ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

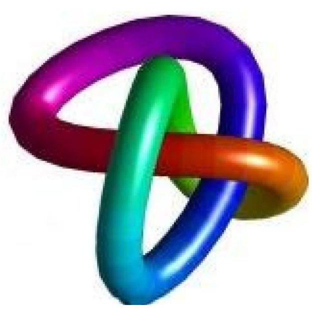
FACOLTÀ DI SCIENZE DELLA FORMAZIONE

C.d.L. "Scienze della Formazione Primaria"

Corso Integrato di Geometria e Algebra

Modulo di GEOMETRIA

A. Gimigliano, A.A. 2009/10



Note supplementari per il corso

INDICE

0. INTRODUZIONE

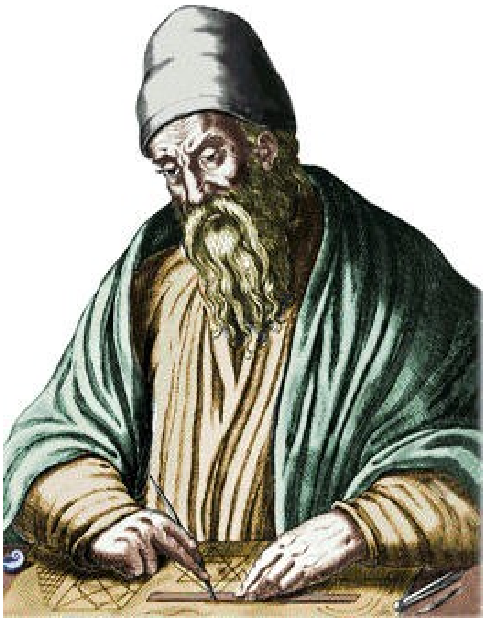
Queste brevi note si integrano con il testo del corso [**Id**] , di cui sono un complemento. Gli studenti devono quindi fare riferimento a quel testo per tutte le nozioni di base; quelle che si trovano qui, e che integrano quanto presente in quel testo, seguono parti del corso presentate a lezione.

[**Id**] : Monica Idà. ***Note di Geometria*** (per Scienze della Formazione Primaria). Pitagora Editrice, Bologna (2001).

1. LA GEOMETRIA EUCLIDEA

DEGLI ELEMENTI
D'EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza
dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE
LA DOTTRINA D'ARCHIMEDE
Sopra il Cono, il Cilindro e la Sfera;
E LA RECENTE SCOPERTA
Della trisezione dell' Angolo e della duplicazione del
Cubo *per mezzo della riga e del compasso.*
VENEZIA M.DCC.XCIII.
PRESSO ANTONIO ZATTA E FIGLI.
Con licenza de' Superiori e Privilegio.

Una edizione degli Elementi.



Euclide

Gli elementi fondamentali della geometria euclidea sono il *punto*, la *retta,* ed il *piano*. Sebbene nel testo di Euclide si diano delle definizioni di questi enti, il punto di vista moderno sulla geometria euclidea è quello di porli come *termini non definiti*.

Si definiscono a partire da essi altre nozioni, quali ad esempio:

- Ogni punto P su una retta la divide in due parti, ciascuna delle quali si dice *semiretta*: P si dice *origine* o *estremo* delle due semirette.
- La parte di retta delimitata da due punti è detta *segmento*.
- Due rette nello spazio si dicono *complanari* quando giacciono sullo stesso piano e *sghembe* se non c'è un piano che le contiene.

Di seguito si riportano i cinque postulati di Euclide:

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.

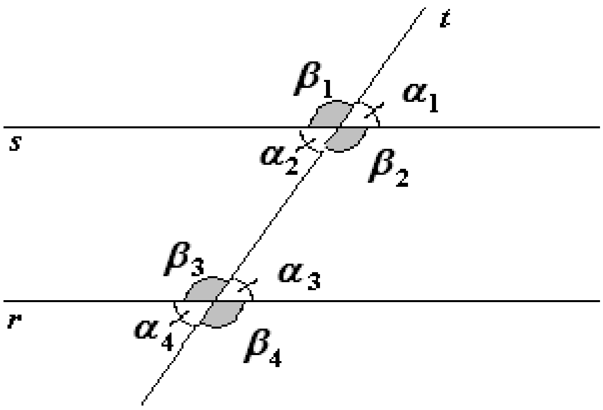
2. Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente.
3. Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali.
5. Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due retti.

Dagli assiomi si possono dedurre delle relazioni di incidenza fra punti, rette e piani. Ad esempio:

- Per un punto passano infinite rette
- Per due punti distinti passa una ed una sola retta
- Data una retta nel piano ed un punto fuori da essa, per esso passa una ed una sola parallela alla retta data. (Questa affermazione è equivalente al postulato n.5 di Euclide).
- Per una retta nello spazio passano infiniti piani
- Per tre punti non allineati nello spazio passa un solo piano

2. GEOMETRIA EUCLIDEA PIANA

2.1 Rette parallele tagliate da una trasversale e angoli da loro formati.



Date due rette parallele *r, s* nel piano, tagliate da un'altra retta trasversale *t*, si formano otto angoli (quattro fra *r* e *t* e quattro fra *s* e *t*), come in figura. Fra questi angoli si hanno le seguenti relazioni:

$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$, $\beta_3 = \beta_4$, perché angoli opposti al vertice.

α_2 e β_3 , α_3 e β_2 sono supplementari per il V postulato di Euclide (infatti le rette *r,s* non si incontrano né da un lato né dall'altro, quindi né $\alpha_2 + \beta_3$ né $\alpha_3 + \beta_2$ possono essere minori di 180°, quindi avremo $\alpha_2 + \beta_3 = \alpha_3 + \beta_2 = 180°$).

$\alpha_2 = \alpha_3$; perché entrambi supplementari a β_3 ;

$\beta_2 = \beta_3$; perché entrambi supplementari a α_3 ;

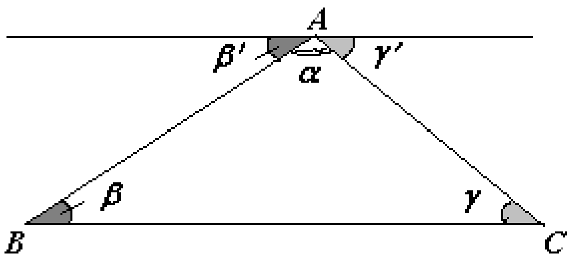
2.2 Poligoni.

Vedi [Id] per definizioni. Da notare che per un errore l'enunciato sui poligoni regolari di pag.14 in [Id]va così modificato:

Per ogni numero intero positivo $n \geq 3$ *, esiste un poligono regolare di n lati*

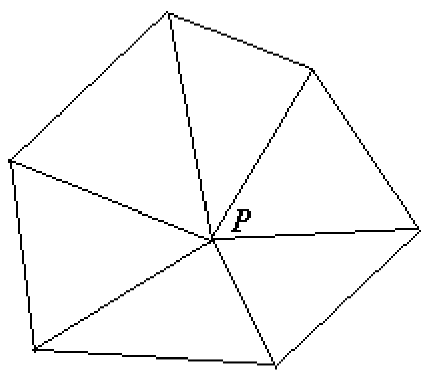
Per lo studio degli angoli interni dei poligoni un metodo alternativo a quanto visto in [Id] è il seguente.

Per i triangoli, vediamo che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180° (un angolo piatto. Consideriamo un triangolo *ABC* e tracciamo la parallela al lato *BC* passante per *A*:



Si ha che gli angoli γ, γ' e β, β' sono congruenti in quanto alterni interni fra due rette parallele tagliate dalle rette trasversali *AC* e *AB*. Poiché la somma degli angoli β', α, γ' è pari ad un angolo piatto (180°), anche la somma di β, α, γ lo è.

Dato ora un poligono qualsiasi, prendiamo un suo punto interno P e uniamolo con tutti i vertici del poligono, che verrà così suddiviso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati.



Avremo così che la somma degli angoli interni di tutti i triangoli in figura è pari a tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono. Così facendo abbiamo considerato anche tutti gli angoli con vertice in *P*, che formano un angolo giro. Se vogliamo solo la somma degli angoli interni del poligono, dovremo sommare tutti quelli dei triangoli, meno quelli in *P*, e cioè meno un angolo giro (= 2 angoli piatti). Otteniamo così la formula desiderata:

La somma degli angoli interni di un poligono è pari a

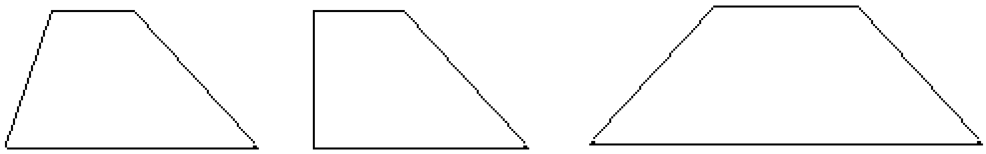
tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due.

Quindi se il poligono ha *n* lati, la formula si può scrivere come: $(n - 2).180°$.

2.3 Quadrilateri notevoli.

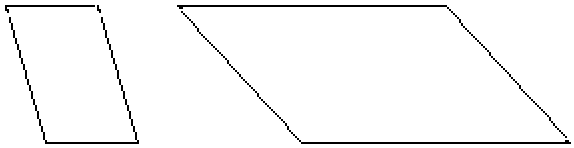
Abbiamo visto vari tipi di quadrilateri (vedi [Id]); diamo un cenno alle loro proprietà principali:

<u>- Trapezio</u>: ***E' un quadrilatero che ha (almeno) due lati paralleli:*** Ad esempio:



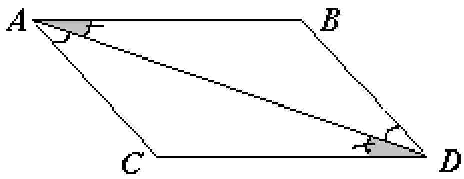
Trapezio Scaleno Trapezio rettangolo Trapezio isoscele

<u>- Parallelogramma</u>: ***E' un quadrilatero con due coppie di lati paralleli.***



Esempi di parallelogrammi

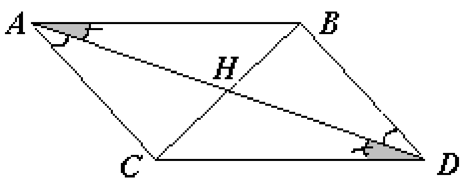
In un parallelogramma i lati opposti e gli angoli opposti sono congruenti:



Infatti, tracciando la diagonale *AD*, si vede che i triangoli *ABD* e *ACD* hanno il lato *AD* in comune, e gli angoli *CAD* e *BDA* , *BAD* e *ADC* congruenti in quanto alterni interni fra due rette parallele tagliate dalla trasversale *AD*. Quindi i triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli e quindi si ha:

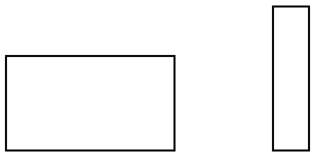
$$AC = BD \ , \ CD = AB \text{ e } \quad A\hat{C}D = A\hat{B}D \ .$$

In un parallelogramma le diagonali si dividono a metà:



Per esercizio, dimostrare l'enunciato sulle diagonali provando che i triangoli *AHB* e *CHD* sono congruenti (utilizzando anche la proprietà vista sopra sui lati opposti).

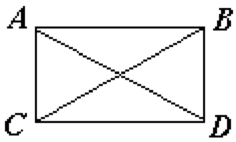
- <u>Rettangoli:</u> ***Un rettangolo è un quadrilatero con quattro angoli retti.***



Esempi di rettangoli

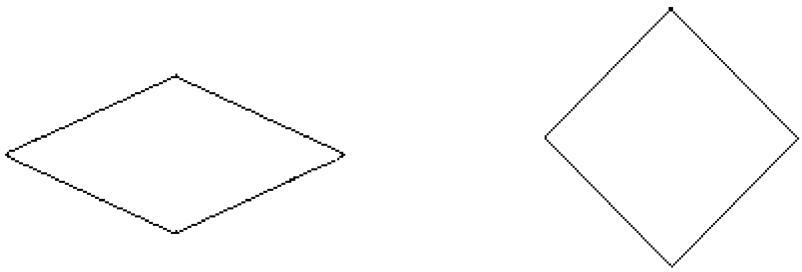
Un rettangolo è un particolare parallelogramma, infatti avere i quattro angoli retti implica (per il V postulato) che i lati sono a due a due paralleli. Quindi i rettangoli hanno le proprietà già viste per i parallelogrammi, ed in più:

In un rettangolo, le due diagonali sono congruenti.



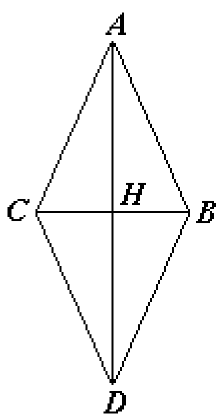
Infatti basta mostrare che i triangoli ACD e CBD sono congruenti. Si ha $AC = BD$ per le proprietà dei parallelogrammi, CD è in comune e gli angoli retti sono congruenti, quindi si conclude per il I criterio di congruenza dei triangoli. Infatti in particolare averemo $AD = CB$.

- <u>Rombi</u>: ***Un rombo è un quadrilatero avente i quattro lati uguali.***



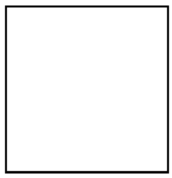
Esempi di rombi

In un rombo le diagonali sono perpendicolari.



Esercizio: Dimostrare la proprietà precedente. *Suggerimento*: dimostrare che i quattro triangoli in cui è diviso il rombo sono congruenti. Di conseguenza i quattro angoli in *H* sono uguali e quindi retti.

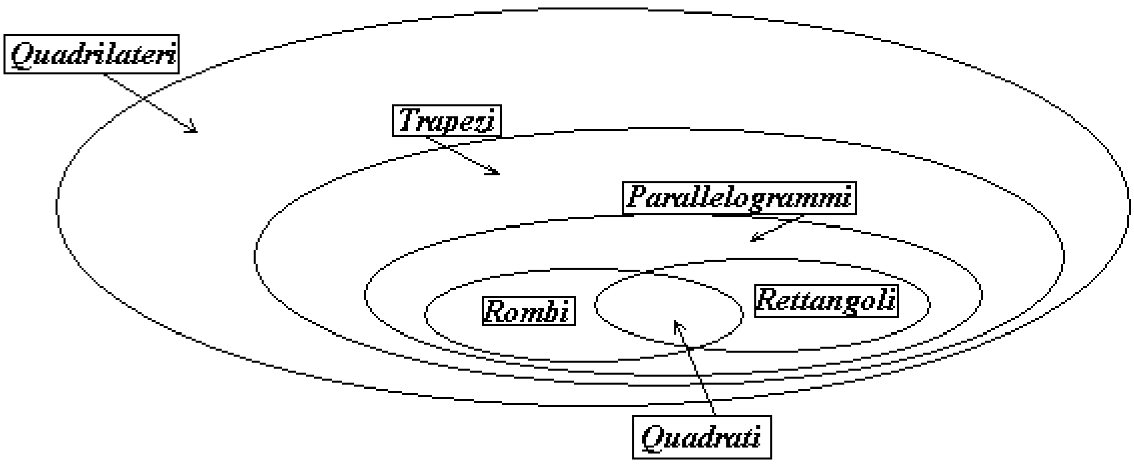
<u>- Quadrati:</u> Un quadrato è un quadrilatero con quattro lati e quattro angoli uguali.



Per i quadrati, avendo sia gli angoli retti che i quattro lati uguali, valgono sia le proprietà dei rombi che quelle dei rettangoli.

<u>Osservazione:</u> Un quadrato è sia un (particolare) rombo che un (particolare) rettangolo. Allo stesso modo sia un rombo che un rettangolo sono dei particolari parallelogrammi, e si ha anche che ogni parallelogramma è un particolare trapezio.

La seguente figura mostra come gli insiemi dei quadrilateri appena visti sopra sono correlati fra di loro:

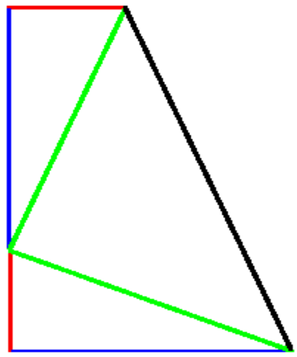


2.4 Teorema di Pitagora:

Un'altra dimostrazione geometrica del Teorema di Pitagora (oltre a quella presente in [Id]) che è particolare in quanto nella costruzione non compare alcun quadrato, fu trovata nel 1876 da Garfield, che in seguito divenne il ventesimo Presidente degli USA. Garfield commentò così il suo risultato: *"Questo è qualcosa su cui i due rami del parlamento potranno essere d'accordo"*.

La dimostrazione è la seguente:

> Consideriamo una copia del triangolo rettangolo in questione, ruotata di 90 gradi in modo da allineare i due cateti differenti. Si uniscono poi gli estremi delle ipotenuse, e si ottiene un trapezio. Uguagliamo l'area del trapezio alla somma di quelle dei tre triangoli retti che lo formano:



Detto **a** il cateto rosso, **b** il blu e **c** l'ipotenusa (verde), calcolando l'area del trapezio avremo:

$$\frac{(Base\,magg.+base\,min.)\,h}{2}=\frac{(a+b)(a+b)}{2}=\frac{a^2+b^2+2ab}{2} \quad ;$$

mentre se calcoliamo l'area del trapezio come somma delle aree dei tre triangoli si ha:

$$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{2ab+c^2}{2} \quad .$$

Uguagliando le sue espressioni si ottiene:

$$\frac{2\text{ab}+a^2+b^2}{2}=\frac{2ab+c^2}{2} \quad , \text{ da cui: } \quad a^2+c^2=c^2 \quad .$$

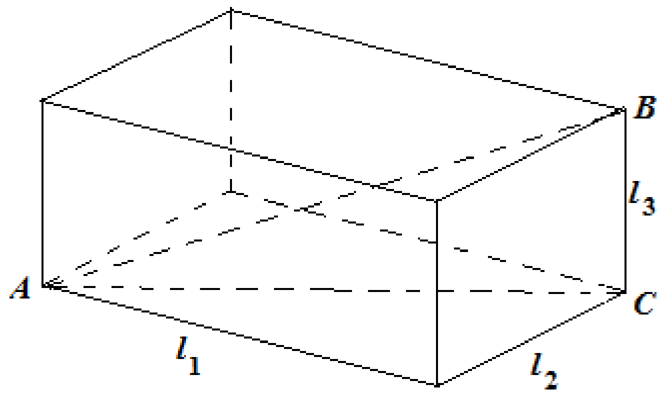
e il teorema è dimostrato.

3. GEOMETRIA EUCLIDEA SOLIDA

Diamo qui solo qualche complemento a quanto si trova su [Id] su due argomenti specifici.

3.1 La diagonale di un parallelepipedo.

Consideriamo un parallelepipedo di lati l_1 , l_2 , l_3 ; vogliamo determinare la lunghezza della sua diagonale:



Per prima cosa, calcoliamo la lunghezza della diagonale di una base, il segmento AC in figura. Per fare ciò utilizzeremo il teorema di Pitagora sul triangolo di lati l_1 , l_2 , AC , ottenendo così:

$$\overline{AC} = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \ ;$$

Consideriamo poi il triangolo rettangolo ABC, la cui ipotenusa AB è la diagonale di cui vogliamo calcolare la lunghezza; applicando ancora il Teorema di Pitagora, otterremo:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + l_3^2} = \sqrt{\left(\sqrt{l_1^2 + l_2^2}\right)^2 + l_3^2} = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$$

Che ci dà la lunghezza desiderata. Notiamo che in particolare, se il parallelepipedo in questione è un cubo di lato l, la formula diviene:

$$diagonale = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2} = \sqrt{3\,l^2} = l\sqrt{3} \ .$$

3.2 La sfera.

Nel caso di una sfera S di raggio r , determinare il suo volume V_S e la sua area totale A_S richiede strumenti di matematica più avanzati di quanto siano gli scopi di questo corso; ne riportiamo comunque le formule che sono le seguenti:

$$V_S = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad ; \quad A_S = 4\pi r^2 \quad .$$

Notiamo che la sfera è la figura tridimensionale con il minimo rapporto fra superficie e volume, cioè ogni altro solido, a parità di volume, ha una superficie maggiore. Questo spiega perché molti oggetti fisici tendono ad assumere tale forma, dalle gocce di liquido ai corpi celesti. Ad esempio, le bolle di sapone sono sferiche perché la loro tensione superficiale tende a minimizzarne l'area (a parità di volume).

4. GEOMETRIA ANALITICA

4.1 Geometria Analitica nel piano.

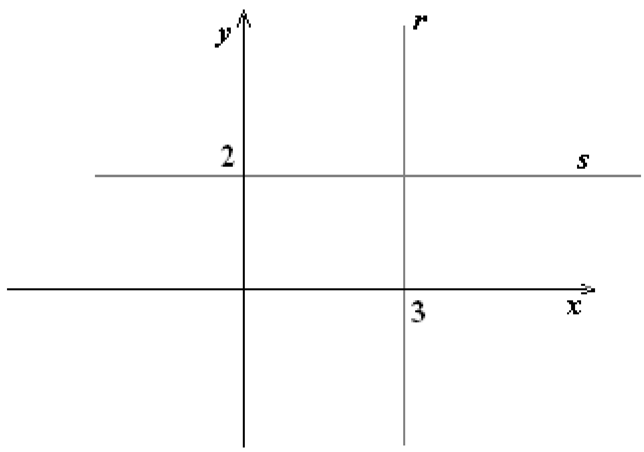
Equazioni di rette:

Il problema di cui ci occupiamo adesso è di come si possano individuare i punti di una retta sul piano tramite una equazione nelle variabili x,y che rappresentano le coordinate cartesiane sul piano stesso.

Rette parallele agli assi:

Se consideriamo rette parallele all'asse delle y (come la retta r in figura), è facile notare che tutti i punti sulla retta hanno la stessa coordinata x . Sulla retta r in figura tutti i punti avranno la x pari a 3; saranno su r, ad esempio, i punti: (3;1) , (3;3), (3;15), (3,-12).

Avremo così che tale retta sarà individuata dalla semplice equazione: $x = 3$; cioè tutti i punti della retta r hanno coordinate che soddisfano tale equazione (che in questo caso riguarda solo la x). Possiamo anche dire che un punto del piano $P = (x;y)$ sta sulla retta r se e solo se le sue coordinate soddisfano all'equazione: $x = 3$.



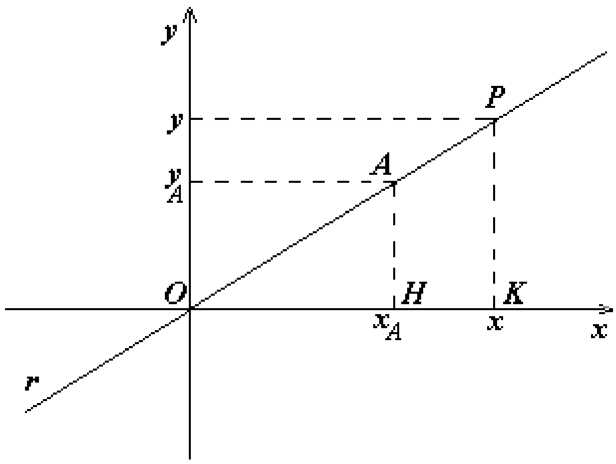
Se consideriamo invece delle rette parallele all'asse x , come la retta s nella figura sopra, avremo invece che tutti i loro punti hanno la stessa coordinata y, nell'esempio avranno la y pari a 2. Quindi possiamo dire che la retta s è rappresentata dall'equazione $y = 2$.

La cosa vista su questi esempi si ripete per qualsiasi retta parallela ad uno dei due assi; avremo che le rette parallele all'asse y hanno tutte equazione $x = k$ e quelle parallele all'asse x hanno equazione del tipo $y = k$; ove k è una qualsiasi costante.

Notiamo che, in particolare, l'asse y ha equazione $x = 0$ e l'asse x ha equazione $y = 0$.

Rette passanti per l'origine degli assi:

Consideriamo una retta r che passi per l'origine O degli assi, come in figura:



La retta r sarà assegnata fissato un qualsiasi punto $A = (x_A;y_A)$ su di essa (i punti A ed O individuano la retta).

Il nostro problema è: "dato un qualsiasi punto P di coordinate $(x;y)$, determinare delle condizioni su $(x;y)$ che implichino che P sta sulla retta r".

Siano H e K le proiezioni di A e P sull'asse x. Osserviamo i triangoli AOH e APK; essi sono rettangoli (in H e K) ed hanno l'angolo in O in comune; quindi hanno i tre angoli congruenti e per questa ragione sono ***simili***. Allora i lati dei due triangoli sono proporzionali e in particolare avremo:

$$\overline{OK} : \overline{OH} = \overline{PK} : \overline{AH} \quad \text{e cioè:} \quad x : x_A = y : y_A \text{, o :} \quad y\, x_A = x y_A$$

Questa è l'equazione che i punti della retta devono soddisfare; inoltre, se x_A non è nullo (e cioè se la retta non è l'asse y stessa), possiamo scriverla anche:

$$y = \frac{y_A}{x_A} x \quad .$$

Esempio: Qual è l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto A di coordinate (2;3)?

Dal procedimento visto prima si ha che l'equazione cercata è: $y = \frac{3}{2} x$.

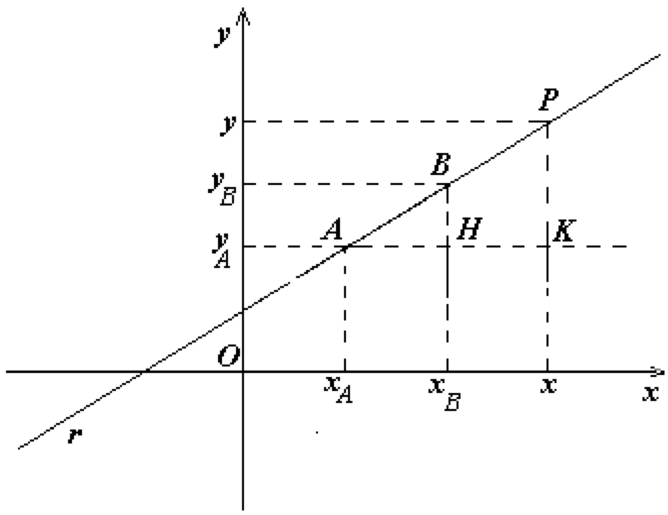
Da questo procedimento si vede che per ogni retta passante per l'origine (con l'eccezione dell'asse y che ha equazione $x = 0$) è rappresentata da un'equazione del tipo: $y = mx$, ove $m = \frac{y_A}{x_A}$; viceversa, data un'equazione $y = mx$, essa rappresenta una retta passante per l'origine (individuata, ad esempio, dal punto $A = (1;m)$),

Il numero m , rappresentando il rapporto fra i lati AH ed OH, ci dà una misura dell'inclinazione della retta (è associato all'ampiezza dell'angolo AOH); maggiore sarà il valore assoluto di m e più la retta sarà in posizione vicina alla verticale, mentre più m si avvicina a 0, più la retta diviene vicina alla posizione orizzontale (e per m=0 la retta è orizzontale, coincidendo con l'asse x).

Inoltre il segno di m ci dice da che parte è inclinata la retta ("/ " per $m > 0$; "\ " per $m < 0$).

Equazione generale della retta:

Consideriamo adesso il caso più generale di una retta r qualsiasi del piano, individuata da due punti A,B : escluderemo solo il caso che r sia parallela ad un'asse delle coordinate, in quanto abbiamo già analizzato quell'evenienza.



Anche adesso, vogliamo vedere quali siano le condizioni sulle coordinate $(x;y)$ di un punto P, affinché P stia sulla retta r.

Procediamo in modo analogo a prima; consideriamo le proiezioni di A, B e P sugli assi e poi i triangoli ABH e APK che si vengono a formare. Di nuovo i due triangoli saranno simili avendo i tre angoli uguali, e quindi i loro lati sono in proporzione. Si ha:

$$\overline{AK} : \overline{AH} = \overline{PK} : \overline{BH} \quad \text{e cioé:} \quad (x - x_A) : (x_B - x_A) = (y - y_A) : (y_B - y_A) \; .$$

Quindi l'equazione che determina la retta r è:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad ;$$

Esempio: Qual è l'equazione della retta passante per i punti $A = (2;3)$ e $B = (4;5)$?

Dal procedimento visto sopra si ha che la retta cercata sarà: $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-3}{5-3}$, e cioè

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2}$, che dà: $x-2 = y-3$, e quindi $x - y + 1 = 0$.

Sviluppando l'equazione vista sopra si può ottenere $(x-x_A)(y_B-y_A) = (y-y_A)(x_B-x_A)$, e poi:

$$(y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y+(x_B-x_A)y_A-(y_B-y_A)x_A = 0 \quad .$$

Ci si riduce quindi, ponendo:

$$(y_B-y_A) = a \ ; \ -(x_B-x_A) = b \ ; \ (x_B-x_A)y_A-(y_B-y_A)x_A = c \quad ,$$

ad un'equazione del tipo:

$$\underline{ax+by+c = 0 \ \ .}$$

Questa è chiamata ***equazione generale della retta***. Ogni retta è rappresentata da un'equazione di questo tipo; notiamo che si ottengono rette parallele all'asse y se $b = 0$, rette parallele all'asse x se $a = 0$, e rette per l'origine se $c = 0$.

In generale, si ha quindi che ogni retta del piano può essere rappresentata tramite una equazione del tipo $ax+by+c = 0$ e ogni equazione di questa forma rappresenta una retta. La corrispondenza fra rette ed equazioni non è però biunivoca: infatti consideriamo ad esempio le due equazioni:

$$3x + 2y - 4 = 0 \ \text{ e } \ 6x + 4y - 8 = 0 \ ;$$

le due equazioni non sono uguali, ma la seconda si ottiene moltiplicando tutti i termini della prima per 2, la potrei scrivere $2(3x + 2y - 4) = 0$; ciò ci dice che le due equazioni sono equivalenti, hanno le stesse soluzioni e quindi rappresentano la stessa retta.

In sintesi, due equazioni del tipo $ax+by+c = 0$ che abbiano i coefficienti a, b, c proporzionali rappresentano la stessa retta.

C'è un altro modo, molto usato, per scrivere l'equazione della retta; se si ha $b \neq 0$ (e quindi la retta non è verticale), si può riscrivere la forma $ax+by+c = 0$ ricavando la y e ottenendo:

$y = -\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, e cioè un'equazione della forma: $y = mx + q$.

Scritta in questa forma (detta anche ***forma implicita***), si ha (come nel caso delle rette per l'origine) che il numero $m = -\frac{a}{b}$ è indicativo perché rappresenta l'inclinazione della retta. Infatti, se torniamo alla forma della retta ricavata in precedenza:

$$(y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y+(x_B-x_A)y_A-(y_B-y_A)x_A = 0 \quad ,$$

notiamo che da essa si ricava:

$$y = \frac{(y_B-y_A)}{(x_B-x_A)}x-\frac{(x_B-x_A)y_A-(y_B-y_A)x_A}{(x_B-x_A)}=mx+q \quad ;$$

e quindi $m = \frac{(y_B-y_A)}{(x_B-x_A)}$ rappresenta il rapporto fra i cateti del triangolo ABH , risultando così ancora legato all'inclinazione della retta.

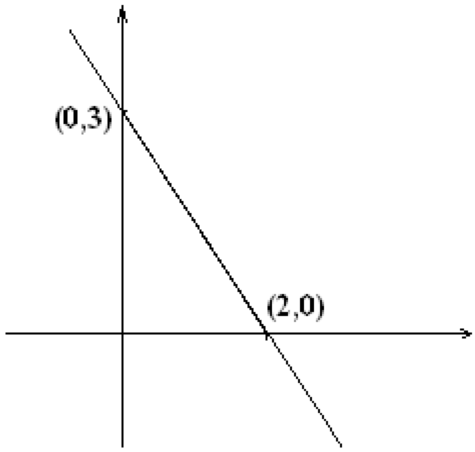
La quantità m è denominata ***coefficiente angolare*** della retta.

Dall'equazione $y = mx + q$ si può ricavare che r passa per il punto $(0;q)$, quindi il significato geometrico della costante q è che essa ci dà il valore della y all'incontro di r con l'asse y stessa.

Consideriamo ora il seguente problema: se di una retta si sa l'equazione, sia essa data nella forma $ax+by+c = 0$ che nella forma $y = mx + q$, come si fa a determinarne il grafico nel piano cartesiano?

Poiché per disegnare una retta ci servono due punti su di essa, dovremo usare l'equazione per trovare due tali punti.

Vediamolo su un esempio. Sia r la retta di equazione $3x+2y - 6 = 0$ (o $y = -\frac{3}{2}x+3$) ; per trovare un punto su r diamo ad x il valore 0; avremo allora $2y - 6 = 0$ e quindi $y=3$; ciò ci dice che il punto (0;3) sta sulla retta. Se invece diamo alla y il valore 0, otterremo $3x - 6 = 0$ e quindi $x=2$, quindi il punto (2;0) è anch'esso sulla retta. Quindi adesso possiamo tracciarla.



Il metodo quindi funziona così: si dà un valore a caso alla x e si ricava la y (o viceversa) per trovare un punto sulla retta. Una volta ricavati due punti, siamo in grado di disegnarla.

Rette parallele e punto d'incidenza fra due rette.

Poiché il coefficiente angolare m dà l'inclinazione di una retta (tranne che per le rette parallele all'asse y), avremo che rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare. Quindi un metodo per riconoscere se due rette siano parallele o meno è quello di riportare la loro equazione alla forma implicita $y = mx + q$, e controllare se i loro coefficienti angolari sono uguali o meno.

Esempio:

Date le rette di equazioni $6x+4y - 12 = 0$ e $9x+6y - 24 = 0$, dire se siano parallele o no.

Portiamo le due equazioni in forma implicita:

$4y = -6x+12$, da cui $y = -\frac{3}{2}x+3$: $6y = -9x+24$, da cui $y = -\frac{3}{2}x+4$.

Otteniamo che i due coefficienti angolari sono uguali (pari a $\frac{-3}{2}$), per cui le due rette sono parallele.

E' possibile verificare il parallelismo anche mantenendo le rette nella forma generale. Se abbiamo due rette di equazioni $ax+by+c = 0$ e $a'x+b'y+c' = 0$; poiché i loro coefficienti angolari sono $m = -\frac{a}{b}$ e $m' = -\frac{a'}{b'}$, si avrà che essi sono uguali se e solo se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, cioè se i coefficienti delle incognite sono proporzionali : $a : b = a' : b'$.

Se riprendiamo l'esempio visto in precedenza, si può osservare che le rette $6x+4y - 12 = 0$ e $9x+6y - 24 = 0$ verificano alla proporzionalità richiesta: $6 : 4 = 9 : 6$.

Osserviamo che se in due equazioni tutti i coefficienti sono in proporzione, come accade ad esempio se consideriamo: $6x+4y - 12 = 0$ e $9x+6y - 18 = 0$, allora le due equazioni rappresentano rette parallele coincidenti (cioè la stessa retta). Infatti in questo caso una equazione si ottiene moltiplicando l'altra per una costante (nell'esempio $\frac{3}{2}(6x+4y - 12) = 9x+6y - 18$), quindi le due equazioni hanno le stesse soluzioni.

In generale, si ha poi che se abbiamo due rette di equazioni $ax+by+c = 0$ e $a'x+b'y+c' = 0$, il loro punto d'incontro (se esiste) sarà dato dalla soluzione del sistema formato dalle due equazioni, poiché le sue coordinate devono soddisfare entrambe le equazioni.

Esempio:

Date le rette di equazioni $x+y - 2 = 0$ e $2x - 3y + 1 = 0$, trovarne (se esiste) il punto d'incontro.

Consideriamo il sistema: $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$ avremo:

$$\begin{cases} x=2-y \\ 2(2-y)-3y+1=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=2-y \\ 5-5y=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=2-y \\ y=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} .$$

Quindi il punto d'incontro delle due rette ha coordinate (1;1).

Rette perpendicolari

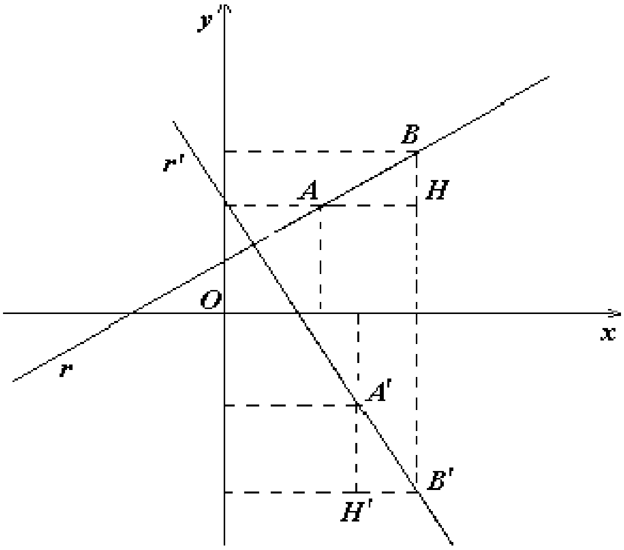
Osserviamo poi quale sia la relazione fra i coefficienti angolari di due rette perpendicolari.

Se le rette r ed r' sono perpendicolari (e nessuna delle due è orizzontale né verticale), i coefficienti angolari rispettivi, m ed m' , sono legati dalla relazione:

$$m' = -\frac{1}{m} .$$

Infatti, possiamo notare che m ed m' (che sicuramente devono avere segno opposto perché r ed r' hanno inclinazione opposta), mentre come valore assoluto essi devono essere l'uno il reciproco dell'altro in quanto sono dati dal rapporto fra i cateti dei triangoli ABH e $A'B'H'$ (vedi figura sotto). In dettaglio, si ha

$$m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} \quad , \text{ e } \quad m' = \frac{(y_{B'} - y_{A'})}{(x_{B'} - x_{A'})} = -\frac{(x_B - x_A)}{(y_B - y_A)} = -\frac{1}{m} \quad .$$



Rette per un punto dato.

Può tornare utile la seguente formula che, assegnato un punto $P = (x_P ; y_P)$ dà l'equazione delle rette per *P*, al variare del loro coefficiente angolare *m*:

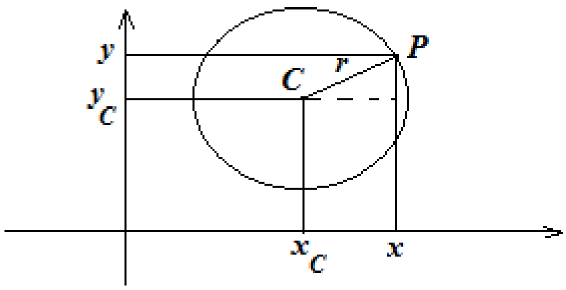
$$v - y_P = m(x - x_P) \quad .$$

Da notare che la retta verticale $x = x_P$ è l'unica retta per P non rappresentata da un'equazione come quella sopra.

Equazione generale della circonferenza:

Dalla formula per la distanza fra due punti: $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, si ricava l'equazione che caratterizza il luogo formato dai punti $P = (x , y)$ aventi distanza fissata r da un punto $C = (x_C , y_C)$ e cioè una circonferenza di centro *C* e raggio pari ad r :

$$r = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \quad .$$



Da qui, elevando al quadrato e svolgendo i conti, avremo:

$$x^2 + y^2 - 2 x_C x - 2 y_C y + x_C^2 + y_C^2 - r^2 = 0 \quad .$$

Quindi si ha che tutte le circonferenze hanno una equazione della forma:

$$x^2+y^2+a\,x+b\,y+c = 0 \quad ,$$

ove $\quad a = 2x_C \;;\; b = -2y_C \;; c = x_C^2+y_C^2-r^2$.

Ma, attenzione, se abbiamo una equazione del tipo $x^2+y^2+a\,x+b\,y+c = 0$, non è detto che essa rappresenti una circonferenza; infatti consideriamo ad esempio:

$$x^2+y^2+3\,x+4\,y+10 = 0$$

Se essa rappresentasse una circonferenza, dovremmo avere:

$$a = 3 = -2x_C \;;\; b = 4 = -2y_C \text{ ; e quindi : } \quad x_C = -\frac{3}{2} \;;\; y_C = -2 \quad .$$

Si avrebbe allora $\quad c = 10 = x_C^2+y_C^2-r^2 = \frac{9}{4}+4-r^2$, e quindi $\quad r^2 = \frac{9}{4}+4-10 = -\frac{15}{4}$

il che è impossibile perché r^2 non può essere un numero negativo. Quindi l'equazione non rappresenta una circonferenza (non rappresenta niente, non avendo soluzioni).

4.2 Geometria analitica nello spazio.

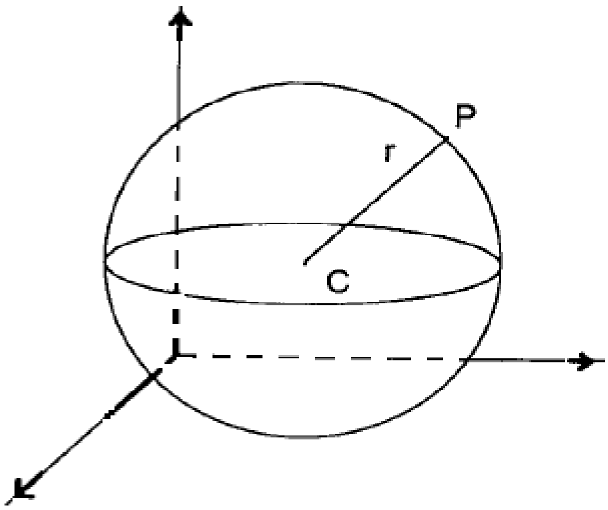
Ricordiamo da quanto visto in [Id] che la formula per la distanza fra due punti A , B nello spazio è data dalla formula: $\quad \overline{AB} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Da essa, analogamente a quanto fatto per la circonferenza, si ricava la formula per l'equazione che caratterizza una circonferenza di centro C e raggio r :

$$r = \sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2} \quad ,$$

che, elevando al quadrato e svolgendo i conti, dà:

$$x^2+y^2+z^2-2\,x_C\,x-2\,y_C\,y-2\,z_C\,z+x_C^2+y_C^2+z_C^2-r^2 = 0 \quad .$$



Ad esempio una sfera di centro l'origine $O = (0,0,0)$ e raggio $r = 3$, avrà equazione:

$$x^2+y^2+z^2 = 9 \quad .$$

Se invece cerchiamo l'equazione del piano che contiene l'asse delle x e quella delle y, possiamo notare che tutti i suoi punti hanno la coordinata z pari a 0, quindi l'equazione che lo caratterizza è proprio $z = 0$.

In generale si ha che ogni piano nello spazio è dato da un'equazione del tipo: $ax+by+cz = 0$, e viceversa, ogni equazione $ax+by+cz = 0$, ove a,b,c non siano tutti nulli, dà un piano, cioè i punti $P = (x,y,z)$, che la soddisfano formano un piano nello spazio (non dimostriamo questa cosa).

Notiamo che in generale nello spazio una equazione darà una superficie, mentre per ottenere una curva avremo bisogno di un sistema con due equazioni, ad esempio per avere una retta avremo bisogno di un sistema, come:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

così la retta risulta come intersezione fra i piani di equazioni $ax+by+cz = 0$ e $a'x+b'y+c'z = 0$.

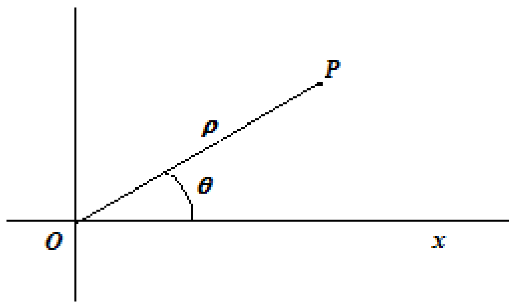
Una circonferenza nello spazio richiede anch'essa un sistema di due equazioni; ad esempio il sistema:

$$\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2 = 9 \\ z=0 \end{matrix}\right\}$$

rappresenta la circonferenza che è l'intersezione della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 9$ con il piano di equazione $z= 0$.

4.3 Coordinate polari e sferiche (cenni).

Un altro modo per rappresentare i punti del piano tramite coordinante è quello detto delle *coordinate polari*. In questo caso ogni punto non viene individuato dalle sue coordinate cartesiane x ed y, ma dalla lunghezza del segmento che lo unisce all'origine, e dall'angolo che tale segmento forma con l'asse x.

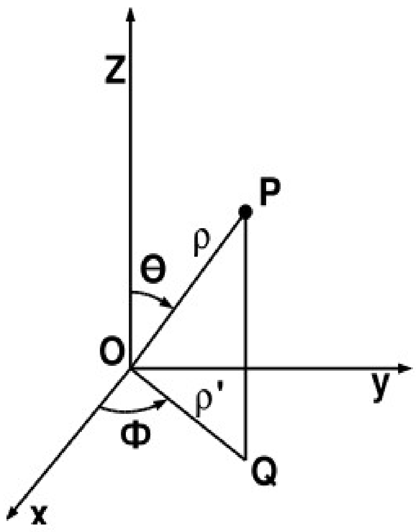


Quindi sono sempre due numeri ad individuare il punto P, ma è la coppia (ρ, θ) , data da due numeri (positivi) rappresentanti le misure del segmento OP (si usa la lettera greca *rho*) e dell'angolo POx (si usa la lettera greca *theta*).

In queste coordinate polari, una equazione come: $\rho = 3$, rappresenta una circonferenza (di centro l'origine e raggio 3), mentre una come $\theta = 60°$ rappresenta una semiretta (uscente dall'origine).

L'utilità di questo tipo di coordinate si ha ogni volta che si descrivono figure geometriche particolari, come spirali ad esempio, oppure, nelle applicazioni, per problemi di puntamento.

In analogia con le coordinate polari sul piano, nello spazio abbiamo le coordinate sferiche:



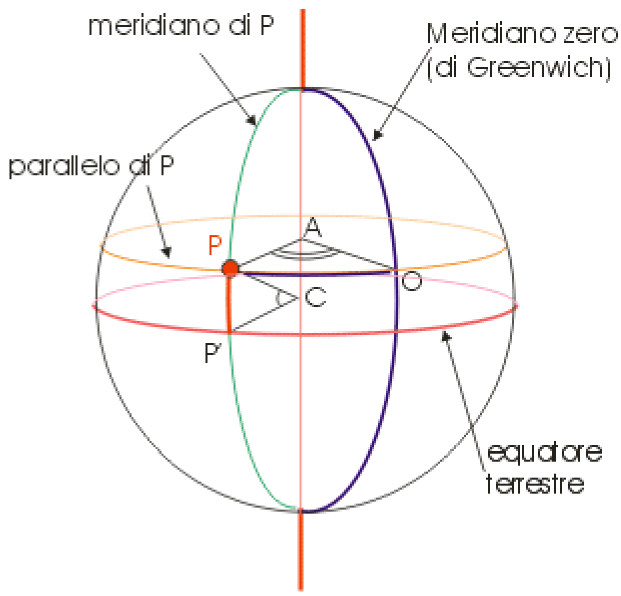
Servono a identificare un punto nello spazio, una volta fissata una terna di assi cartesiani (***x**, **y*** e *z*). Un punto ***P*** è individuato dalla terna ρ, θ e φ (*phi*) dove:

ρ è chiamato *raggio vettore* (distanza PO)

θ è chiamato *distanza zenitale* o *colatitudine* o anche *elevazione* (è l'angolo formato da *PO* con l'asse *z*, dove *O* è l'origine degli assi)

φ si chiama *azimut* o *longitudine* (angolo formato da *OH* con l'asse *x* dove *H* è la proiezione ortogonale del punto *P* sul piano *xy*)

Su questa base si definiscono le coordinate terrestri :



Nelle coordinate terrestri per individuare un punto *P* sulla superficie terrestre si usa la ***longitudine*** (l'angolo fra il meridiano di *P* e quello di riferimento di Greenwich) e la latudine angolo formato da P, il centro della terra C e la proiezione P' di P sull'equatore (ρ è fissato dal raggio della terra).

Metodi analoghi si usano per sistemi di coordinate astronomiche, usate per individuare le posizioni degli astri sulla volta celeste.