : A \to G$ e $f_B : B \to G$ tali che $f_A \circ f = f_B \circ g$, esista un unico $F : H \to G$ tale che $f_A = F \circ j_A$ e $f_B = F \circ j_B$. Tale gruppo H è il prodotto amalgamato.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "j_A"] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & A *_C B \arrow[r, "F"] & G \\
& B \arrow[ur, "j_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

FIGURA 11. La proprietà universale del prodotto amalgamato

Teorema 7.11.1 (Van Kampen)**.** *Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi e siano $A, B \subseteq X$ tali che*

- *A, B sono aperti e connessi;*
- *$A \cup B = X$;*
- *$\emptyset \neq A \cap B$ è connesso.*

Sia $x_0 \in A\cap B$ e siano $i_A : \pi_1(A\cap B, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$, $i_B : \pi_1(A\cap B, x_0) \to \pi_1(B, x_0)$ le inclusioni naturali. Allora il gruppo fondamentale di X è il prodotto amalgamato di $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(B, x_0)$ lungo $\pi_1(A \cap B, x_0)$:

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A\cap B,x_0)} \pi_1(B, x_0).$$

In altre parole, il gruppo fondamentale di X può essere calcolato quozientando il prodotto libero $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$ per la relazione d'equivalenza generata da $i_A(\gamma) = i_B(\gamma)$ al variare di $\gamma \in \pi_1(A \cap B, x_0)$.

In termini di generatori/relazioni, se $\pi_1(A, x_0) = \langle G_A|R_A\rangle$, $\pi_1(B, x_0) = \langle G_B, R_B\rangle$, $\pi_1(A\cap B, x_0) = \langle G_C|R_C\rangle$ e $R = \{i_A(\gamma)i_B(\gamma)^{-1} : \gamma \in G_C\}$, allora

$$\pi_1(X, x_0) = \langle G_A \cup G_B|R_A \cup R_B \cup R\rangle.$$

Un enunciato equivalente si può dare tramite la *proprietà universale*. Se $j_A : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ e $j_B : \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ sono le inclusioni naturali, il teorema di Van Kampen si può enunciare dicendo che $\pi_1(X, x_0)$ gode della proprietà universale del prodotto amalgamato, ossia che vale $j_A \circ i_A = j_B \circ i_B$ e che per ogni gruppo G tale che esistano morfismi $f_A : \pi_1(A, x_0) \to G$ e $f_B : \pi_1(B, x_0) \to G$ con $f_A \circ i_A = f_B \circ i_B$, esiste unico morfismo di gruppi $F : \pi_1(X, x_0) \to G$ tale che $f_A = F \circ j_A$ e $f_B = F \circ j_B$ (si veda la Figura 12). Siccome tale proprietà universale caratterizza il prodotto amalgamato a

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A,x_0) \arrow[dr, "j_A"] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, "i_A"] \arrow[dr, "i_B"'] & & \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "F"] & G \\
& \pi_1(B,x_0) \arrow[ur, "j_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

FIGURA 12. La proprietà universale del gruppo fondamentale

meno di isomorfimsi, dire che $\pi_1(X, x_0)$ gode della proprietà universale equivale a dire che è isomorfo al prodotto amalgamato $\pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A\cap B,x_0)} \pi_1(B, x_0)$.

DIMOSTRAZIONE CLASSICA. Le inclusioni j_A, j_B definiscono naturalmente un morfismo

$$\varphi : \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

Si deve far vedere che φ è suriettivo e che il suo nucleo coincide con $K = \{i_A(\gamma)i_B(\gamma)^{-1} : \gamma \in \pi_1(A \cap B, x_0)\}$. Sia $\gamma : [0, 1] \to X$ un laccetto basato in x_0. In $[0, 1]$ consideriamo le componenti connesse di $\gamma^{-1}(A)$ e quelle di $\gamma^{-1}(B)$. Esse forniscono un ricoprimento aperto ($[0, 1]$ è localmente connesso per archi). Per compattezza se ne estrae un sottoricoprimento finito. Da ciò si ricava una partizione

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1$$

tale che $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ è interamente contenuto o in A o in B e $t_i \in A \cap B$. Essendo $A \cap B$ connesso (e localmente connesso per archi) per ogni t_i esiste un cammino η_i da x_0 a $\gamma(t_i)$. Per cui γ si esprime come prodotto dei cammini

$$\eta_{i+1}^{-1}\gamma|_{t_i,t_{i+1}}\eta_i$$

che sono laccetti in basati in x_0 e interamente contenuti in A o B. Ciò dimostra la suriettività di φ.

Passiamo al nucleo di φ. Esso contiene evidentemente tutti gli elementi di K, si deve far vedere che non c'è altro. Lo si può fare a mano, prendendo un elemento del nucleo di φ e suddividendolo accuratamente come prodotto di cammini omotopi a elementi di K. Per mettere a posto i dettagli di questa dimostrazione ci vogliono due-tre pagine di conti, che lasciamo volentieri al lettore (e che si possono trovare in un qualsiasi libro di topologia algebrica, per esempio in quello famosissimo di Hatcher "Algebraic Topology"). □

DIMOSTRAZIONE ALLA GROTHENDIECK. Useremo principalmente il Teorema 7.10.12 per dimostrare la proprietà universale del gruppo fondamentale. Siano G, f_A, f_B come in Figura 12. Per il Teorema 7.10.12 esistono unici (a meno di isomorfismo) G-rivestimenti di A e B con monodromie f_A e f_B rispettivamente. Il seguente Lemma 7.11.2 di incollamento ci fornirà un unico (a meno di isomorfismi) G-rivestimento di X che si ottiene incollando i due rivestimenti di cui sopra, per il Teorema 7.10.12 tale rivestimento determina una rappresentazione di monodromia, che è il morfismo F richiesto, unico perché in tutta la costruzione i rivestimenti usati sono unici. □

Lemma 7.11.2 (Di incollamento di rivestimenti). *Sia X uno spazio topologico e supponiamo $X = A \cup B$ con A, B aperti. Siano $\pi_A : \widehat{A} \to A$ e $\pi_B : \widehat{B} \to B$ rivestimenti tali che esista un isomorfismo, come rivestimenti di $A \cap B$,*

$$\varphi : \pi_A^{-1}(A \cap B) \to \pi_B^{-1}(A \cap B).$$

Allora esiste, unico a meno di isomorfismi, un rivestimento $\pi : \widehat{X} \to X$ e due isomorfismi di rivestimento

$$\psi_A : \pi^{-1}(A) \to \widehat{A} \qquad \psi_B : \pi^{-1}(B) \to \widehat{B}$$

tali che su $\pi_A^{-1}(A \cap B)$ si abbia

$$\psi_B \circ \psi_A^{-1} = \varphi.$$

Inoltre, se i rivestimenti di partenza sono G-rivestimenti e φ è un G-isomorfismo, allora anche π è un G-rivestimento e ψ_A e ψ_B sono G-isomorfismi.

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio X è ottenuto dall'unione disgiunta di A e B incollando tra loro i punti di $A \cap B$. Ripetendo tale operazione sulle preimmagini di aperti banalizzanti si costruisce $\widehat{X}$. Più precisamente, $\widehat{X}$ è lo spazio ottenuto come quoziente dall'unione disgiunta $\widehat{A} \sqcup \widehat{B}$ incollando $\widehat{a} \in \pi_A^{-1}(A \cap B)$ con $\varphi(\widehat{a})$. Siccome φ è un isomorfismo di rivestimenti si ha che $\widehat{X}$ è un rivestimento di X con proiezione $\pi(x) = \pi_A(x)$ se $x \in \widehat{A}$ e $\pi(x) = \pi_B(x)$ se $x \in \widehat{B}$. Gli isomorfismi ψ_A^{-1} e ψ_B^{-1} sono le restrizioni, a $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ rispettivamente, della proiezione $\widehat{A} \sqcup \widehat{B} \to (\widehat{A} \sqcup \widehat{B}) / \sim = \widehat{X}$. Se tutti i rivestimenti sono G-rivestimenti e l'isomorfismo φ è un G-isomorfismo, l'azione di G è ben definita su $\widehat{X}$ e ψ_A e ψ_B sono G-isomorfismi.

Vediamo infine l'unicità di $\widehat{X}$. Sia $p : Y \to X$ è un altro rivestimento tale che esistano isomorfismi $\xi_A : p^{-1}(A) \to \widehat{A}$ e $\xi_B : p^{-1}(B) \to \widehat{B}$ tali che su $\pi_A^{-1}(A \cap B)$ si abbia $\xi_B \circ \xi_A^{-1} = \varphi$. La funzione $F : \widehat{X} \to Y$ data da

$$F(x) = \begin{cases} \xi_A^{-1} \circ \psi_A(x) & x \in \pi^{-1}(A) \\ \xi_B^{-1} \circ \psi_B(x) & x \in \pi^{-1}(B) \end{cases}$$

è un isomorfismo di (G-)rivestimenti □

Corollario 7.11.3. *Se X è localmente connesso per archi e $X = A \cup B$ con A, B aperti semplicemente connessi e $A \cap B$ connesso allora X è semplicemente connesso. Se invece A e B sono connessi e $A \cap B$ è semplicemente connesso allora $\pi_1(X)$ è il prodotto libero di $\pi_1(A)$ e $\pi_1(B)$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Teorema di Van Kampen. □

Esercizio 7.11.4. Il Corollario 7.11.3 vale per l'omino coi baffi? (Esempio 7.8.9).

Esempio 7.11.5. S^2 è semplicemente connesso perché S^2 meno un punto è contraibile e quindi semplicemente connesso. Inoltre due punti non sconnettono S^2 e quindi se $x_1 \neq x_2 \in S^2$ si ha $S^2 = (S^2 \setminus x_1) \cup (S^2 \setminus x_2)$ è un unione di aperti semplicemente connessi con intersezione connessa.

Esempio 7.11.6. $\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Infatti, siccome S^2 è semplicemente connesso, esso è il rivestimento universale di $\mathbb{RP}^2$ e $\mathrm{Aut}(S^2 \to \mathbb{RP}^2)$ ha solo due elementi: l'identità e l'antipodale. Il Teorema 7.8.26 conclude. (In particolare $\mathbb{RP}^2$ e $\mathbb{CP}^1$ non sono omeomorfi).

Esempio 7.11.7. Il gruppo fondamentale di una figura a "otto" o a "infinito" (cioè $8, \infty$) è $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Infatti un "otto" è omeomorfo a due S^1 attaccati per un punto. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\text{un punto}) = 1$. Per applicare Van Kampen si devono usare aperti e i lobi S^1 non sono aperti nell'otto. Poco male, basta prendere intorni dei lobi con due baffetti e, al posto del punto, una piccola "x".

Esempio 7.11.8. Il gruppo fondamentale di un toro bucato è $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ infatti esso si retrae su un "otto" e il Teorema 7.2.20 conclude.

Esempio 7.11.9. Il gruppo fondamentale di una superficie Σ_2 di genere due (Figura 5, Sezione 6.2) è dato dalla seguente presentazione

$$\langle a, b, c, d | aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Σ_2 è l'unione di due tori bucati X, Y attaccati lungo il bordo γ, considerando un intorno del quale si descrive Σ_2 come l'unione di due tori bucati che si intersecano lungo un cilindretto. Il gruppo fondamentale del toro bucato X è il gruppo libero generato da due elementi a, b e γ è omotopo al commutatore $aba^{-1}b^{-1}$. Stesso discorso per il secondo toro Y, che consideriamo generato da c, d con γ omotopo a $dcd^{-1}c^{-1}$. Per Van Kampen, il gruppo fondamentale di Σ_2 è generato dai quattro elementi a, b, c, d e la relazione data da $X \cap Y$ identifica i due commutatori, quindi dobbiamo imporre $aba^{-1}b^{-1} = dcd^{-1}c^{-1}$. □

Calcolare il gruppo fondamentale di un grafo finito e connesso è facile, attraverso la seguente ricetta, descritta via esercizi. Un *albero* è un grafo semplicemente connesso.

Esercizio 7.11.10. Dimostrare che in un grafo finito, il collasso a un punto di un albero è un'equivalenza di omotopia.

Esercizio 7.11.11. Dimostrare che ogni grafo finito e connesso contiene un albero massimale (rispetto all'inclusione).

Esercizio 7.11.12. Dimostrare che collassando a un punto un albero massimale di un grafo finito e connesso si ottiene un bouquet di S^1.

Esercizio 7.11.13. Calcolare per induzione il gruppo fondamentale di un bouquet di S^1 usando Van Kampen.

7.12. Esercizi

Esercizio 7.12.1. Sia $f : [0, 2\pi] \to S^1$ data da $f(t) = e^{it}$. Dimostrare che f è omotopa a una costante.

Esercizio 7.12.2. Sia $f : [0, 2\pi] \to S^1$ data da $f(t) = e^{it}$. Dimostrare che f non è omotopa a una costante relativamente a $\{0, 2\pi\}$.

Esercizio 7.12.3. Sia $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ data da $f(t) = (0, \tan\frac{t}{2})$. Identificando $[-\pi, \pi]/\{-\pi, \pi\}$ con S^1, dimostrare che f ha un'estensione continua $g : S^1 \to \mathbb{RP}^2$. Dimostrare che g non è omotopicamente banale.

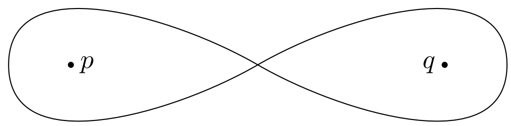
Esercizio 7.12.4. Sia $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ data da $f(t) = (0, \tan\frac{t}{2})$. Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e S^1 con $[-\pi, \pi]/\{-\pi, \pi\}$, dimostrare che f ha un'estensione continua $g : S^1 \to \mathbb{CP}^1$. Dimostrare che g è omotopicamente banale.

Esercizio 7.12.5. Siano $f(t) = e^{it}\cos(t)$ e $g(t) = e^{it}\cos(2t)$, funzioni da $S^1 = [0, 2\pi]/\{0, 2\pi\}$ a $\mathbb{C}$. Dimostrare che f e g sono omotope. Dimostrare che f e g sono omotope in $\mathbb{C} \setminus \{1 + i\}$. Dimostrare che f e g non sono omotope in $\mathbb{C} \setminus \{1/2\}$.

Esercizio 7.12.6. Dimostrare che $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ è omotopicamente equivalente a un punto.

Esercizio 7.12.7. Dimostrare che ogni punto di $\mathbb{R}^2$ con la metrica dei raggi è un suo retratto di deformazione forte.

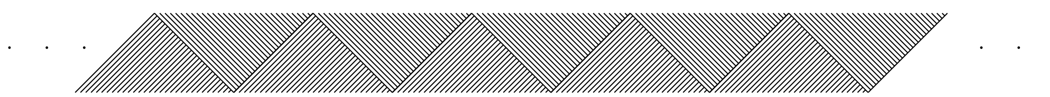
Esercizio 7.12.8. Sia γ una curva a otto (per esempio una lemniscata di Bernoulli) in $\mathbb{R}^2$ e siano p, q due punti ciascuno dentro uno dei lobi dell'otto.



Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ si retrae su γ.

Esercizio 7.12.9. Sia $X = \{(q, y); q \in \mathbb{Q}\} \cup \{y = 0\}$. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente a un punto. Dimostrare che X si retrae per deformazione su ogni suo punto. Dimostrare che l'origine è retratto di deformazione forte di X. Dimostrare che il punto $(0, 1)$ non è retratto di deformazione forte di X.

Esercizio 7.12.10 (Il parquet di Hatcher). Sia X il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ formato dal segmento orizzontale $[0, 1]$ e dalle rette verticali $\{q\} \times [0, 1 - q]$ con q razionale in $[0, 1]$. Sia Z lo spazio ottenuto sistemando infinite copie di X a *zig-zag*, come mostrato in figura.



Dimostrare che Z è contraibile.

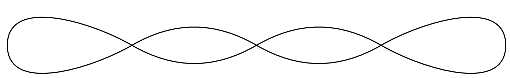
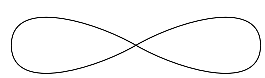
Esercizio 7.12.11. Dimostrare che il parquet di Hatcher si retrae per deformazione su ogni suo punto.

Esercizio 7.12.12. Dimostrare che nessun punto è retratto di deformazione forte del parquet di Hatcher.

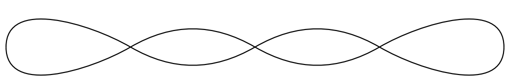
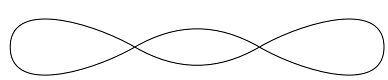
Esercizio 7.12.13. Sia $X \to Y$ un rivestimento. È vero che se X è T_2 anche Y lo è?

Esercizio 7.12.14. Sia X uno spazio localmente connesso per archi che ammette un rivestimento semplicemente connesso. Dimostrare che X è semi-localmente semplicemente connesso.

Esercizio 7.12.15. Siano X, Y come in figura. Dimostrare che X è un rivestimento di Y.

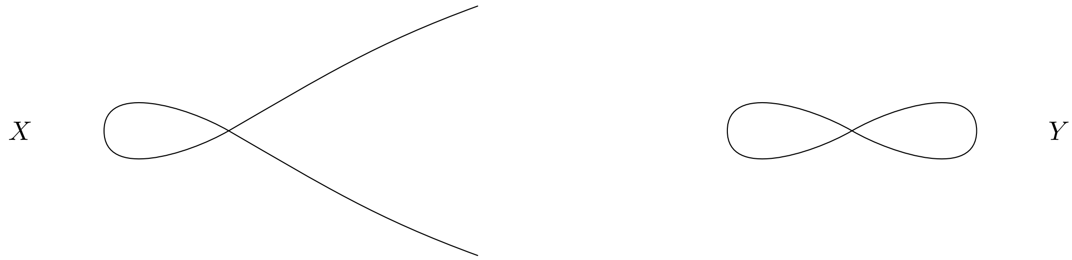
X   Y

Esercizio 7.12.16. Siano A, B come in figura. Dimostrare che A non è un rivestimento di B.

A   B

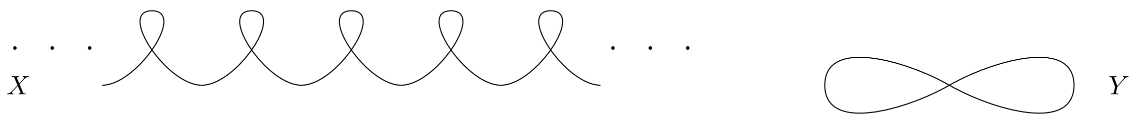
Trovare uno spazio C che sia un rivestimento di entrambi A e B.

Esercizio 7.12.17. Siano X, Y come in figura. Si dica se X è un rivestimento di Y.



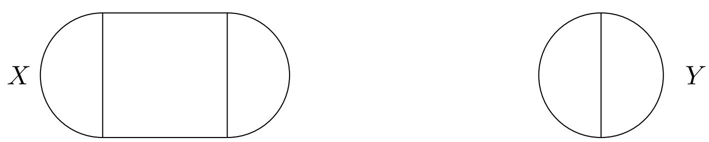
Si dica se $\mathbb{R}$ è un rivestimento di X.

Esercizio 7.12.18. Siano X, Y come in figura. Si dica se X è un rivestimento di Y.



Esercizio 7.12.19. Siano X, Y come in figura. Si dica se X è un rivestimento di Y.

Esercizio 7.12.20. Siano X, Y come in figura. Si dica se X è un rivestimento di Y.

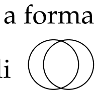


Esercizio 7.12.21. Si descrivano i rivestimenti universali dei seguenti grafi e si dica se sono omeomorfi.

Esercizio 7.12.22. Trovare tutti i rivestimenti di grado tre di un grafo a forma di 8.

Esercizio 7.12.23. Trovare tutti i rivestimenti di grado tre di un grafo a forma di A.

Esercizio 7.12.24. Trovare tutti i rivestimenti di grado tre di un grafo a forma di T.

Esercizio 7.12.25. Trovare un rivestimento connesso e di grado due di  .

Esercizio 7.12.26. Esiste un rivestimento connesso e di grado due di un grafo a forma di X?

Esercizio 7.12.27. Esiste un rivestimento di grado due di un grafo a forma di X?

Esercizio 7.12.28. Dimostrare che il gruppo fondamentale di un grafo è un gruppo libero.

Esercizio 7.12.29. Sia X una superficie, cioè una varietà topologica di dimensione due, connessa. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X meno un numero finito di punti è un gruppo libero.

Esercizio 7.12.30. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{RP}^n$.

Esercizio 7.12.31. Dimostrare che $\mathbb{CP}^1$ è semplicemente connesso.

Esercizio 7.12.32. Dimostrare che $\mathbb{CP}^2$ è semplicemente connesso.

Esercizio 7.12.33. Dimostrare che $\mathbb{CP}^n$ è semplicemente connesso.

Esercizio 7.12.34. Calcolare il gruppo fondamentale del toro, del toro meno un punto e del toro meno due punti. Verificare che sono diversi tra loro.

Esercizio 7.12.35. Calcolare il gruppo fondamentale della sfera meno un punto, meno due punti e meno tre punti. Verificare che sono diversi tra loro.

Esercizio 7.12.36. Calcolare il gruppo fondamentale della bottiglia di Klein.

Esercizio 7.12.37. Dimostrare che per $n \geq 2$ sia S^n che S^n meno un punto sono semplicemente connessi.

Esercizio 7.12.38. Dimostrare che se X è una varietà topologica di dimensione $n \geq 3$ semplicemente connessa, allora X meno un numero finito di punti rimane semplicemente connessa.

Esercizio 7.12.39. Calcolare il gruppo fondamentale di una superficie di genere 3 (per esempio quella dell'Esercizio 6.11.29).

Esercizio 7.12.40. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3$ meno l'asse X.

Esercizio 7.12.41. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3$ meno una circonferenza.

Esercizio 7.12.42. In $\mathbb{R}^3$ sia $X = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \cup \{x = 0, y = 0\}$. Calcolare il gruppo fondamentale di X^c.

Esercizio 7.12.43. Dimostrare che se una funzione continua $f : D^2 \to D^2$ fissa i punti del bordo, allora è suriettiva.

Esercizio 7.12.44. Dimostrare che S^3 e T^3 non sono omeomorfi.

Esercizio 7.12.45. Dimostrare che S^3 e $\mathbb{RP}^3$ non sono omeomorfi.

Esercizio 7.12.46. Dimostrare che $\mathbb{RP}^3$ e T^3 non sono omeomorfi.

Esercizio 7.12.47. Sia X una varietà topologia unidimensionale compatta. Calcolare $\pi_1(X)$.

Esercizio 7.12.48. Sia X una varietà topologia unidimensionale compatta. Dimostrare che X è omeomorfa a S^1.

Esercizio 7.12.49. Siano X e Y due grafi finiti e connessi. Dimostrare che se X e Y hanno lo stesso numero di lati e di vertici allora essi hanno lo stesso gruppo fondamentale.

Esercizio 7.12.50. Sia X un grafo finito e connesso. Sia V il numero dei vertici e L il numero dei lati. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X dipende solo da $V - L$.

Esercizio 7.12.51. Sia M una varietà topologia tridimensionale. Dimostrare che il gruppo fondamentale di M e quello di M meno un punto coincidono. (Si usi Van Kampen.)

APPENDICE A

Minicorso di aritmentica ordinale

Notazione: Nel seguito indicheremo con "$<$" una relazione d'ordine stretto e useremo "$\leq$" con l'usuale significato di "minore o uguale".

A.1. La classe degli ordinali

Definizione A.1.1 (Buoni ordini)**.** Un insieme X totalmente ordinato si dice ben ordinato (e l'ordine si dice un buon ordine) se ogni sottoinsieme non vuoto di X ha un minimo:

$$\forall \emptyset \neq A \subseteq X \exists a \in A : \; \forall b \in A : \; a \leq b.$$

In particolare ogni insieme non vuoto ben ordinato ha un minimo. Se non vi sono ambiguità notazionali, il minimo di un insieme ben ordinato si chiama spesso 0.

Esempio A.1.2. L'insieme vuoto è ben ordinato, ed è l'unico ben ordinato che non ha minimo. $\mathbb{N}$ è ben ordinato rispetto all'ordine usuale; $\mathbb{Z}$ no, infatti non è vuoto ma non ha un minimo.

È da sottolineare che nella definizione di insieme ben ordinato, il minimo di A deve stare in A.

Esempio A.1.3. L'insieme $[0, \infty)$ con l'ordine usuale non è ben ordinato, infatti il suo sottoinsieme $A = (1, 2)$ non ha un minimo. (Verrebbe da dire che 1 sia il minimo di A; ma non sta in A, che ha quindi un estremo inferiore, ma non un minimo!)

Esempio A.1.4. L'insieme $\{1 - \frac{1}{n+1} : \; n \in \mathbb{N}\}$ è ben ordinato. L'insieme $\{\frac{1}{n+1} : \; n \in \mathbb{N}\}$ no.

Esempio A.1.5. L'insieme $\{k - \frac{1}{n+1} : \; k, n \in \mathbb{N}\}$ è ben ordinato. L'insieme $\{k + \frac{1}{n+1} : \; k, n \in \mathbb{N}\}$ no. Nemmeno l'insieme $\{k - \frac{1}{n+1} : \; k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ lo è.

Esempio A.1.6. L'insieme $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con l'ordine

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{N} \\ x \text{ qualsiasi e } y = \infty \end{cases}$$

è ben ordinato. In quanto ogni sottoinsieme non vuoto o è il solo ∞ — e allora ∞ è il minimo — oppure è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ (più eventualmente ∞) e quindi ha minimo.

Esercizio A.1.7. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{N} \cup \{\infty_1\} \cup \{\infty_2\}$ con l'ordine

$$\begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{N} \\ x < \infty_1 \forall x \in \mathbb{N} \\ x < \infty_2 \forall x \in \mathbb{N} \\ \infty_1 < \infty_2 \end{cases}$$

è ben ordinato.

Definizione A.1.8. Sia X un insieme ben ordinato. Un punto $x \in X$ è il **massimo** di X se $\forall y \in X : \; y \leq x$.

Chiaramente il massimo se esiste è unico, ma non tutti gli insiemi ben ordinati hanno un massimo.

Esempio A.1.9. L'insieme ben ordinato $\mathbb{N}$ non ha un massimo.

Esempio A.1.10. Il massimo di $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ è ∞. Il massimo di $\mathbb{N} \cup \{\infty_1\} \cup \{\infty_2\}$ è ∞_2.

Definizione A.1.11. Sia X un insieme ben ordinato e sia $x \in X$. Se x non è il massimo, l'insieme $S_x = \{y \in X : \ y > x\}$ (maggiore stretto) è non vuoto. In tal caso si definisce il **successore** di x come

$$s(x) = \min S_x.$$

Il successore di x, se esiste, si suole indicare spesso con la notazione $x + 1$:

$$s(x) = x + 1$$

Esempio A.1.12. In $\mathbb{N}$ il successore di 0 è 1; quello di n è $n+1$. In $\mathbb{N}\cup\{\infty_1\}\cup\{\infty_2\}$ si ha $\infty_1+1 = \infty_2$.

Esempio A.1.13. Sia X l'insieme $\{k - \frac{1}{n+1} : \ k, n \in \mathbb{N}\}$ con l'ordine indotto da $\mathbb{R}$. Il minimo di X è -1 (ottenuto per $k = n = 0$), X non ha massimo. Il successore di 3 (ottenuto per $k = 4$ e $n = 0$) è $7/2$ (ottenuto per $k = 4$ e $n = 1$). Quindi si può dire

$$\text{"} - 1 = 0\text{"} \qquad \text{"}3 + 1 = 7/2\text{"}$$

(questo è preziosissimo materiale da aperitivo con ingegneri.)

Definizione A.1.14. Sia X un insieme ben ordinato. Un elemento $x \in X$ si dice **successore** se esiste y tale che $x = y + 1$ e si dice **limite** se $0 \neq x$ e x non è successore. Ci sono quindi tre tipi di punti:

$$\begin{cases} 0 \quad \text{(il minimo di } X, \text{ se non vuoto)} \\ \text{successori} \\ \text{limiti} \end{cases}$$

Esempio A.1.15. In $\mathbb{N}$ non ci sono numeri limite.

Esempio A.1.16. In $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ l'unico punto limite è ∞.

Esempio A.1.17. In $\mathbb{N} \cup \{\infty_1\} \cup \{\infty_2\}$ con l'ordine dell'Esercizio A.1.7 l'unico punto limite è ∞_1. ($\infty_2 = \infty_1 + 1$ è un successore.)

Esempio A.1.18. Sia X l'insieme $\{k - \frac{1}{n+1} : \ k, n \in \mathbb{N}\}$ con l'ordine indotto da $\mathbb{R}$. Gli elementi limite sono gli elementi di $\mathbb{N}$. Gli altri, tranne -1 che è il minimo, sono successori.

Teorema A.1.19 (Induzione transfinita)**.** *Sia $\alpha \neq \emptyset$ un insieme ben ordinato. Sia $P(x)$ una proposizione che dipende da $x \in \alpha$. Se*

$$\begin{cases} P(0) \textit{ è vera} \\ \forall x \in \alpha : \ (\forall y < x \ P(y) \textit{ è vera}) \ \Rightarrow \ P(x) \textit{ è vera} \end{cases}$$

allora $P(x)$ è vera per ogni $x \in \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. Sia F l'insieme degli $x \in \alpha$ per cui $P(x)$ è falsa. Se F non è vuoto allora ha un minimo $x_0 \in F$ perché α è ben ordinato. Ma allora $P(y)$ è vera per tutti gli $y < x_0$. Per ipotesi induttiva ne segue che $P(x_0)$ è vera e dunque non può stare in F. Dunque F è vuoto. $\square$

Si noti che l'induzione usuale è un caso particolare della transfinita (con $\alpha = \mathbb{N}$). Come l'usuale, anche l'ipotesi induttiva transfinita si può rimpiazzare con un'ipotesi del tipo $P(x) \Rightarrow P(x+1)$, ma solo per i successori, per i limiti si deve mantenere l'ipotesi induttiva generale:

$$\begin{cases} P(0) \text{ è vera} \\ \forall x \in \alpha: \ (P(x) \text{ è vera}) \Rightarrow P(x+1) \text{ è vera} \\ \forall x \in \alpha \text{ limite}: \ (\forall y < x \ P(y) \text{ è vera}) \ \Rightarrow \ P(x) \text{ è vera} \end{cases}$$

Nella Definizione 0.4.7 si erano introdotti tutti i tipi di intervalli di insiemi ordinati. Nel mondo degli insiemi ben ordinati però, ne bastano meno.

Definizione A.1.20 (Segmenti)**.** Sia X un insieme ben ordinato. Un segmento di X è un insieme del tipo:

$$\begin{aligned} [a,b) &= \{x \in X: \ a \leq x < b\} && \text{segmento generico} \\ [0,b) &= \{x \in X: \ x < b\} && \text{segmento iniziale} \\ [a,\infty) &= \{x \in X: \ x \geq a\} && \text{segmento finale} \end{aligned}$$

Si noti che un segmento può avere un massimo anche se la sintassi è quella di "aperto in b" e ciò succede precisamente tutte le volte che b è un successore. Quindi $[a,b]$ non è altro che $[a,b+1)$:

$$[a,b] = \{x \in X: \ a \leq x \leq b\} = [a,b+1)$$

(Se b è il massimo di X si ha $[a,b] = [a,\infty)$). Inoltre, siccome X è ben ordinato, ogni segmento ha un minimo quindi non esistono "segmenti (a,b) aperti in a" in quanto (a,b) non è altro che $[a+1,b)$:

$$(a,b) = \{x \in X: \ a < x < b\} = [a+1,b).$$

Definizione A.1.21. Siano X e Y due insiemi ben ordinati. Una funzione $f: X \to Y$ si dice **monotona** se $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$; f si dice **immersione** se è monotona e l'immagine di f è un segmento di Y, si dice **isomorfismo** se è biunivoca e monotona. Due insiemi ben ordinati si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo tra loro.

Teorema A.1.22. *Siano X e Y due insiemi non vuoti e ben ordinati. Una funzione $f: X \to Y$ è un'immersione se e solo se per ogni $0 < x \in X$ si ha $f(x) = \min\{y \in Y: f([0,x)) < y\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che f sia un'immersione e sia $x > 0$. Per monotonia $f(x) > f([0,x))$. Se esistesse $y \in Y$ tale che $f([0,x)) < y < f(x)$ allora, sempre per monotonia, y non starebbe nell'immagine di f che quindi non sarebbe un segmento e dunque f non sarebbe un'immersione.

Viceversa, supponiamo che valga $f(x) = \min\{y \in Y: f([0,x)) < y\}$. In particolare, siccome $f(x) > f([0,x))$, se $x > z$ allora $f(x) > f(z)$. Quindi f è monotona. Vediamo adesso che l'immagine di f è un segmento di Y. Sia I l'immagine di f e sia A il suo complementare. Per ogni $x > 0$ si deve mostrare che $A \cap [f(0), f(x)]$ è vuoto. Se così non fosse, tale insieme avrebbe un minimo y_0 e detto $y_1 = \min\{y \in I \cap [f(0), f(x)]: y > y_0\}$, per definizione y_1 sarebbe immagine di un punto x_1 per il quale non vale $f(x_1) = \min\{y \in Y: f([0,x_1)) < y\}$. □

Corollario A.1.23. *Siano X e Y due insiemi non vuoti e ben ordinati. Allora ogni immersione di X in Y è determinata dall'immagine di zero.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $f, g: X \to Y$ due immersioni tali che $f(0) = g(0)$. Se $f(z) = g(z)$ per ogni $z < x$, allora $f([0,x)) = g([0,x))$. Per il Teorema A.1.22, $f(x) = \min\{y \in Y: f([0,x)) < y\} = \min\{y \in Y: g([0,x)) < y\} = g(x)$. Siccome $f(0) = g(0)$, per induzione transfinita $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$. □

Un'immersione è sempre un'isomorfismo con l'immagine. Di particolare importanza nella teoria dei buoni ordini sono i segmenti iniziali e le loro immersioni in segmenti iniziali.

Definizione A.1.24 (Ordinali come tipi d'ordine)**.** Un **ordinale** è la classe di isomorfismo di un insieme ben ordinato. Se $\alpha = [X]$ è un ordinale, un segmento di α è la classe di un segmento di X. Un segmento iniziale di α è la classe di un segmento iniziale di X. Dati due ordinali α e β, si dice che $\alpha < \beta$ se α è un segmento iniziale di β (cioè, posto $\beta = [Y]$, se X è isomorfo a un segmento iniziale di Y).

In parole povere, $\alpha < \beta$ significa che β "comincia" come α. Ciò definisce un ordine stretto.

Teorema A.1.25. *Sia X un insieme ben ordinato. Allora X non è isomorfo a nessun suo segmento iniziale proprio.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \subseteq X$ l'insieme degli elementi $x \in X$ tali che X è isomorfo a $[0, x)$. Supponiamo $A \neq \emptyset$ e sia a il minimo di A. Siccome X è isomorfo a $[0, a)$ esite un'immersione $f : X \to [0, a)$ con $f(0) = 0$. Sia $b = f(a)$. Siccome X è isomorfo a $[0, a)$ allora è anche isomorfo a $f([0, a)) = [0, b)$. Quindi $b \in A$ e $b < a = \min A$. Assurdo. Quindi $A = \emptyset$. □

Teorema A.1.26. *Siano $\alpha = [X]$ e $\beta = [Y]$ due ordinali. Allora uno dei due è un segmento iniziale dell'altro.*

DIMOSTRAZIONE. Se uno dei due tra X e Y è vuoto non v'è nulla da dimostrare. ($\emptyset = [0, 0)$ è segmento iniziale di tutto.) Supponiamo quindi X, Y non vuoti e denotiamo con 0 sia il minimo di X che quello di Y. Supponiamo che β non sia un segmento iniziale di α e dimostriamo che α è un segmento iniziale di β.

Dimostriamo per induzione transfinita che la frase $P(x)$= "Esiste un'immersione $f : [0, x] \to Y$ con $f(0) = 0$" è vera per ogni x. $P(0)$ è ovviamente vera. Se per ogni $z < x$ esiste un'immersione $f_z : [0, z] \to Y$ tale che $f_z(0) = 0$, per il Corollario A.1.23 tale immersione è unica. Ne segue che le funzioni f_z definiscono un'immersione $f : [0, x) \to Y$ con $f(0) = 0$. Quindi $[0, x)$ è isomorfo a un segmento iniziale di Y. Siccome Y non è isomorfo a $[0, x)$ (stiamo supponendo che $\beta \not\leq \alpha$), allora $f([0, x)) \neq Y$. Ponendo $f(x) = \min\{y \in Y : f([0, x)) < y\}$ si ottiene un'immersione di $[0, x]$ in un segmento iniziale di Y. Quindi $P(x)$ è vera per ogni x. Le immersioni $f_x : [0, x] \to Y$ (uniche per il Corollario A.1.23) definiscono un'immersione di X in un segmento iniziale di Y.

□

Il Teorema A.1.26 dice che dati due ordinali α, β si ha $\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$ e si può quindi parafrasare dicendo che la classe[1] degli ordinali è totalmente ordinata.

Teorema A.1.27. *La classe degli ordinali è ben ordinata.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A una classe di ordinali e sia $\alpha \in A$. Gli elementi di A minori di α non sono altro che classi di equivalenza di ordini di segmenti iniziali $[0, x)$ di α. Ad ogni segmento iniziale $[0, x)$ corrisponde il suo estremo superiore x. Quindi l'insieme degli elementi di A minori di α corrisponde a un sottoinsieme di α. Siccome α è bene ordinato, ha un minimo. Tale minimo è ovviamente il minimo di A. □

Dato un ordinale si può quindi definire il suo successore come il più piccolo ordinale maggiore di esso. Gli ordinali sono di tre tipi, come gli elementi

$$\begin{cases} 0 = \emptyset & \text{lo zero, l'ordinale più piccolo} \\ \text{successore} & X \text{ è successore, se esiste } Y : \ X = s(Y), \ \text{se e solo se } X \text{ ha un massimo} \\ \text{limite} & X \text{è limite, se non è successore né vuoto} \end{cases}$$

[1]Si è volutamente usata la parola "classe" al posto di "insieme" perché in genere "l'insieme" degli ordinali è troppo grosso per essere catalogato come insieme senza incorrere in paradossi di tipo Russell.

A.2. Gli ordinali di Von Neumann

I fatti mostrati sinora suggeriscono che gli ordinali stiano uno dentro l'altro. Ebbene, si possono scegliere dei rappresentanti canonici per i tipi d'ordine in modo che ciò sia effettivamente vero.

Definizione A.2.1 (Ordinali di Von Neumann)**.** Un insieme X si dice ordinale di Von Neumann se $X \subseteq \mathcal{P}(X)$ — cioè se ogni elemento di X è un sottoinsieme di X — e se la relazione di appartenenza è un buon ordinamento su X.

Se un ordinale X di Von Neuman non è vuoto, allora contiene il vuoto come elemento: Infatti il minimo X_0 di X deve essere un sottoinsieme di X, quindi gli elementi di X_0 sono elementi anche di X, ma siccome l'ordine è dato dall'appartenenza, allora se $x \in X_0$ si ha $x \in X$ e $x < X_0$, quindi X_0 non sarebbe minimo. Se ne deduce che X_0 non ha elementi. Gli ordinali di Von Neumann sono i seguenti:

$$\begin{cases} 0 = \emptyset \\ 1 = \{0\} = \{\emptyset\} \\ 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ \vdots \\ \omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\} \\ \omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots, \omega\} \\ \omega + 2 = \omega + 1 \cup \{\omega + 1\} = \omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega \cup \{\omega\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots, \omega, \omega \cup \{\omega\}\} \\ \vdots \end{cases}$$

e in generale

$$\begin{cases} 0 = \emptyset \\ \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} = \{\gamma \leq \alpha\} = \{\gamma < \alpha + 1\} \\ \forall \alpha \text{ limite si ha } \alpha = \cup_{\gamma < \alpha} \gamma = \{\gamma < \alpha\} \end{cases}$$

In particolare, ogni ordinale di Von Neumann è esattamente l'insieme dei suoi predecessori. Data una famiglia di ordinali $\mathcal{F} = \{\gamma_i\}_{i \in I}$ esiste sempre l'estremo superiore, detto anche limite dei γ_i

$$\lim_i \gamma_i = \sup \mathcal{F} = \cup_i \gamma_i.$$

Esempio A.2.2. Per come è definito, ω è il tipo d'ordine di $\mathbb{N}$. Esso è il limite (o il $\sup$, o l'unione) degli ordinali finiti.

Esempio A.2.3. Il tipo d'ordine di $\{k - \frac{1}{1+n}, n \in \mathbb{N}, k = 1, 2\}$ è $\omega + \omega$. Esso è il limite degli ordinali $\omega + n$.

Esempio A.2.4. Il tipo d'ordine dell'Esempio A.1.13 è $\omega + \omega + \omega + \dots$.

Teorema A.2.5. *Ogni ordinale ha uno e un solo rappresentante di Von Neumann.*

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione transfinita. Il vuoto è un ordinale di Von Neumann. Se X è di Von Neumann allora $X \cup \{X\}$, che ha il tipo d'ordine di $X + 1$, è di Von Neumann. Se ogni $Y < X$ ha un rappresentante Y_{VN} di Von Neumann, allora l'unione

$$\bigcup_{Y < X} Y_{VN}$$

è di Von Neumann ed ha il tipo d'ordine di X. L'unicità segue dal fatto che due ordinali di Von Neumann diversi stanno uno dentro l'altro e quindi hanno tipo d'ordine diverso. □

Possiamo quindi identificare gli ordinali con gli ordinali di Von Neumann. Il fatto che gli ordinali siano ben ordinati ci permette, per ogni proprietà P, di trovare il più piccolo ordinale con tale proprietà, che non è altro che il minimo degli elementi con P. Per esempio ω è il primo ordinale limite, **il più piccolo ordinale non numerabile** si chiama ω_1, il primo ordinale di cardinalità maggiore di ω_1 si chiama ω_2 (e si può continuare).

Definizione A.2.6. Un ordinale cardinale è il più piccolo ordinale della sua classe di cardinalità.

Esempio A.2.7. ω_1 è un cardinale. Sia ω che $\omega + 1$ sono numerabili, ma solo ω è cardinale.

A.3. Aritmetica ordinale

Se non specificato, useremo sempre gli ordinali di Von Neumann.

Definizione A.3.1 (Somma)**.** Dati α, β ordinali, si definisce la somma $\alpha + \beta$ come il tipo d'ordine su $\alpha \sqcup \beta$

$$z < w \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \alpha,\ w \in \beta \\ z, w \in \alpha,\ z < w \\ s, w \in \beta,\ z < w \end{cases}$$

in parole povere, si mette β dopo α.

Il successore di α è quindi $\alpha + 1$, coerentemente con la notazione usata finora, ed è costruito aggiungendo ad α un elemento dichiarato più grande di tutti gli altri, che negli ordinali di Von Neumann è α stesso. Si noti che **la somma tra ordinali non è commutativa**:

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1.$$

Esercizio A.3.2. Dimostrare che $1 + \omega = \omega$.

Esercizio A.3.3. Dimostrare che la somma è associativa. Per ogni α, β, γ si ha $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ che coincide col tipo d'ordine sull'unione disgiunta di α, β, γ con α prima di β prima di γ. Si possono quindi omettere le parentesi e scrivere $\alpha + \beta + \gamma$.

Su un prodotto $X \times Y$ abbiamo visto l'ordine lessicografico. Per definire il prodotto tra ordinali è comodo usare l'ordine **antilessicografico**, cioè il lessicografico di $Y \times X$.

Esercizio A.3.4. Dimmostrare che se X e Y sono ben ordinati allora l'ordine antilessicografico è un buon ordine su $X \times Y$.

Definizione A.3.5 (Prodotto)**.** Dati due ordinali α, β si definisce $\alpha\beta$ come il tipo d'ordine di $\alpha \times \beta$ con l'ordine antilessicografico (o se si preferisce, il tipo d'ordine di $\beta \times \alpha$ con l'ordine lessicografico).

In soldoni, per fare $\alpha\beta$ si prendono β copie di α e si mettono "una dopo l'altra seguendo l'ordine di β" (l'ordine antilessicografico questo fa). Per esempio $\omega\omega = \omega + \omega + \omega + \ldots$ "ω volte". Come la somma, **nemmeno il prodotto tra ordinali è commutativo**:

$$2\omega = \omega \neq \omega 2 = \omega + \omega.$$

Esercizio A.3.6. Dimostrare che $2\omega = \omega$ e $\omega 2 = \omega + \omega$.

Teorema A.3.7. *Per ogni α, β ordinali si ha*

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha 0 = 0 & \textit{caso } \beta = 0 \\ \alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha & \textit{caso successore} \\ \cup_{\gamma < \beta} \alpha\gamma & \textit{caso limite} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Siano α e β ordinali. Il prodotto tra un insieme e il vuoto è vuoto, quindi $\alpha 0 = 0$. $\alpha(\beta+1)$ è l'ordine antilessicografico su $\alpha \times (\beta \cup \{\beta\})$ che per definizione è uguale all'ordine antilessicografico di $\alpha \times \beta$ seguito da l'ordine di $\alpha \times \{\beta\}$, cioè l'ordine di $\alpha\beta + \alpha$.

Vediamo il caso limite. Siccome $\beta = \{\gamma < \beta\}$, allora $\alpha \times \beta = \{\alpha \times \gamma : \gamma < \beta\}$ e dunque il tipo d'ordine di $\alpha \times \beta$ coll'antilessicografico è maggiore di $\alpha\gamma$ per ogni $\gamma < \beta$. D'altronde, ogni ordinale η che sia minore di $\alpha\beta$ è un segmento iniziale di $\alpha\beta$ e quindi è realizzato dal tipo d'ordine di $\{\xi \in \alpha \times \beta : \xi < (x, \gamma)\}$ per certi $x \in \alpha, \gamma \in \beta$. In particolare $\eta < \alpha \times (\gamma + 1)$. Siccome β è limite e $\gamma < \beta$, anche $\gamma + 1 < \beta$. Quindi $\alpha\beta$ è il più piccolo ordinale maggiore di tutti gli $\alpha\gamma$ con $\gamma < \beta$, cioè $\alpha\beta = \lim_{\gamma<\beta} \alpha\beta$. □

Esercizio A.3.8. Dimostrare che il prodotto è associativo. Per ogni α, β, γ si ha $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ che coincide col tipo d'ordine antilessicografico su $\alpha \times \beta \times \gamma$. Si possono quindi omettere le parentesi e scrivere $\alpha\beta\gamma$.

Per la potenza bisogna stare un po' attenti perché i prodotti infiniti non sono ben ordinati antilessicograficamente di suo. (Cos'è l'ordine antilessicografico su un prodotto infinito?) È comodo quindi dare direttamente una definizione per induzione.

Definizione A.3.9. Per ogni α, β ordinali si pone

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha^0 = 1 & \text{caso } \beta = 0 \\ \alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta \alpha & \text{caso successore} \\ \cup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma & \text{caso limite} \end{cases}$$

Esempio A.3.10. $2^\omega = \cup_n 2^n = \omega$. (Da questo esempio si evince in particolare che l'aritmetica ordinale è differente da quella cardinale dove 2^X ha sempre cardinalità maggiore di X. Si veda anche l'Esercizio A.4.18, da cui si deduce che 2^ω è il tipo d'ordine di un'ordine sull'insieme dei sottoinsiemi finiti di ω, che ha cardinalità numerabile).

Esempio A.3.11. $2^{\omega+1} = 2^\omega 2^1 = \omega 2 = \omega + \omega$.

Esempio A.3.12. $\omega\omega = \omega^2 \neq 2^\omega$. Infatti $\omega^2 = \omega\omega = \lim_n \omega n = \omega + \omega + \omega + \dots$ contiene un elemento limite (per esempio ω) mentre tutti gli elementi di $2^\omega = \omega$ sono successori. (Si noi che $2^\omega = \omega < \omega^2$).

A.4. Esercizi

Esercizio A.4.1. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{Z}$ con l'ordine

$$x < y \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < y \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{Z} \\ y < x < 0 \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{Z} \\ y < 0 \leq x \text{ per l'ordine naturale di } \mathbb{Z} \end{cases}$$

è ben ordinato. Che tipo d'ordine è?

Esercizio A.4.2. Sia X un insieme ben ordinato e sia $Y \subseteq X$. Dimostrare che $[Y] \leq [X]$.

Esercizio A.4.3. Dimostrare che la somma tra ordinali può essere definita per induzione transfinita come

$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \beta = \cup_{\gamma<\beta} \alpha + \gamma \quad \text{per ordinali limite} \end{cases}$$

Esercizio A.4.4. Dimostrare che la somma tra ordinali è monotona a destra:

$$\beta < \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$

Esercizio A.4.5. Dimostrare che la somma tra ordinali è debolmente monotona a sinistra.

Esercizio A.4.6. Dimostrare con un esempio che in genere la somma tra ordinali non è strettamente monotona a sinistra.

Esercizio A.4.7. Dimostrare che per la somma tra ordinali vale la legge di cancellazione a sinistra

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \quad \Rightarrow \quad \beta = \gamma.$$

Esercizio A.4.8. Dimostrare con un esempio che in genere la somma tra ordinali non gode della legge di cancellazione a destra.

Esercizio A.4.9. Dimostrare la proprietà distributiva a sinistra tra somma e prodotto di ordinali:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Esercizio A.4.10. Dimostrare che $0\alpha = 0$.

Esercizio A.4.11. Dimostrare che $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$.

Esercizio A.4.12. Dimostrare che il prodotto di ordinali è strettamente monotono a destra: se $\alpha \neq 0$ allora

$$\beta < \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta < \alpha\gamma.$$

Esercizio A.4.13. Dimostrare che il prodotto di ordinali è debolmente, e in genere non strettamente, monotono a sinistra: se $\alpha \neq 0$ allora

$$\beta < \gamma \quad \Rightarrow \quad \beta\alpha \leq \gamma\alpha.$$

Esercizio A.4.14. Dimostrare che il prodotto tra ordinali gode della cancellazione a sinistra:

$$\alpha \neq 0 \quad \text{e} \quad \alpha\beta = \alpha\gamma \quad \Rightarrow \quad \beta = \gamma.$$

Esercizio A.4.15. Dimostrare con un esempio che in genere il prodotto non gode della cancellazione a destra.

Esercizio A.4.16. Dimostrare che gli ordinali non hanno divisori dello zero:

$$\alpha\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha = 0) \quad \text{oppure} \quad (\beta = 0).$$

Esercizio A.4.17. Dimostrare che per gli ordinali vale una regola di divisione con resto (dalla parte giusta). Per ogni ordinale α, per ogni ordinale $\beta \neq 0$ esistono unici γ e $\delta < \beta$ ordinali tali che

$$\alpha = \beta\gamma + \delta.$$

Esercizio A.4.18. Dimostrare che, se $\alpha = [A]$ e $\beta = [B]$ allora α^β è il tipo d'ordine di

$$\{f : B \to A : f(b) \neq 0 \text{ solo per un numero finito di elementi}\}$$

con l'ordine anti-lessicografico di A^B visto come il prodotto di B copie di A.

Esercizio A.4.19. Dimostrare la regola ordinata delle potenze tra ordinali

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma.$$

Esercizio A.4.20. Dimostrare che $\omega + 1$ con la topologia dell'ordine è omeomorfo (anche se non isomorfo come tipo d'ordine) al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito da $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ (si noti quest'ultimo non è ben ordinato dall'ordine indotto da $\mathbb{R}$).

Esercizio A.4.21. Dimostrare che $\omega^2 = \omega\omega = \omega + \omega + \omega + \dots$ con la topologia dell'ordine il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito da $\{k - \frac{1}{n+1} : k, n \in \mathbb{N}\}$ sono omeomorfi.

Esercizio A.4.22. Dimostrare che ω_1 con la topologia dell'ordine e $\mathbb{R}$ Euclideo non sono omeomorfi.

Esercizio A.4.23. Dimostrare che ω_1 e $\omega_1 + \omega_1$ non sono omeomorfi.

Esercizio A.4.24. Dimostrare che ω e $\omega + 1$ non sono omeomorfi.

Esercizio A.4.25. Dimostrare che $1 + \omega$ e $\omega + 1$ non sono omeomorfi.

Esercizio A.4.26. Dimostrare che $\omega + 1$ e $\omega + 2$ sono omeomorfi.

Esercizio A.4.27. Dimostrare che $\omega + 1$ e $\omega + \omega$ non sono omeomorfi.

Esercizio A.4.28. Dimostrare che $\omega + \omega$ e $\omega + \omega + \omega$ non sono omeomorfi.

Esercizio A.4.29. Dimostrare che ω_1 è compatto per successioni ma non è compatto.

Esercizio A.4.30. Dimostrare che ω_1 non è omeomorfo a nessun suo elemento.

APPENDICE B

Successioni generalizzate

Le successioni usuali sono indicizzate con $\mathbb{N}$, ma nulla osta che si usino insiemi ordinati più generali. Una delle proprietà principali di $\mathbb{N}$ nella teoria delle successioni è che dato $n \in \mathbb{N}$, esiste sempre $m > n$. Una successione (x_i) a valori in X può essere definita come una famiglia di punti indicizzati da $\mathbb{N}$ o più semplicemente come una funzione $x : \mathbb{N} \to X$. Questi concetti possono essere estesi considerando insiemi di indici più generali di $\mathbb{N}$. Una volta introdotte le successioni generalizzate, che sono apparentemente più complicate delle successioni usuali, avremo l'indubbio vantaggio di semplificare molte dimostrazioni e di avere teoremi che non richiedono ipotesi di numerabilità.

B.1. Insiemi diretti e successioni generalizzate

Definizione B.1.1. Un **insieme diretto** (Definizione 1.3.9) è un insieme parzialmente ordinato $(I, \leq)$ tale che
$$\forall x, y \in I \; \exists z \in I : z \geq x, z \geq y.$$

Esempio B.1.2. Un filtro è un insieme diretto. Se X è uno spazio topologico e $x \in X$, il filtro $\mathcal{I}(x)$ degli intorni di x è un insieme diretto.

Esempio B.1.3. Un insieme totalmente ordinato è un insieme diretto, in particolare gli ordinali lo sono.

Definizione B.1.4. Sia I un insieme diretto. Un sottoinsieme $J \subseteq I$ si dice **cofinale** in I se per ogni $x \in I$ esiste $y \in J$ tale che $y \geq x$.

Esempio B.1.5. Ogni sistema fondamentale di intorni di x è cofinale nel filtro degli intorni di x.

Definizione B.1.6. Una **successione generalizzata** a valori in un insieme X è una una funzione da un insieme diretto I a X. Equivalentemente, una successione generalizzata può essere descritta come una famiglia $(x_i)_{i \in I}$ di punti di X, indicizzata da un insieme diretto. Una successione generalizzata indicizzata con I, si chiama anche I-successione.

È opportuno sapere che nella letteratura inglese, le successioni generalizzate si chiamano usualmente *net*. Non useremo questa terminologia per non confonderle con gli ε-net usati negli spazi metrici.

Esempio B.1.7. Se X è uno spazio topologico e $x \in X$, considerando I come l'insieme degli intorni di x, se per ogni $A \in I$ si sceglie $x_A \in A$ otteniamo una successione generalizzata a valori in X.

I concetti di *definitivamente* e *frequentemente* si danno per le successioni generalizzate attraverso il concetto di cofinalità.

Definizione B.1.8. Sia I un insieme diretto e sia $(x_i)_{i \in I}$ una successione generalizzata. Sia P una proprietà dipendente da i. Si dice che P vale **definitivamente** in I se esiste $i_0 \in I$ tale che $P(i)$ è vera per ogni $i \geq i_0$. Si dice che P vale **frequentemente** in I se l'insieme degli indici i tale che $P(i)$ è vera è cofinale in I.

Esempio B.1.9. È di facile verifica che *non definitivamente* P equivale a *frequentemente non* P e viceversa.

Definizione B.1.10. Un ordinale α si dice cofinale in un insieme diretto X se esiste una α-successione cofinale in X. La **cofinalità** di X, denotata con $\mathrm{cof}(X)$, è il più piccolo ordinale cofinale in X.

Esempio B.1.11. n è cofinale in $\omega + 1$ per ogni $n \in \omega$. La cofinalità di $\omega + 1$ è 1.

Esempio B.1.12. n è cofinale in $\omega + 2$ per ogni $n \in \omega$. La cofinalità di $\omega + 2$ è 1.

Esempio B.1.13. Se α ha un massimo (cioè se è un successore) allora ha cofinalità 1.

Esempio B.1.14. $\omega + \omega$ ha cofinalità ω.

Teorema B.1.15. *ω_1 ha cofinalità non numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che ω_1 è il più piccolo ordinale non numerabile. Consideriamo un ordinale numerabile α e una α-successione x_i in ω_1. Poniamo $X_i = [0, x_i) < \omega_1$. Siccome ω_1 è il primo ordinale non numerabile, tutti gli X_i sono numerabili. Se $(x_i)_{i\in\alpha}$ fosse cofinale in ω_1 si avrebbe

$$\bigcup_{i\in\alpha} X_i = \omega_1$$

e quindi avremmo ottenuto ω_1 come unione numerabile di numerabili, il che lo renderebbe numerabile. $\square$

Corollario B.1.16. $\mathrm{cof}(\omega_1) = \omega_1$.

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente ω_1 è cofinale in ω_1 ed essendo lui il primo non numerabile, visto che $\mathrm{cof}(\omega_1)$ non è numerabile, si ha $\mathrm{cof}(\omega_1) = \omega_1$. $\square$

La cofinalità non è però una questione di cardinalità, ma di come "finisce" un ordinale:

Esempio B.1.17. $\omega_1 + \omega$ ha cofinalità ω.

Esempio B.1.18. $\omega_1 + \omega + 1$ ha cofinalità 1.

B.2. Convergenza di successioni generalizzate e continuità

Definizione B.2.1 (α-successioni convergenti)**.** Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$. Sia α un insieme diretto e sia $(x_i)_{i\in\alpha}$ una α-successione in X. Si dice che

$$x_i \to x$$

se per ogni intorno A di x si ha $x_j \in A$, definitivamente in α.

Come nel caso classico, negli spazi T_2 c'è unicità del limite.

Teorema B.2.2 (Teorema 1.5.8 generalizzato)**.** *Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Allora $x \in X$ è un punto di aderenza di A se e solo se è il limite di una successione generalizzata in A.*

DIMOSTRAZIONE. Se x è il limite di una α-successione $(a_i)_{i\in\alpha} \subseteq A$ allora non è interno ad A^c e quindi è di aderenza per A. Viceversa, sia $x \in \bar{A}$. Sia $I = \mathcal{I}(x)$ il filtro degli intorni di x (che è un insieme diretto). Per ogni $U \in I$ esiste $a_U \in U \cap A$. La successione generalizzata $(a_U)_{U\in I}$ converge a x. $\square$

Se I ha un massimo allora $x_i \to x \in \mathbb{R}$ se e solo se $x_{\max} = x$. In generale, la convergenza di successioni generalizzate si può interpretare come una continuità all'infinito.

Teorema B.2.3. *Sia I un insieme diretto senza massimo. Consideriamo $I \cup \{\infty\}$ con la seguente topologia. Su I mettiamo la discreta e dichiariamo intorni di ∞ gli insiemi del tipo $V_{i_0} = \{i \in I : i > i_0\}$, al variare di i_0 in I (ciò definisce una topologia per il Teorema 1.3.16).*

Allora una I-successione $(x_i)_{i\in I}$ a valori in uno spazio topologico X converge a $x \in X$ se e solo se (x_i) è continua all'infinito, cioè se la funzione

$$i \mapsto x_i \qquad \infty \mapsto x$$

è continua da $I \cup \{\infty\}$ in X.

DIMOSTRAZIONE. (x_i) è continua all'infinito se e solo se per ogni intorno A di x la sua preimmagine è un intorno di infinito, se e solo se $x_i \in A$ definitivamente. Avendo messo la topologia discreta su I, se (x_i) è continua all'infinito, è continua ovunque. □

In particolare abbiamo che la nozione di convergenza generalizzata si mantiene per composizione con funzioni continue.

Teorema B.2.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Un punto $x \in A$ è interno se e solo se per ogni insieme diretto α, se $(x_i)_{i\in\alpha}$ è una α-successione convergente a x allora $x_i \in A$ definitivamente.*

In particolare A è aperto se e solo se per ogni $x \in A$ e per ogni insieme diretto α, se $(x_i)_{i\in\alpha}$ è una α-successione convergente a x allora $x_i \in A$ definitivamente .

DIMOSTRAZIONE. Dire che x è interno ad A è equivalente per definizione a dire che A è un intorno di x. Se $x_i \to x \in A$ e A è un intorno di x allora per definizione di convergenza $x_i \in A$ definivamente. Viceversa, supponiamo che A non sia un intorno di x, cioè x non è interno ad A. Sia $I = \mathcal{F}(x)$ il filtro degli intorni di x.

Per ogni $B \in I$ esiste $x_B \in B \cap A^c$ perché x non è interno ad A. La I-successione $(x_B)_{B\in I}$ converge a x: per ogni intorno U di x, per ogni $B > U$ si ha $x_B \in B \subset U$; quindi $x_B \in U$ definitivamente in I. Quindi se A non è un intorno di x abbiamo trovato una successione x_B che converge a x ma $x_B \notin A$. □

Il seguente teorema ci dice che, se paghiamo il prezzo di passare alle successioni generalizzate, la nozione di continuità topologica coincide con l'usuale definizione di continuità metrica.

Teorema B.2.5 (Continuità per α-successioni)**.** *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ è continua in $x \in X$ se e solo se per ogni insieme diretto α e per ogni α-successione $(x_i)_{i\in\alpha}$ che converge a x si ha $f(x_i) \to f(x)$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo f continua in x e sia $x_i \to x$ un'α-successione. Per ogni intorno A di $f(x)$ si ha che $f^{-1}(A)$ è un intorno di x e quindi x è interno a $f^{-1}(A)$. Per il Teorema B.2.4 la successione x_i sta in $f^{-1}(A)$ definitivamente in α e quindi la successione $f(x_i)$ sta in A definitivamente in α. Quindi $f(x_i) \to x$.

Viceversa, se f non è continua in x, esiste un intorno A di $f(x)$ tale che $f^{-1}(A)$ non è un intorno di x. Per il Teorema B.2.4 esiste un insieme diretto β e una β-successione x_i tale che $x_i \to x$ e $x_i \in (f^{-1}(A))^c$. Per cui $f(x_i) \notin A$ mentre $f(x) \in A$. Dunque

$$f(x_i) \not\to f(x).$$

□

Teorema B.2.6. *Sia $X = \Pi_i X_i$ il prodotto di una famiglia di spazi topologici. Una successione generalizzata in X converge se e solo se convergono le sue proiezioni.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dai teoremi B.2.3 e 2.1.15. □

B.3. Sottosuccessioni generalizzate e compattezza

Vediamo ora come le successioni generalizzate possano essere usate per riconoscere la compattezza. Per comodità d'uso nelle dimostrazioni, si introduce una nozione di sottosuccessione leggermente controintuitiva. Una sottosuccessione nel senso classico sarebbe semplicemente la restrizione dell'insieme degli indici a un sottoinsieme diretto cofinale. Questo però non permette di lavorare agevolmente. La definizione che daremo ha il pregio di trasformare tutte le dimostrazioni come se gli spazi fossero localmente numerabili.

Definizione B.3.1. Siano I, J insiemi diretti. Una funzione $f : J \to I$ si dice **monotona** se $\forall j \geq k \Rightarrow f(j) \geq f(k)$; si dice **finale** se l'immagine di f è cofinale in I.

Esempio B.3.2. Una funzione costante $f : I \to \mathbb{N}$ è monotona ma non finale.

Esempio B.3.3. Se $J \subseteq I$ è cofinale allora l'inclusione è monotona e finale.

Esempio B.3.4. Sia I un insieme diretto qualsiasi. Su $\alpha = I \times \mathbb{N}$ mettiamo l'ordine prodotto (cioè $(i, n) \geq (j, m)$ se e solo se $i \geq j$ e $n \geq m$). In questo modo α è un insieme diretto perché dati (i, n) e (j, m) esiste sempre $k \in I$ maggiore di i, j; ergo l'elemento $(k, n + m)$ è maggiore di entrambi (i, n) e (j, m). La funzione $f : \alpha \to \mathbb{N}$ data da $f(i, n) = n$ è monotona e finale.

Quest'esempio si può interpretare come un procedimento diagonale generalizzato. Infatti $I \times \mathbb{N}$ si può interpretare come un insieme che indicizza una I-successione di successioni e l'ordine *prodotto* che ci abbiamo messo rende possibile l'estrazione di successioni generalizzate a partire da una I-successione di successioni.

Definizione B.3.5. Sia $(x_i)_{i \in I}$ una I-successione generalizzata a valori in X. Una **sottosuccessione generalizzata** di (x_i) è una sua **pre-successione**, cioè una successione generalizzata ottenuta per pre-composizione con una funzione monotona e finale $J \to I$.

In altre parole, una sottosuccessione generalizzata di (x_i) è una J-successione generalizzata $(y_j)_{j \in J}$, ove J è un insieme diretto, tale che esista una funzione monotona e finale $f : J \to I$ tale che

$$y_j = x_{f(j)}.$$

Esempio B.3.6. Se $(x_i)_{i \in I}$ è una I-successione e $J \subseteq I$ è un sottoinsieme diretto cofinale, allora $(x_j)_{j \in J}$ è una sottosuccessione di (x_i). In altre parole, le sottosuccessioni nel senso classico sono sottosuccessioni generalizzate.

Si noti però che le sottosuccessioni generalizzate non sono semplicemente sottoinsiemi cofinali. In particolare, l'Esempio B.3.4 mostra che l'insieme degli indici di una sottosuccessione generalizzata potrebbe avere cardinalità qualsiasi.

Teorema B.3.7. *Sia X uno spazio topologico e sia $(x_i)_{i \in I}$ una successione generalizzata in X. Allora essa converge se e solo se tutte le sue sottosuccessioni generalizzate convergono.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $x_i \to x$. Sia J un insieme diretto e $f : J \to I$ una funzione monotona e finale. Per ogni intorno A di x esiste $i_0 \in I$ tale che $x_i \in A$ per ogni $i \geq i_0$. Per finalità esiste $j_0 \in J$ tale che $f(j_0) \geq i_0$. Per monotonia per ogni $j \geq j_0$ si ha $f(j) \geq f(j_0) \geq i_0$. Quindi per ogni $j \geq j_0$ si ha $x_{f(j)} \in A$. Il viceversa è ovvio perché (x_i) è una sottosuccessione di sé stessa. □

Le definizioni di punto limite e punto di ricorrenza per successioni generalizzate $(x_i)_{i \in I}$ si danno esattamente come nel caso classico:

- x è un punto di ricorrenza di (x_i) se per ogni intorno U di x, la successione x_i sta frequentemente in U (cioè se per ogni i_0 esiste $j > i_0$ con $x_j \in U$).
- x è un punto limite di (x_i) se esiste una sottosuccessione generalizzata $(x_{f(j)})$ che converge a x.

Teorema B.3.8 (Teorema 3.4.6 generalizzato)**.** *Sia X uno spazio topologico e sia $(x_i)_{i \in I}$ una successione generalizzata a valori in X. Allora $x \in X$ è un punto di ricorrenza di $(x_i)_{i \in I}$ se e solo se è limite di una sua sottosuccessione generalizzata.*

DIMOSTRAZIONE. Se x è un punto limite di una sottosuccessione generalizzata di (x_i) allora è immediato verificare che è un punto di ricorrenza di (x_i). Viceversa, supponiamo che x sia di ricorrenza per (x_i). Definiamo J come l'insieme delle coppie (U, i) ove U è un intorno di x e $i \in I$ è tale che $x_i \in U$. Come nell'Esempio B.3.4 rendiamo J un insieme diretto ponendo $(U, i) \geq (V, k)$ se e solo se

$$U \subseteq V \qquad \text{e} \qquad i \geq k.$$

La funzione $f : J \to I$ data da $f(U,i) = i$ è monotona per come abbiamo definito l'ordine ed è finale perché x è un punto di ricorrenza di (x_i).

La J-successione generalizzata $y_j = x_{f(j)}$ è dunque una sottosuccessione generalizzata di (x_i). Vediamo che converge a x. Per ogni intorno U di x, esiste $i \in I$ tale che $x_i \in U$ perché x è di ricorrenza per (x_i). D'altronde, per ogni $j = (V,k) \geq (U,i)$ si ha

$$y_j = x_{f(j)} = x_k \in V \subseteq U$$

dunque $y_j \in U$ definitivamente. Quindi $y_j \to x$. □

Questo teorema è la chiave per riscrivere tutte le dimostrazioni che hanno a che fare con aperti e chiusi in salsa successioni generalizzate. Si noti in particolare che la nozione di punto di ricorrenza e punto limite diventano equivalenti per le successioni generalizzate.

Definizione B.3.9. Uno spazio topologico X si dice **compatto per successioni generalizzate** se ogni successione generalizzata in X ha una sottosuccessione generalizzata convergente.

Teorema B.3.10 (Teorema 3.4.9 generalizzato)**.** *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se è compatto per successioni generalizzate.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo prima che se X non è compatto allora non è compatto per successioni generalizzate. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di X che non ammette un sottoricoprimento finito. Sia I l'insieme delle unioni finite di elementi di $\mathcal{U}$, ordinato per inclusione. Chiaramente I è un insieme diretto perché se $A, B \in I$ allora $A \cup B \in I$ e $A \cup B \geq A, B$. Siccome $\mathcal{U}$ non ha sottoricoprimenti finiti, per ogni $i \in I$ esiste $x_i \notin i$. Anche se la notazione è un po' strana, non sta succedendo nulla di strano: stiamo usando come insieme di indici per una successione una famiglia I di sottoinsiemi. Quindi ha senso dire $x_i \notin i$. Sia J un qualsiasi insieme diretto e $f : J \to I$ una funzione monotona e finale. Consideriamo la sottosuccessione generalizzata $y_j = x_{f(j)}$.

Sia $x \in X$ e sia $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tale che $x \in U_\alpha$. Per ogni $j \in J$ l'insieme $f(j) \cup U_\alpha$ è un elemento di I in quanto unione finita di elementi di $\mathcal{U}$. Per finalità esiste $k \in J$ tale che $f(k) \geq f(j) \cup U_\alpha$ e, per monotonia, per ogni $n \geq k$ in J si ha

$$y_n = x_{f(n)} \notin f(n) \supseteq f(k) \supseteq j \cap U_\alpha$$

in particolare

$$\exists k \in J : \forall n \geq k : \; y_n \notin U_\alpha$$

e dunque la sottosuccessione generalizzata $(y_j)_{j \in J}$ non converge a x. Siccome ciò vale per ogni x, la sottosuccessione $(y_j)_{j \in J}$ non converge a nessun limite. Siccome ciò vale per ogni J, la successione iniziale $(x_i)_{i \in I}$ non ha sottosuccessioni generalizzate convergenti.

Viceversa, supponiamo X compatto e sia $(x_i)_{i \in I}$ una successione generalizzata. Esattamente come nel Teorema 3.4.7, si mostra che essa ha un punto di ricorrenza. Per il Teorema B.3.8 tale punto è un punto limite di una sottosuccessione generalizzata di (x_i) che quindi ha una sottosuccessione generalizzata convergente. □

OSSERVAZIONE B.3.11. Il Teorema B.3.10 può sembrare l'uovo di Colombo. Si deve però stare attenti a questioni di cardinalità. Per esempio, in teoria della misura, la numerabilità di molti processi è fondamentale e le successioni generalizzate perdono questa caratteristica.

B.4. Filtri, convergenza e continuità

Vediamo adesso un'ulteriore generalizzazione del concetto di successione convergente. Quando diciamo che $x_n \to x$ in realtà siamo intrinsecamente interessati alla proprietà del filtro degli intorni di x. In un certo senso possiamo dire che il filtro degli intorni di x *converge* a x. Vediamo come questo punto di vista può essere usato in modo potente, per esempio per dare una dimostrazione cristallina del Teorema di Tychonoff (Teorema 3.3.3). In questa sezione parleremo di filtri *in* e filtri *su* insiemi.

Definizione B.4.1 (Definizione 1.3.5)**.** Dato un insieme X, un **filtro** di sottoinsiemi di X, o filtro **su** X, è una famiglia non vuota $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{P}(X)$ chiusa per intersezione e passaggio a soprainsiemi:

$$\forall A, B \in \mathcal{F} \text{ si ha } A \cap B \in \mathcal{F} \qquad\qquad \forall A \subseteq B,\ (A \in \mathcal{F}) \Rightarrow (B \in \mathcal{F}).$$

Un filtro **in** X è un filtro su un sottoinsieme di X, detto supporto di $\mathcal{F}$.

Si noti che la chiusura per soprainsiemi implica $X \in \mathcal{F}$, mentre la condizione $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(X)$ implica che $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Inoltre se $A \cap B = \emptyset$ allora al più uno dei due sta in $\mathcal{F}$. In particolare, per ogni A, al massimo uno tra A ed A^c può stare in $\mathcal{F}$.

Esempio B.4.2 (Il filtro delle code)*.* Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ una successione. Sia $A \subseteq X$ l'immagine di (x_n), cioè $A = \{x_n :\ n \in \mathbb{N}\}$. L'insieme $\mathcal{F} = \{C \subseteq A :\ \exists n \in \mathbb{N} :\ \forall m \geq n,\ x_m \in C\} = \{C \subseteq A$ tale che $x_n \in C$ definitivamente$\}$ è un filtro su A e quindi in X, detto filtro delle code di (x_n). La stessa cosa vale per le successioni generalizzate.

Lemma B.4.3. *Se $\mathcal{F}$ è un filtro in X e $f : X \to Y$ è una funzione qualsiasi, allora $f(\mathcal{F}) = \{f(A) :\ A \in \mathcal{F}\}$ è un filtro in Y.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $Z \subseteq X$ il supporto di $\mathcal{F}$ e sia $W = f(Z)$. Chiaramente $f(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{P}(W)$. Quindi, a meno di restringere f a una funzione da Z a W, ci basta dimostrare che se $\mathcal{F}$ è un filtro *su* X e f è suriettiva allora $f(\mathcal{F})$ è un filtro *su* Y.

Siano $A, B \in f(\mathcal{F})$. Per definizione esiste $U \in \mathcal{F}$ tale che $f(U) = A$. Siccome $\mathcal{F}$ è un filtro e $f^{-1}(f(U)) \supseteq U$, si ha $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$; similmente $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Quindi $(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$ e dunque

$$A \cap B = f(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \in f(\mathcal{F}).$$

Se $C \supseteq A$, allora $f^{-1}(C) \supseteq f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ e dunque $C = f(f^{-1}(C)) \in f(\mathcal{F})$. Siccome $\mathcal{F} \neq \emptyset$ allora $f(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ e siccome $\emptyset \notin \mathcal{F}$, per ogni $A \in \mathcal{F}$, $f(A) \neq \emptyset$ e quindi $\emptyset \notin f(\mathcal{F})$. □

Definizione B.4.4 (Convergenza di filtri)**.** Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ un filtro in X. Si dice che $\mathcal{F}$ converge a $x \in X$, usando l'usuale notazione

$$\mathcal{F} \to x$$

se per ogni intorno U di x esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $A \subseteq U$. Se $\mathcal{F} \to x$ il punto x si dice limite di $\mathcal{F}$.

Esempio B.4.5. Come anticipato, se $\mathcal{I}(x)$ è il filtro degli intorni di x, allora $\mathcal{I}(x) \to x$.

Esempio B.4.6. Se (x_n) è una successione (generalizzata) in X, allora $x_n \to x$ se e solo se il filtro delle sue code converge a x.

Siccome un filtro è chiuso per intersezione e non contiene il vuoto, negli spazi T_2 il limite di filtri se c'è è unico. Come per le successioni.

Teorema B.4.7 (Teoremi 1.5.8 e B.2.2 versione filtri)**.** *Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Allora $x \in X$ è un punto di aderenza di A se e solo se è il limite di un filtro in A.*

DIMOSTRAZIONE. Se x è il limite di un filtro in A allora è immediato verificare che $x \in \bar{A}$. Viceversa, se $x \in \bar{A}$ allora per il Teorema B.2.2 esso è limite di una successione generalizzata e dunque del filtro delle sue code. □

Teorema B.4.8. *Una funzione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è continua se e solo se per ogni filtro in X si ha*

$$\mathcal{F} \to x \qquad \Rightarrow \qquad f(\mathcal{F}) \to f(x).$$

DIMOSTRAZIONE. Se f è continua e $\mathcal{F} \to x$, allora per ogni intorno A di $f(x)$, $f^{-1}(A)$ è un intorno di x e quindi esiste $U \in \mathcal{F}$ con $U \subseteq f^{-1}(A)$. Quindi $f(U) \subseteq A$ e $f(U) \in f(\mathcal{F})$. Quindi $f(\mathcal{F}) \to f(x)$. Viceversa, se f non è continua allora esiste una successione generalizzata $x_i \to x$ con $f(x_i) \not\to f(x)$ (Teorema B.2.5). Il filtro delle sue code è un filtro $\mathcal{F} \to x$ tale che $f(\mathcal{F}) \not\to f(x)$. □

B.5. Ultrafiltri e compattezza

Lemma B.5.1. *Intersezioni di filtri su X è un filtro su X.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due filtri su X. Se $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$ allora, per passaggio a soprainsiemi, $A \cup B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Quindi $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Se $A, B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ allora $A \cap B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ e se $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ e $B \supseteq A$ allora $B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Infine, siccome $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \neq \mathcal{P}(X)$, allora $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \mathcal{P}(X)$. □

Corollario B.5.2. *Sia $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Se $\mathcal{F}$ ha la proprietà delle intersezioni finite (Definizione 3.3.1), allora $\mathcal{F}$ è contenuta in un filtro su X, il più piccolo dei quali si chiama* **filtro generato da** *$\mathcal{F}$.*

DIMOSTRAZIONE. Si verifica immediatamente che la famiglia $\mathcal{G}$ dei soprainsiemi delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{F}$ è un filtro (si noti che il vuoto non è un'intersezione finita per definizione, ergo $\mathcal{G} \neq \mathcal{P}(X)$) ed è chiaramente contenuto in tutti i filtri contenenti $\mathcal{F}$. □

Definizione B.5.3. Un **ultrafiltro** su X è un filtro $\mathcal{F}$ su X tale che per ogni $A \subseteq X$ si ha

$$A \in \mathcal{F} \qquad \text{oppure} \qquad A^c \in \mathcal{F}.$$

Un ultrafiltro **in** X è un ultrafiltro $\mathcal{F}$ **su** un sottoinsieme di X, detto supporto di $\mathcal{F}$.

Si noti che se un ultrafiltro contiene $A \cup B$ allora contiene almeno uno tra A e B (perché non contiene $(A \cup B)^c$). Tale condizione si estende ovviamente alle unioni finite.

Lemma B.5.4. *Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro* **in** *X e sia $A \in \mathcal{F}$. Siano $B_1, \dots, B_n \subseteq X$ tali che $A \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Allora esiste B_i tale che*

$$A \cap B_i \in \mathcal{F}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome $A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$ è un elemento di $\mathcal{F}$, almeno uno degli $A \cap B_i$ sta in $\mathcal{F}$. □

Teorema B.5.5. *Un filtro su X è un ultrafiltro se e solo se è massimale rispetto all'inclusione.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{F}$ un filtro che non è massimale. Quindi esiste un filtro $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ tale che esista $A \in \mathcal{G}$ ma $A \notin \mathcal{F}$. Siccome $\mathcal{G}$ è un filtro $A^c \notin \mathcal{G}$ e siccome $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ allora $A^c \notin \mathcal{F}$. Siccome né A né A^c stanno in $\mathcal{F}$, esso non è un ultrafiltro.

Viceversa supponiamo che un filtro $\mathcal{F}$ non sia un ultrafiltro. Allora esiste $A \in \mathcal{P}(X)$ tale che nessuno tra A e A^c sta in $\mathcal{F}$. Siccome $\mathcal{F}$ contiene X, allora A e A^c sono entrambi non vuoti. Siccome $A \notin \mathcal{F}$ allora nessun sottoinsieme di A sta in $\mathcal{F}$. Quindi ogni elemento di $\mathcal{F}$ interseca A^c. In particolare $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{A^c\}$ soddisfa le ipotesi del Corollario B.5.2 e quindi è contenuto in un filtro, che contiene strettamente $\mathcal{F}$ in quanto contiene A^c. Quindi $\mathcal{F}$ non è massimale. □

Corollario B.5.6. *Ogni filtro su X è contenuto in un ultrafiltro. In particolare, gli ultrafiltri esistono.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{F}$ un filtro e sia $\mathcal{M}$ la famiglia dei filtri contenenti $\mathcal{F}$, ordinata per inclusione. $\mathcal{M}$ è non vuota perché contiene almento $\mathcal{F}$. Sia $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ una catena di filtri in $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ se $i \leq j$. L'unione degli $\mathcal{F}_i$ è un filtro. Quindi ogni catena in $\mathcal{M}$ ha un maggiorante. Per il Lemma di Zorn, $\mathcal{M}$ ha un elemento massimale, che è un ultrafiltro per il Teorema B.5.5. □

Definizione B.5.7. Uno spazio topologico X si dice **compatto per ultrafiltri** se ogni ultrafiltro in X converge.

Teorema B.5.8 (Teoremi 3.4.9 e B.3.10 versione ultrafiltri)**.** *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se è compatto per ultrafiltri.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo X non compatto. Sia $\{C_i\}$ una famiglia di chiusi con la proprietà delle intersezioni finite (Definizione 3.3.1) tali che $\cap_i C_i = \emptyset$. Sia $\mathcal{F}$ il filtro generato da $\{C_i\}$ e sia $\mathcal{G}$ un ultrafiltro contenente $\mathcal{F}$. Per ogni $x \in X$ esiste i tale che $x \notin C_i$. Siccome C_i è chiuso esiste un intorno U di x tale che $U \cap C_i = \emptyset$. Siccome $C_i \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}$ è un filtro, nessun elemento di $\mathcal{G}$ può stare in U, in particolar $\mathcal{G} \not\to x$. Visto che ciò vale per ogni x, l'ultrafiltro $\mathcal{G}$ non converge.

Viceversa, supponiamo che $\mathcal{G}$ sia un ultrafiltro in X non convergente. Allora ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U_x che non contiene elementi di $\mathcal{G}$. Per il Lemma B.5.4 nessuna unione finita degli U_x contiene elementi di $\mathcal{G}$. Siccome $\mathcal{G}$ non è vuoto, il ricoprimento $\{U_x\}_{x \in X}$ non ammette sottoricoprimenti finiti. □

Lemma B.5.9. *Se $f : X \to Y$ è una funzione e $\mathcal{F}$ un ultrafiltro in X, allora $f(\mathcal{F})$ è un ultrafiltro in Y.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma B.4.3 sappiamo già che $f(\mathcal{F})$ è un filtro e a meno di restringerci ai supporti possiamo supporre che $\mathcal{F}$ sia *su* X e che f sia suriettiva (e quindi $f(\mathcal{F})$ è *su* Y).

Sia $A \subset Y$. Allora $Y = A \cup A^c$ e quindi $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(A)^c$. Siccome $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro, uno dei due sta in $\mathcal{F}$. Quindi uno tra A e A^c sta in $\mathcal{F}$. □

Teorema B.5.10 (Teorema di Tychonoff)**.** *Un prodotto qualsiasi di spazi compatti è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi compatti e sia $X = \Pi_i X_i$. Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro in X. Ogni proiezione $\mathcal{F}_i = \pi_i(\mathcal{F})$ è un ultrafiltro in X_i. Siccome X_i è compatto $\mathcal{F}_i$ converge a $x_i \in X_i$. Sia $x = (x_i) \in X$ e vediamo che $\mathcal{F} \to x$. Sia V un intorno di x. Per come è fatta la topologia prodotto possiamo supporre che V sia della forma $\Pi_i U_i$ con U_i intorno di x_i, diverso da X_i solo per un numero finito di indici. Siano $i_1, \dots, i_n$ tali indici. Siccome $\mathcal{F}_{i_k} \to x_{i_k}$, esiste $A_{i_k} \in \mathcal{F}_{i_k}$ contenuto in U_{i_k}. Gli insiemi $\pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k})$ sono elementi di $\mathcal{F}$. Essendo in numero finito, la loro intersezione A è ancora un elemento di F. Siccome $A_{i_k} \subseteq U_{i_k}$, si ha $A \subseteq V$. Quindi $\mathcal{F} \to x$. □

B.6. Ultralimiti di successioni classiche

Concludiamo con un'altra, un po' bizzarra ma a volte comoda, generalizzazione del concetto di convergenza. Questa volta non tenteremo di generalizzare oltre il concetto di successione, anzi tratteremo successioni classiche. Metteremo mano invece al concetto di limite. Attraverso un ultrafiltro sugli indici, ci permetteremo di trattare ogni successione come una successione convergente. In un certo senso sarà l'ultrafiltro a scegliere il limite.

Definizione B.6.1. Un filtro su X si dice **principale** se esiste $x \in X$ tale che

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \ x \in A\}$$

Si noti che un filtro principale è un ultrafiltro. Infatti dato A non vuoto, o A o il suo complementare contengono x.

Esempio B.6.2. Sia X un insieme infinito. La famiglia degli insiemi cofiniti è un filtro su X che non è principale in quanto non è un ultrafiltro perché in X esistono sottoinsiemi infiniti col complementare infinito. (Si noti che se $X = \mathbb{R}$ questa è la topologia di Zariski.)

Lemma B.6.3. *Un ultrafiltro su X è principale se e solo se contiene un sottoinsieme finito di X. In particolare un ultrafiltro non principale contiene tutti i cofiniti.*

DIMOSTRAZIONE. Una implicazione è ovvia per definizione di filtro principale. Supponiamo che $\mathcal{F}$ sia un filtro su X e supponiamo che contenga un elemento A finito. Mostriamo per induzione sulla cardinalità di A che $\mathcal{F}$ è il filtro principale su uno degli elementi di A. Se A ha un solo elemento è la definizione di filtro principale. Altrimenti, sia $x \in A$. Per definizione di ultrafiltro si ha $\{x\} \in \mathcal{F}$ o $\{x\}^c \in F$. Nel primo caso abbiamo finito, nel secondo si è diminuita di uno la cardinalità di A.

Se $\mathcal{F}$ è non principale e A è cofinito allora $\mathcal{F}$ non contiene A^c per quanto appena visto e siccome è un ultrafiltro, allora contiene A. □

Corollario B.6.4. *Sia $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Se ogni intersezione finita di elementi di $\mathcal{F}$ è infinita, allora $\mathcal{F}$ è contenuta in un ultrafiltro non principale su X. In particolare gli ultrafiltri non principali esistono.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U}$ il filtro degli insiemi cofiniti e sia $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cup \mathcal{U}$. Consideriamo un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$. Quelli in $\mathcal{F}$ hanno intersezione infinita per ipotesi, quelli di $\mathcal{U}$ hanno intersezione cofinita e dunque l'intersezione di tutti è non vuota. Per il Corollario B.5.2, $\mathcal{B}$ è contenuto in un filtro, che per il Teorema B.5.5 è contenuto in un ultrafiltro $\mathcal{G}$. Siccome $\mathcal{G}$ contiene $\mathcal{U}$, allora non contiene nessun sottoinsieme finito di X. Per il Lemma B.6.3 $\mathcal{G}$ non è principale. □

Infelicemente, in letteratura, per gli ultrafiltri non principali su $\mathbb{N}$ si usa spesso il simbolo ω, lo stesso che si usa per il tipo d'ordine di $\mathbb{N}$. *Obtorto collo* ci adegueremo a questa usanza.

Definizione B.6.5 (ω-convergenza)**.** Sia ω un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Sia X uno spazio topologico e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X. Si dice che x_n **ω-converge** a x

$$x_n \xrightarrow{\omega} x$$

o che x è un'**ω-limite** di x_n se per ogni intorno U di x si ha

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in \omega.$$

Siccome ω è un ultrafiltro, se X è T_2 l'ω-limite è unico... Ma non dipende solo da (x_n).

Esempio B.6.6. Sia $x_n = (-1)^n$ la successione oscillante per antonomasia. Ebbene x_n ha un ω-limite. Infatti $\mathbb{N} = P \sqcup D$ è unione disgiunta dei pari e dispari. Siccome ω è un ultrafiltro su $\mathbb{N}$, esso contiene uno e uno solo tra D e P e la successione x_n è costante su entrambi. Quindi x_n ω-converge a 1 o a -1. Quale dei due? Dipende da ω.

Lemma B.6.7. *Se $x_n \to x$ nel senso usuale allora $x_n \xrightarrow{\omega} x$ per ogni ultrafiltro non principale ω.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni U intorno di X l'insieme $\{n : x_n \in U\}$ è cofinito e quindi sta in ω perché ω è non principale. □

Teorema B.6.8. *Sia ω un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Allora ogni successione classica in uno spazio compatto ha un ω-limite.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio topologico. Una successione in X non è altro che una funzione $f : \mathbb{N} \to X$. Quindi $f(\omega)$ è un ultrafiltro in X. Se X è compatto allora $f(\omega)$ converge per il Teorema B.5.8. Se $f(\omega) \to x$ allora per ogni intorno U di x esiste $A \subseteq U$ con $A \in f(\omega)$. Ne segue che $f^{-1}(A) \in \omega$ e siccome $f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(A)$ allora l'insieme $f^{-1}(U) = \{n \in \mathbb{N} :\ x_n \in U\} \in \omega$. Quindi $x_n \xrightarrow{\omega} x$. □

Esempio B.6.9. La successione $f(n) = \sin(n)$ ha un ω-limite in $[0, 1]$, che dipende da ω.

Esempio B.6.10. ω_1 (il primo ordinale non numerabile) non è compatto, ma è compatto per successioni. Quindi il viceversa del Teorema B.6.8 non è vero.

Un esempio di uso degli ω-limiti è la costruzione degli ultralimiti e dei coni asintotici. Fissiamo un ultrafiltro non principale ω su $\mathbb{N}$. Sia $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di spazi topologici e sia $o_n \in X_n$ un punto base scelto in ogni X_n. Sia $\widetilde{X}$ lo spazio delle successioni costruite prendendo un punto per ogni X_n

$$\widetilde{X} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ x_n \in X_n\}$$

(in altri termini $\widetilde{X} = \Pi_n X_n$). Lo spazio $\widetilde{X}$ ha un punto base o dato dalla successione dei punti base: $o = (o_n)$. Su $\widetilde{X}$ definiamo una candidata distanza d attraverso gli ω-limiti

$$d_\omega((x_n), (y_n)) = \omega\text{-}\lim d(x_n, y_n).$$

La funzione d_ω è ben definita da $\widetilde{X} \times \widetilde{X} \to [0, \infty]$.

Sia $\widetilde{X}_0$ l'insieme dei punti che hanno una distanza finita da $o = (o_n)$

$$\widetilde{X}_0 = \{x \in \widetilde{X} : \ d_\omega(x, o) < \infty\}.$$

Su $\widetilde{X}_0$ si pone la relazione d'equivalenza

$$x \sim y \iff d(x, y) = 0.$$

Il quoziente $\widehat{X} = \widetilde{X}_0/\sim$, dotato della distanza d_ω, si chiama **ultra-limite**, o ω-limite degli spazi metrici X_i.

Un caso particolare è quello del **cono asintotico** di uno spazio metrico fissato X. In questo caso l'operazione che andiamo a fare è una formalizzazione dello *zoom-out*.

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $o \in X$ un punto base. Sia $\lambda_i \to \infty$ una successione di numeri positivi, che utilizziamo come fattore di riscalamento ponendo

$$d_i(x, y) = \frac{d(x, y)}{\lambda_i}.$$

Lo spazio metrico $X_i = (X, d_i)$ non è altro che un riscalamento di X per un fattore λ_i. Il punto base rimane lo stesso. Il **cono asintotico** di X relativo alla scelta di ω, o, λ_i è l'ultra-limite degli spazi X_i.

Esempio B.6.11. Il cono asintotico di un compatto è un punto.

Esempio B.6.12. Il cono asintotico di $\mathbb{Z}$ è $\mathbb{R}$ (intuitivamente perché allontanandoci sempre più da $\mathbb{N}$ vedremo i suoi punti avvicinarsi sempre di più.)

DIMOSTRAZIONE. Sia $\lambda_i \to \infty$ una qualsiasi scelta dei fattori di scala. Scegliamo $o = 0$ come punto base. Sia $C(\mathbb{Z})$ il cono asintotico di $\mathbb{Z}$. Per ogni $x = [(x_i)] \neq 0$ il segno di x è definito come ± 1 a seconda che l'insieme degli indici tali che $x_i \leqslant 0$ stia o meno in ω. Si verifica che il segno è ben definito sulla classe di equivalenza. Definiamo

$$f(x) = \text{segno}(x) d_\omega(0, x).$$

Essa è una ben definita funzione $C(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$, che si verifica essere un'immersione isometrica. Inoltre f è suriettiva perché per ogni $r \in \mathbb{R}$, prendendo x_n uguale alla parte intera di $\lambda_n r$ si ha che $d_\omega([(x_n)], 0) = r$.

□

B.7. Esercizi

Esercizio B.7.1. Dimostrare che *non definitivamente* P equivale a *frequentemente non* P e viceversa.

Esercizio B.7.2. Dimostrare che un sottoinsieme di uno spazio topologico è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le sue successioni generalizzate.

Esercizio B.7.3. Dare un esempio di spazio topologico (X, τ) che contenga un sottoinsieme A che non sia chiuso ma tale che A contenga tutti i limiti di $\mathbb{N}$-successioni in A.

Esercizio B.7.4. Dimostrare che lo spazio X ottenuto da $\mathbb{R}$ quozientando tutto $\mathbb{Z}$ a un sol punto (Esempio 2.2.11) non è compatto esibendo una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X che non ha sottosuccessioni generalizzate convergenti.

Esercizio B.7.5. Sia $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione di funzioni in $[0, 1]^{[0,1]}$ data dalla rappresentazione binaria, cioè $e_n(x) = 1, 0$ a seconda che 2^{-n} compaia o meno nell'espressione binaria di x. Nell'Esempio 3.4.2 si è visto che $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni classiche convergenti: esibire una sottosuccessione generalizzata convergente a zero.

Esercizio B.7.6. Tradurre le condizioni di essere una funzione aperta/chiusa in termini di convergenza di successioni generalizzate.

Esercizio B.7.7. Dimostrare che se α è numerabile e $(x_i)_{i\in\alpha}$ è una α-successione in $\omega_1+\omega_1$ che tende a ω_1, allora $x_i=\omega_1$ definitivamente in α.

Esercizio B.7.8. Dimostrare che se X è un insieme totalmente ordinato, allora

$$\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(X))=\mathrm{cof}(X)$$

Esercizio B.7.9. Dimostrare che un ordinale ha cofinalità 1 se e solo se è un successore, se e solo se ha un massimo.

Esercizio B.7.10. Sia (X,τ) uno spazio topologico, sia $x\in X$ e $\mathcal{F}(x)$ il filtro degli intorni di x. Si dimostri che se $\{x\}$ è aperto in X allora $\mathrm{cof}(\mathcal{F}(x))=1$.

Esercizio B.7.11. Dimostrare che negli spazi T_2 il limite di filtri è unico.

Esercizio B.7.12. Dimostrare che una successione (generalizzata) converge se e solo se converge il filtro delle sue code.

Esercizio B.7.13. Sia X un insieme e sia $A\subseteq X$ non vuoto. Dimostrare che $\mathcal{F}=\{B\in\mathcal{P}(X):\ A\subseteq B\}$ è un filtro. Dimostrare che se A ha almeno due elementi allora $\mathcal{F}$ non è un ultrafiltro.

Esercizio B.7.14. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su X tale che esista $x\in X$ tale che $x=\cap_{A\in\mathcal{F}}A$. Dimostrare che se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro allora $\{x\}\in\mathcal{F}$. Se ne deduca che $\mathcal{F}$ è principale.

Esercizio B.7.15. Sia X uno spazio topologico e sia $x\in X$. Dimostrare che il filtro degli intorni di x è un ultrafiltro se e solo se x è un punto isolato di X (cioè $\{x\}$ è aperto).

Esercizio B.7.16. Dimostrare che non esistono ultrafiltri su $\mathbb{N}$ numerabili.

Esercizio B.7.17. Dimostrare che ogni cono asintotico di $\mathbb{Q}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Esercizio B.7.18. Dimostrare che ogni cono asintotico di $\mathbb{R}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Esercizio B.7.19. Dimostrare che ogni cono asintotico di $\mathbb{Z}^2$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Esercizio B.7.20. Sia $X=\{(x-1)^2+y^2=1\}\cup\{(x+1)^2+y^2=1\}$. Sia $Y=\{x^2+y^2\leq 1\}\cup X$. Siano $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ i rivestimenti universali. Dimostrare che i coni asintotici di $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ coincidono.