Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà? (*) (**)

Nicolina A. MALARA, Dipartimento di Matematica, Università di Modena

Premessa

In Italia prima dell'entrata in vigore dei nuovi programmi della scuola media, era tradizione iniziare l'insegnamento dell'algebra in terza media, dando largo spazio agli aspetti formali ed alla manipolazione di espressioni simboliche. Per molti allievi questo comportava una perdita di controllo del significato delle cose in studio e una caduta progressiva di interesse fino al totale allontanamento dalla matematica.
Con i programmi del '79 si è cercato di porre rimedio a questa situazione, tecnicismi e regole mnemoniche sono stati ufficialmente messi al bando e si è favorito viceversa un'approccio all'algebra intesa da un lato come linguaggio per la matematizzazione ("lettura, scrittura, uso e trasformazioni di semplici formule" nel contesto dei problemi , "studio di leggi matematiche ricavate anche dal mondo fisico, economico, ecc. ...") e dall'altro come studio di relazioni ed analogie tra oggetti matematici.
Tuttavia la carenza di una formazione specifica per l'insegnamento matematico-scientifico in tale fascia scolare (contrariamente a quanto all'epoca si prospettava), la mancanza di riferimenti culturali per l'insegnante (al di là del libro di testo) per lo sviluppo dei vari percorsi didattici, la ricchezza dei temi da trattare e una certa libertà nell'enfasi da dare a ciascuno di essi, ha portato ad una situazione variegata circa le conoscenze degli allievi all'uscita della scuola media ed in particolare per l'algebra. Paradossalmente oggi ci si ritrova di fronte ad una situazione ancora più difficile che nel passato, perché il problema dell'impatto con l'algebra si rivela drammaticamente all'ingresso della scuola media superiore, e viene ad aggravare il più generale problema del passaggio tra i due ordini scolastici.

Il dilemma processo-oggetto

Quanto sin qui descritto può definirsi come la situazione al contorno, certamente non ideale, di un problema di insegnamento che presenta di per sé difficoltà e ostacoli di tipo epistemologico.
Il percorso storico dell'algebra è caratterizzato da importanti momenti di passaggio segnati dalla maturazione, per effetto di lenti processi, di astrazioni che potremmo definire rivoluzionarie poiché determinano un salto rispetto alle concezioni precedenti (si pensi ad esempio al momento in cui, con Viète, si passa dall'operare sulle singole *cose* all'operare sulle *specie di cose* o alla nascita dell'algebra astratta in cui, prescindendo dalla tipologia degli enti su cui si opera si volge l'attenzione sulle leggi che ne governano le relazioni e si caratterizzano le strutture).
Molti studiosi (si veda ad esempio Harper, 1987 o Sfard 1992) sostengono che nell'apprendimento dell'algebra l'allievo si trovi a ripercorrere il processo storico e che pertanto si imbatta in ostacoli e difficoltà testimoniate dalla storia dello sviluppo del pensiero algebrico.

(* Lavoro eseguito nell'ambito del MURST e del CNR (contratto n. 94.00112.CT01)

(**) Testo della conferenza tenuta al Convegno Nazionale "*Dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica*" Castel S. Pietro (BO) nov. 1994

Come sottolineato da A. Sfard (1991), la costruzione dei concetti algebrici si sviluppa per successivi livelli di astrazione ma prevalentemente attraverso processi computazionali, pertanto ogni oggetto matematico viene a riassumemere in sé due aspetti complementari, quello di *processo* e quello di *oggetto,* come due facce di una stessa moneta. Nel primo aspetto prevale il punto di vista operazionale che è dinamico e sequenziale, nel secondo l'oggetto è visto come entità statica e fuori dal tempo e si considera da un punto di vista strutturale (si pensi ad esempio alla equazione vista come procedimento di codifica delle relazioni espresse da un problema ed alla equazione vista come oggetto di studio in sé). Lo sviluppo del pensiero algebrico, e più in generale della matematica, è caratterizzato da questo passaggio dal procedurale allo strutturale che è contraddistinto da tre momenti fondamentali: la fase di *interiorizzazione* (si opera su oggetti matematici già familiari); la fase di *condensazione* (le operazioni e i processi si vanno sintetizzando in unità più maneggevoli); la fase di *reificazione* (vi è l'improvvisa abilità di vedere qualcosa di familiare in una nuova luce, come un tutt'uno). Per un esempio elementare si pensi al passaggio dalla frazione come operatore su grandezze al concetto di numero razionale come classe di frazioni equivalenti (elemento del campo dei quozienti dell'anello degli interi).
L'apprendimento dell'algebra, a nostro avviso, richiede nell'allievo il passaggio consapevole dal procedurale allo strutturale ma purtroppo tale passaggio è spesso ignorato nell'insegnamento perchè di fatto ignorato nei libri di testo su cui generalmente l'insegnamento si basa. Ad esempio le espressioni algebriche vengono trattate come generalizzazioni di espressioni aritmetiche e si opera su esse senza mettere in luce le diversità nelle due situazioni, i polinomi vengono introdotti facendo ricorso a variabili nel campo dei coefficienti ed evitando il concetto di indeterminata. Un esempio che evidenzia bene, da un punto di vista didattico, i limiti di tale impostazione è riportato in Sawyer (1973, pag. 61), altre considerazioni al riguardo si trovano in Malara (1989). (Si comprende perciò, come sottolineato da Bishop (1988) quanto sia importante che il sistema di formazione degli insegnanti consenta l'indipendenza della cultura dell'insegnante dai libri di testo.)

Il linguaggio algebrico

Uno degli elementi essenziali dell'algebra è il suo linguaggio, ossia il sistema di segni e regole sintattiche che governano la costituzione e la trasformazione delle espressioni algebriche. Esso prende come punto di partenza il modello aritmetico (Boero 1992, Socas e Altri 1989) associando simboli letterali ai numeri, utilizza i segni delle operazioni e altre convenzioni di scrittura aritmetiche e si basa sul mantenimento delle proprietà formali delle operazioni. Fondamentale per il suo sviluppo è il ruolo dell'uguaglianza e del principio di sostituzione. Caratteristica del linguaggio algebrico è la possibilità di esprimere in sintesi, attraverso opportune codifiche, informazioni (o ipotesi) su situazioni di vario genere (matematiche o extramatematiche), cosa che porta ad evidenziare e dominare le relazioni tra le informazioni stesse favorendone l'elaborazione. Nello stesso tempo risulta un efficace mezzo di informazione per chi è in grado di leggere ed interpretare le sue formule. In altre parole, come espresso da Arzarello e altri (1994), "il linguaggio algebrico svolge l'importante funzione di accrescere la possibilità di pensiero, di ragionamento, di conoscenza del singolo individuo e consente inoltre la comunicazione intenzionale, razionale del proprio pensiero."
Il linguaggio algebrico andrebbe insegnato analogamente alle lingue naturali: occorrerebbe insegnare *grammatica e sintassi* (nel nostro caso analisi dei termini, segni, convenzioni di

scrittura per la generazione di espressioni, regole di trasformazione), insegnare a *tradurre da un linguaggio ad un altro* (leggere-interpretare formule in linguaggio algebrico e viceversa esprimere in formule proposizioni del linguaggio ordinario) ed insegnare ad *esprimere le proprie idee nel nuovo linguaggio* (argomentare e dimostrare tramite formule e loro trasformazioni algebriche), affrontando nel corso degli anni questioni via via più complesse che richiedono una conoscenza ed uso del linguaggio algebrico sempre più approfonditi.
Nell'insegnamento questi aspetti dovrebbero intrecciarsi ed essere sviluppati in modo equilibrato, tuttavia nella prassi difficilmente si punta allo sviluppo contemporaneo di queste abilità e in generale si finisce con il privilegiare lo studio formale del linguaggio senza fare acquisire quelle capacità interpretative ed espressive, legate essenzialmente alle attività di matematizzazione e risoluzione di problemi, che stanno alla base del "fare matematica".
Da curare nell'insegnamento vi sono poi importanti aspetti, di tipo metacognitivo. Un primo aspetto riguarda la consapevolezza dei significati di cui una data scrittura simbolica può essere portatrice. Come sottolineato dalla Sfard (1994) i simboli algebrici non parlano per loro stessi. Quello che uno vede in loro dipende dalle richieste dello specifico problema a cui essi sono applicati, e cosa non meno importante, dipende da che cosa uno è preparato a notare ed è capace di percepire. Ad esempio, la Sfard scrive, la scrittura $3(5+x)+1$ può essere vista come: la codifica di un procedimento di calcolo (aggiungi a cinque un numero, moltiplica per tre il risultato e poi aggiungi uno), un certo numero anche se non specificato (il risultato del calcolo indicato quando si specializza x), una funzione della variabile x, ed anche una espressione formale senza significato che tuttavia può essere manipolata e combinata con espressioni dello stesso tipo secondo certe leggi ben definite.
Accanto alla polisemia di una scrittura ancor più importante è il considerare "l'invarianza della denotazione rispetto al senso algebrico delle espressioni", dove per senso algebrico di una espressione si intende "l'esplicitazione del modo con cui il denotato può essere ottenuto attraverso l'applicazione di regole computazionali" (Arzarello e Altri, 1994) in altre parole considerare il fatto che una pluralità di espressioni, con senso algebrico differente possono denotare un medesimo oggetto. Ad esempio le espressioni $4x+2$ e $2(2x+1)$ rappresentano procedimenti diversi ma denotano la stessa funzione ed ancora, più semplicemente, le scritture 2 ; 4/2 ; 2,00 ; +2 ; 10/5 ; $4^{1/2}$; hanno sensi diversi ma denotano tutte il numero due.
E' importantissimo da un punto di vista didattico abituare gli allievi alla pluralità di rappresentazioni di una stessa cosa (è ben noto lo stereotipo "lettere diverse rappresentano necessariamente oggetti diversi"), ma occorre creare situazioni didattiche opportune che rendano consapevoli gli allievi di come la scelta del modo di denotare un oggetto influenzi lo sviluppo delle argomentazioni sull'oggetto stesso, proprio perché queste argomentazioni vengono a dipendere dal senso algebrico del denotante. Ad esempio se si considera la somma di un numero con il suo quadrato difficilmente la semplice lettura della formula $n+n^2$ porterà l'allievo ad arguire che in ogni caso tale somma sarà un numero pari, ma trasformando la scrittura in $n(n+1)$, quest'ultima potrà suggerirglielo più facilmente. Ed ancora volendo indagare sul prodotto di tre numeri naturali consecutivi non nulli ci si rende subito conto che la scelta di indicare i tre numeri con $n-1$, n , $n+1$, porta alla scrittura $(n-1)n(n+1)$ che si trasforma in $n(n^2-1)$ ossia n^3-n e permette di dire che tale prodotto può esprimersi come il cubo del numero di centro meno questo stesso, invece la scelta di indicare i numeri con n , $n+1$, $n+2$ porta alla scrittura $n(n+1)(n+2)$ che non consente questa lettura.

Questi esempi evidenziano il ruolo svolto al riguardo dalle trasformazioni algebriche: esse consentono all'allievo di concepire che "una cosa può essere anche un'altra cosa" ossia gli consentono di vedere una stessa cosa da più punti di vista e gli forniscono chiavi di lettura diverse per interpretarne proprietà.

Tavola 1

Interpretazione di scritture

1 Se ho $n = 2^3 x 3^2 x 7 x 11 x 13^2$ e $p = 7x13x11x2x\ 3x13x\ 2x2x3$ cosa posso dire di n e p? Se A e B sono numeri uguali è possibile che si verifichi questa situazione: $A = 2^2 x 7 x 3^4 x p$; $B = 3^4 x 7 x\ 2x2x\ k$ dove p = k?

2. Se ho $R = 9x4xa$; e $S = 2^2 x b x 3^2$ cosa posso dire?

3. Considera il numero A = nx12 , discuti se A è un numero pari, se è divisibile per 5, se è divisibile per 4.

4. 570+32+18 = z posso dire senza fare i calcoli se z è pari, se è divisibile per 4, per 5 e perché?

5. Considera il numero $K = 7x5^2 x 3 x 2^2$, K è anche uguale a 1850+200+50. Osserva le due scritture attraverso le quali è rappresentato il numero K: quale di queste due scritture ti dà meglio la possibilità di rispondere alle seguenti domande: K è divisibile per 27, per 30, per 35?

6. Considera la seguente moltiplicazione: mxn = c . Se ti dico che il numero c è sicuramente un numero che si trova "nella grande tabellina del 6", ossia è il prodotto di 6 per qualche altro numero, scrivi cosa puoi dire dei numeri m ed n.

7. Cosa puoi dire se u = v+3 e v = 1

8. Se a + b =43 cosa puoi dire di a + b + 2 =

9. Se n - 246 = 762 allora n - 247 =

10. Se r=s+t e r+s+t = 30 cosa puoi dire?

11. Quando è vera l'uguaglianza l + m + n= l + p + n ?

12. Quando è vera l'uguaglianza r + s + t = p + s + q ?

Traduzione in formule

Traduci in formule le seguenti relazioni

1. Il numero z è la somma di 3 e y

2. Il numero k è 8 volte il numero z;

3. s e t sono numeri, s è 8 unità più di t;

4. Il numero a supera di 12 il numero b;

5 . Il numero u è inferiore al numero v di 5 unità;

6. Il numero t supera di 5 il triplo di w;

7. Il numero x è inferiore di 7 rispetto al doppio del numero y;

8. Il numero a è il quoto di b diviso 5.

9. Dividendo il numero v per il numero t si ottiene quoziente 7 e resto 2.

10. Il numero u è il quadrato del numero v. Il quadrato del doppio di v è ... .

Controllo della sensatezza di formule e loro trasformazioni

1. Precisa per quali valori delle lettere le seguenti espressioni risultano prive di senso:
3/2(x - 5) ; 3a/(b + 2/3) ; 7/3t + 4) ; 7b/(2 - 5a) ; 5y/ (5/6 - 2y/3) ; 5a/(3/7 + b/5).

2. Assegna un nome alla formula e modifica la scrittura in modo che ogni lettera figuri una sola volta:
2b +3c c = ; 5c + ac a = ; 2ab + b b = ; 3ab/5 - 2b/'3 a =

3. Trasforma ciascuna delle seguenti formule in tutti i modi possibili: a = ... ; b = ... ; c = ... Evidenzia i casi in cui trovi particolare difficoltà e discutili con un tuo compagno
f = 2a + b ; f = $(a^2 + b)/c$; f = $a^2 - \sqrt{b}$□; f = ab + $(c+1)^2$; f = a - b^2/c ; f = 1/a +1/c

L'ambito aritmetico fornisce un buon terreno di studio in questa direzione sin dai primi anni della scuola media. Al riguardo richiamiamo una nostra ricerca in corso che privilegia l'argomentazione in aritmetica per l'avvio al pensiero algebrico, prevede l'utilizzo delle lettere sin dalla prima media ed è incentrata da un lato sull'analisi ed interpretazione di messaggi (espressi sia in linguaggio naturale che matematico), dall'altro alla codifica di messaggi in linguaggio matematico ed alla loro trasformazione. A titolo di esempio riportiamo in tavola 1 alcuni degli esercizi proposti, per ulteriori indicazioni rinviamo a Gherpelli e Malara (1994). Altre ricerche in tal senso sono ora condotte dai nuclei di ricerca in didattica della matematica di Genova, Pavia e Torino (si veda Basso e Altri, 1994).

Argomentazione e dimostrazione in aritmetica

L'introduzione precoce delle lettere consente di attuare un approccio alla dimostrazione in aritmetica, attività solitamente trascurata. Nella nostra tradizione scolastica infatti la dimostrazione è prerogativa dell'ambito geometrico (anche se negli ultimi anni la sua trattazione sta diventando sempre più povera) per la scelta fatta dei nostri legislatori di inizio secolo di omettere dai programmi di insegnamento lo studio formale dell'aritmetica. Oggi però, grazie alle influenze della scuola inglese, anche in Italia si sta facendo faticosamente strada lo studio di proprietà aritmetiche, se pure a livello di scuola dell'obbligo e con un taglio alquanto riduttivo che limita tale studio all'osservazione di regolarità numeriche su pochi casi ed alla formulazione delle regolarità osservate in termini generali.

Tavola 2

Sulla generalizzazione e codifica di procedimenti e sulla equivalenza motivata di formule

Alcuni allievi di prima media hanno calcolato la somma 1+2+3+...+7 descrivendo ciascuno così il proprio procedimento. Esprimi in generale ciascuno di tali procedimenti e verificane l'equivalenza

Regola di Simona: Lascio da parte l'ultimo addendo, sommo il primo con il penultimo, il secondo con il terzultimo, ... Ciascuna somma ha lo stesso valore uguale all'ultimo addendo. Per trovare il numero delle somme considero il numero degli addendi meno l'ultimo, lo divido per due e poi aggiungo 1 (corrisponde all'ultimo addendo).
Regola di Andrea: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8x4 - 4. Sommo il primo addendo con l'ultimo, il secondo con il penultimo, ..., mi resta l'addendo centrale. Aggiungo alla somma un addendo uguale a questo, trovo un'ulteriore coppia. Tutte le somme hanno lo stesso valore e le somme sono tante quanto la metà di questo valore. Infine tolgo "l'addendo immaginario centrale" aggiunto prima. Questo addendo è uguale al numero delle somme.
Regola di Lorenzo: Tengo fermo il primo addendo, sommo il secondo con l'ultimo, il terzo con il penultimo, e così via. Le somme sono uguali e sono tante quanto è la metà del numero degli addendi escluso il primo. Poi si aggiunge il primo addendo. 1 +(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)= 9x3 + 1.
Regola di Caterina: Sommo il primo addendo con l'ultimo, il secondo con il penultimo, ..., le somme sono tutte uguali e mi resta il numero di mezzo che è uguale alla metà di ogni somma. Le somme sono tante quanto è la metà del numero degli addendi, escluso quello di mezzo.
Regola di Enza: 1 +2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 0 + 1 +2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 7x4 9x3 + 1. Aggiungo alla somma l'addendo 0, poi sommo il primo con l'ultimo, il secondo con il penultimo, e così sempre. Le somme valgono ciascuna sette e sono tante quanto la metà degli addendi che ora sono 7 + 1

N.B. Il problema si può semplificare assegnando accanto alla descrizione del procedimento di ciascuno la relativa codifica algebrica ed affrontando in attività collettiva la verifica della equivalenza tra le scritture:
Regola di Simona: 1 + 2 + 3 + ... + 2n + (2n+1) = (2n+1)(2n:2+1) = (2n+1)(n+1)
Regola di Andrea: 1 + 2 + 3 + .. ! .. + 2n + (2n+1) = (2n+1 + 1)(n+1) - (n+1)
Regola di Lorenzo: 1 + [2 + 3 + 4 + ... + 2n + (2n+1)] = (2n+1 + 2)x(2n:2) + 1
Regola di Caterina: 1 + [2 + 3 + 4 + ... + 2n + (2n+1)] = (2n+1 + 1)x(2n:2) + [(2n+2):2]
Regola di Enza: 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2n + (2n+1) = (2n+1)x[(2n+2):2]

Questo filone di attività a livello di scuola media potrebbe essere potenziato lavorando con gli allievi sul confronto dei procedimenti di generazione delle leggi aritmetiche, come nell'esempio riportato in tavola 2. Un tale genere di attività ha varie valenze, innanzi tutto è utile per evitare il concetto errato di una corrispondenza uno a uno tra regolarità osservata (su un numero finito di casi) e formula generale ad essa relativa, dà poi modo di affrontare trasformazione algebriche non fini a se stesse ma mirate alla dimostrazione della equivalenza di espressioni algebriche, infine costruisce un terreno idoneo per affrontare negli anni successivi il problema della giustificazione della correttezza della regolarità osservata aprendo al principio di induzione. Per poter proporre agli allievi attività di indagine in ambito aritmetico è fondamentale affrontare in precedenza con loro il problema della traduzione formale di proprietà dei numeri interi quali: l'essere pari, l'essere dispari, l'essere quadrato, l'essere multiplo di un numero, ecc., cosa quest'ultima a torto generalmente data per scontata. L'attività di indagine poi non dovrà essere

rivolta esclusivamente alle leggi aritmetiche ma anche a situazioni per le quali potranno essere individuati controesempi o anche a situazioni non sempre vere ma per le quali si potranno individuare le condizioni di validità.
Un interessante esempio in tal senso è sviluppato da Chevallard (1990). Egli parte con il considerare coppie di numeri dispari consecutivi come 5 e 7 , 9 e 11, 13 e 15 , ecc. ed osserva che la somma è sempre un numero "doppiamente pari" ossia divisibile per 4. La codifica della somma di due dispari consecutivi qualsiasi porta alla scrittura (2h+1)+(2h+3) che si trasforma in 4(h+1) e che prova la validità generale della regolarità osservata. Chevallard pone il problema di indagare se questa stessa regolarità continua a valere sommando due dispari a e b qualsiasi. Considerando coppie di dispari quali 3 e 7 o 5 e 9 si ottengono controesempi circa la validità generale della regolarità, si pone perciò il problema di indagare circa eventuali condizioni sotto cui essa si conserva. Si parte allora con l'esprimere la somma a+b esplicitando la proprietà di essere dispari dei due addendi. Ciò comporta una qualche difficoltà nello scrivere (2h+1)+(2k+1), spesso gli allievi erroneamente scrivono (2h+1)+(2h+1) non considerando che questa scrittura codifica la somma di un qualsiasi numero dispari con sé stesso. Una volta superato l'ostacolo è abbastanza spontaneo trasformare la scrittura in 2(h+ k+1) e considerare sotto quali condizioni essa rappresenta un numero divisibile per 4. Il problema allora si sposta sulla parità del termine (h+k+1) che comporta l'essere h+k dispari. Supponendo h pari e k dispari, cosa che non lede generalità, e formalizzando tale ipotesi si ha h = 2u e k = 2v+1, allora a e b si possono rispettivamente scrivere come 2(2u)+1 e 2(2v+1)+1 ossia a = 4u+1 e b = 4v+3. Si vengono così a caratterizzare le condizioni rispetto le quali la somma di due dispari è divisibile per 4: la coppia di numeri deve esssere del tipo (4u+1, 4v+3) o (4u+3, 4v+1). In altre parole perché due dispari abbiano somma divisibile per 4 occorre (e basta) che i resti della loro divisione per 4 siano o 1 o 3 e siano distinti. Questa condizione comprende come caso particolare il caso della somma dei dispari consecutivi e dà di questi una caratterizzazione: essi possono essere del tipo (4n+1, 4n+3) o (4n+3, 4n+1).
Questo risultato ne porta con sé un altro, non evidente a prima vista ma molto interessante: ogni numero dispari è o della forma 4n+1 o della forma 4n+3, ossia ogni numero dispari è caratterizzato dal fatto che diviso per quattro dà come resto o 1 o 3.
La valenza di un tale genere di attività è evidente: si portano gli allievi a vedere la stessa cosa in più modi (ciascuno da utilizzarsi a seconda del problema in gioco) ed a concepire il linguaggio dell'algebra come efficace supporto per lo sviluppo del discorso matematico. In Tavola 3 sono riportati alcuni quesiti di questo genere affrontabili con gli allievi sin dalla scuola media.

Tavola 3

Esempi di attività di indagine in ambito aritmetico

Discuti le seguenti informazioni sui numeri naturali giustificando perché secondo te sono vere oppure false.
E' vero che:
1. La somma di due numeri pari è divisibile per 4?
2. Se il prodotto di due numeri è pari ciascuno dei due fattori è pari?
3. Un numero divisibile per 3, ossia del tipo 3n, è sempre dispari?
4. Se il prodotto di due numeri è dispari allora tutti e due i fattori sono dispari?
5. il quadrato di un qualsiasi numero pari è divisibile per 4?
6. Tutti i numeri divisibili per 3 sono anche divisibili per 9?
7. Se 3 divide due numeri naturali divide anche la loro somma o la loro differenza?
8. Il prodotto di due numeri pari è divisibile per 7?
9. Ci sono valori di n in modo che 5n+3 sia: divisibile per 5, divisibile per 3, divisibile per 2?
10. La somma di due numeri che divisi per 5 danno resto 1 è ancora un numero che diviso per 5 dà resto 1?
11. Di tre numeri naturali consecutivi almeno uno è divisibile per 3?

12. La somma di quattro numeri naturali consecutivi è sempre pari?

I problemi verbali algebrici

La risoluzione di problemi verbali tratti dalla vita quotidiana è una delle attività più complesse per gli allievi e di vario tipo sono gli ostacoli che gli studenti possono incontrare. Sulle loro prestazioni influiscono aspetti quali: la familiarità del contesto del problema, la comprensione del testo dal punto di vista linguistico, lo stile della formulazione, l'ordine con cui le informazioni sono presentate.

Nella risoluzione di problemi di tipo algebrico tuttavia l'aspetto più delicato e spesso sottovalutato nella sua difficoltà è quello di dover dare nome ad una o più delle cose in gioco per poter esplicitare in termini matematici il collegamento tra le informazioni che si possiedono. Può essere perciò didatticamente utile soffermarsi in un primo tempo con gli allievi unicamente sull'attività di traduzione in linguaggio matematico di date informazioni, al riguardo si possono anche utilizzare testi di problemi da cui si sono omesse la o le domande conclusive ed inizialmente può essere opportuno indicare agli allievi l'oggetto o gli oggetti a cui dare il nome, è tuttavia importante portare gli allievi a comprendere che la chiave dell'attività sta nell'esprimere una stessa cosa in due modi diversi ed imporre l'uguaglianza tra le scritture. In tavola 4 sono riportati alcuni esempi di tali attività adattati da testi di problemi.

L'attività di "messa in formula" comporta una serie di difficoltà. Vi sono situazioni in cui la formulazione verbale stessa del quesito induce all'errore. Ad esempio in un classico lavoro di Clement e altri (1981) sono riportati i seguenti quesiti:

1. Scrivi una equazione usando le variabili S e P per rappresentare la seguente proposizione: "In questa università ci sono 6 volte tanti studenti quanti professori". Usa P per il numero di professori e S per il numero di studenti. (Allievi esaminati 497. Risposte corrette 39%)
2. Traduci in una equazione la seguente proposizione: "Al ristorante di Mindy per ogni quattro persone che ordinano cheesecake ve ne sono cinque che ordinano strudel. indica con C il numero dei cheesecake e con S il numero degli strudel" (Allievi esaminati 497. Risposte corrette 12%).

In entrambi i casi la traduzione in formula delle proposizioni presenta frequentissimo l'errore di inversione da parte degli studenti. (C'è da sottolineare che i due quesiti sono di un livello diverso di difficoltà, in particolare il secondo quesito presenta difficoltà di rappresentazione e richiede il ricorso agli operatori frazionari.)

Un altro esempio di influenza della formulazione del testo sulla sua trasposizione algebrica è il seguente, riportato in uno studio di Norman (1987):

> In un viaggio Gianni percorre 50 miglia in un'ora. Una parte del viaggio l'ha fatta a 35 miglia all'ora. Con quale velocità ha percorsa l'altra parte?

Nell'esperimento un terzo del campione esaminato ha risposto che la velocità con cui la restante parte viene percorsa è di 15 miglia all'ora, trasferendo erroneamente alla situazione il modello additivo che i valori numerici in gioco suggeriscono.

Tradizionalmente nella prassi scolastica è dato poco spazio alla risoluzione di problemi algebrici poiché gli insegnanti ritengono tale attività particolarmente difficile per gli allievi. Dal nostro punto di vista questa omissione non è giustificata anche perché è possibile affrontarla graduandone le difficoltà. Al di là poi della valenza sul piano della matematizzazione, essa risulta particolarmente utile per giustificare agli occhi dell'allievo il perché dello studio delle equazioni come oggetto matematico e dei metodi di risoluzione dei sistemi di equazioni.

Tavola 4

Avvio alla "messa in formula"

1. In una classe di 28 alunni le ragazze sono 6 in più dei ragazzi. Indica con una lettera il numero dei ragazzi ed esprimi in formula la relazione tra le informazioni date.
2. In una liquidazione un completo da sci viene venduto al prezzo, già scontato del 15%, di L. 374.000. Indica con una lettera il prezzo iniziale ed esprimi in formula la relazione fra le informazioni date.
3. I signori Rossi hanno percorso 260 chilometri per raggiungere Arezzo dalla loro casa. A un certo punto del viaggio si sono fermati per il pranzo e dopo il pranzo hanno percorso un tragitto lungo quattro volte quello percorso in mattinata. Indica con una lettera i chilometri percorsi fino al momento del pranzo ed esprimi in formula la relazione tra le informazioni date.
4. Sandro e Giorgio desiderano andare a teatro. Giorgio ha appena i soldi per un biglietto in loggione ma Sandro vuole un posto migliore perché miope, perciò essi comprano tipi differenti di biglietto. Il biglietto di Sandro è costato 2 volte di più di quello di Giorgio. Assieme essi hanno speso per i biglietti 72.000 lire. Indica con una lettera il costo del biglietto di Giorgio ed esprimi in formula la relazione tra le informazioni date.
5. Da un serbatoio pieno di 745 litri di acqua, vengono tolti 17 secchi di acqua. Ora ci sono soltanto 626 litri di acqua nel serbatoio. Indica con una lettera il contenuto in litri di un secchio ed esprimi in formula la relazione tra le informazioni date.
6. La sarta ha un taglio di stoffa lungo 3,20 m e la vuole dividere in parti che differiscono di 40 cm. Esprimi in due modi diversi la relazione tra le informazioni date indicando con una lettera una volta la parte più piccola e una volta la parte più grande.
7. Giulia è di 4 anni più giovane di Dora, Elena è di 3 anni più vecchia di Dora. La somma delle loro età è 38. Indica con una lettera gli anni di Dora ed esprimi in formula la relazione tra le informazioni date. Esprimi poi la relazione con un'altra formula a partire dagli anni di Giulia.
8. La somma delle età di un ragazzo e di suo padre è di 52 anni. Quattro anni fa la differenza di età tra i due era di 30 anni. Indica con lettere le età di ciascuno ed esprimi le relazioni tra esse.

Nell'ambito di questa attività suggeriamo di presentare problemi che siano risolubili sia con metodi aritmetici che algebrici per evidenziare agli allievi le differenze tra i due stili di approccio: mentre la messa in atto della strategia aritmetica richiede da parte dell'allievo dinamismi mentali di trasformazione della situazione problematica, la messa in atto della strategia di tipo algebrico richiede unicamente la traduzione in simboli delle relazioni tra dati e incognite ed il conseguente controllo del significato dei risultati ottenuti dopo la risoluzione della o delle equazioni (si veda ad esempio Bernardz e altri, 1991 o Bell, 1992).
E' importante sottolineare come con "la messa in formula" del problema il processo risolutivo aritmetico viene in qualche modo trasferito e racchiuso nel processo di trasformazione sintattica della formula o formule algebriche che traducono le informazioni date dal problema

Tavola 5

Confronto di procedure risolutive di problema

Il signor Rossi rientra con la famiglia da una passeggiata, durante la quale si è fermato al solito bar per un rinfresco. Per due gelati e tre caffé egli ha pagato 6.300 lire, mentre alcuni giorni prima per due caffé ed un gelato ne aveva pagate 3.600. Quanto costa un gelato?

<u>Procedimento aritmetico</u>
Dalle informazioni date si rileva che la differenza tra le due consumazioni è di un gelato ed un caffé il cui costo complessivo è pertanto di lire (6.300 - 3.600) = 2.700. Poiché il costo di due caffé e un gelato è di lire 3.600 per differenza si ottiene che il costo di un caffé è di lire (3.600 - 2.700) = 900, allora poiché il costo di un gelato ed un caffé è di lire 2.700 si ha che il costo di un gelato è di lire (2.700 - 900) = 1.800
<u>Procedimento algebrico</u>
Indicati con a e b rispettivamente il costo di un caffé e di un gelato dalle informazioni date si ha: $3a + 2b = 6.300$ e $2a + b = 3.600$, sottraendo dalla prima equazione la seconda si ottiene: $a + b = 2.700$. Sottraendo dalla seconda equazione la terza si ottiene $a = 3.600 - 2.700$ ossia $a = 900$, sostituendo il valore ottenuto per a nella terza equazione si ottiene $b = 2.700 - 900$ ossia $b = 1.800$.

Dal confronto delle due procedure si rileva come la trasformazione più economica delle equazioni esprimenti le condizioni del problema rifletta il procedimento risolutivo aritmetico.

(si veda l'esempio riportato in Tavola 5). Il vantaggio del metodo algebrico sta nel fatto che, venendo ad oscurare i significati legati al contesto del problema ed evidenziati soltanto i legami di relazione tra i dati, è possibile ottenere il controllo di problemi intricati e semanticamente complessi per effetto del trasferimento del processo risolutivo alla trasformazione sintattica. (Ovviamente c'è anche il rovescio della medaglia: l'assunzione cieca del metodo algebrico nella risoluzione di problemi può produrre l'atrofizzarsi delle capacità logico-intuitive che entrano in gioco nella messa in atto dei processi artmetici di risoluzione. L'optimum sarebbe perciò affrontare, quando possibile, il confronto tra strategie risolutive diverse del medesimo problema.)

Considerazioni conclusive

Ci rendiamo conto di aver affrontato solo alcune questioni, anche se importanti, del nostro tema. Nella trattazione abbiamo cercato di mettere in luce aspetti solitamente trascurati nella didattica dell'algebra, relativi all'attività di traduzione dal linguaggio naturale a quello algebrico ed alla produzione di pensiero mediante il linguaggio algebrico. Abbiamo trascurato per questioni di spazio l'aspetto legato alla grammatica e sintassi dell'algebra, riguardo a questo sarebbe stato interessante poter esporre una casistica degli errori più frequenti ed analizzarne le cause. Per coloro che fossero interessati a ciò rinviamo a Krigowska (1957), Socas e Altri (op. cit.), Kieran (1990, 1992), Boero (op. cit.), Gallo (1992), Lemoyne e Altri (1993) e Reggiani (1994).

Prima di chiudere desideriamo sottolineare che alcuni di tali errori hanno le loro radici nell'insegnamento primario. A questo livello scolare, per limitare futuri ostacoli, è importante esaltare l'aspetto relazionale del numero, come ad esempio è indicato nel progetto Ricme (1980) in cui sin dal primo ciclo si propongono attività che abituino gli allievi ad associare ad ogni numero una molteplicità di rappresentazioni diverse da quella standard, attraverso espressioni aritmetiche. L'esaltazione di questo aspetto consente anche il superamento di un altro ostacolo connesso con l'uso direzionale del segno uguale. Per intenderci, solitamente alla scuola elementare l'attenzione si concentra più sul prodotto che sul processo per cui si privilegia la scrittura $3+4 = 7$ (in cui l'uguale è concepito come "dà luogo") rispetto alla scrittura $3+4 = 6+1$ (in cui l'uguale è concepito come esprimente l'equivalenza dei procedimenti). Questo porta come conseguenza che, nel passaggio all'algebra, molti allievi di fronte a scritture del tipo $3 + a$ sentono la "mancanza di una chiusura" e sono spinti a porle uguali a qualcosa, (solitamente a zero). Questo comportamento si ritrova anche in espressioni più complesse che vengono trasformate in equazioni, tale difficoltà si riflette inoltre nello studio delle equazioni, precisamente nel passaggio da quelle tipo $ax+b = c$ a quelle tipo $ax+b = cx+d$.

Accanto a queste difficoltà ricordiamo quelle legate alla mancanza di concettualizzazione delle proprietà aritmetiche, ad esempio in Kieran (1992) è documentata la difficoltà di allievi di scuola elementare nel riconoscere, senza eseguire i calcoli, l'equivalenza di semplici espressioni numeriche a tre termini quali: $13+21+ 45$ e $21+45+13$.

E' perciò importante alla scuola elementare lavorare con gli allievi sulle identità aritmetiche coinvolgenti più di una operazione, partendo dalle più semplici, come $3x5=10+5$, esaltandone l'aspetto di rappresentazioni numeriche, e cogliendone l'interscambiabilità, ciò al fine di realizzare un giusto equilibrio tra gli aspetti procedurali e quelli relazionali in aritmetica e favorire così un approccio meno difficoltoso all'algebra.

Bibliografia

Arzarello F., 1993, Pre-Algebraic Problem Solving, in Ponte J. e Altri (a cura di) *Mathematical Problem Solving and New information Technologies,* NATO ASI Series Springer Verlag, Heidelberg, 155-166

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., 1992, L'Algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche *IX Sem. Naz. Ric. Did. Mat.*, Pisa nov. 1992, ora in *L'Algebra come strumento di pensiero*, Collana TID-CNR, serie IDM, vol. 6, 1994

Basso M., Garuti R., Malara N.A., Pesci A., Vighi P., Zan R., (a cura di) "*Numeri e Proprietà*" , CSU, Parma

Bell A.W., 1992, Algebra Learning Research and the curriculum, proc *Workshop Algebraic Learning*, Torino

Bednardz N., Radford L., Janvier B., Lepage A., 1992, Arithmetical and algebraic thinking in problem-solving, proc. *PME XVI*, vol. 1, 65-72

Bishop A.J., 1988, *Mathematical Enculturation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Boero P., 1992, Sulla specificità delle ricerche in didattica della matematica: il caso del formalismo algebrico, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol.15, n. 10, 963-986

Boffa M., 1986, *Matematica 1-2-3*, SEI, Torino

Chevallard Y, 1989-1990, Le passage de l'aritmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college, seconda e terza parte, *Petit X*, n.19, 43-72 e n. 23, 5-38

Clement J., Lochead J., Monk G., 1981, Translation difficulties in Learning Mathematics, *American Mathematical Montly*, April, 286-290

Freudenthal H., 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel Publishing Company, Utrecht

Gallo E., 1992, Il problema del calcolo letterale, il calcolo letterale come problema, relazione presentata al *IX Sem. Naz. Ric. Did. Mat.*, Pisa nov. 1992

Gelfman E., 1994, *The Teaching of Algebra in Russia,* occasional paper, Tomsk University

Gherpelli L., Malara N.A., 1994, Argomentazione in Aritmetica, in Basso M. e Altri (a cura di) "*Numeri e Proprietà*" proc. I Internuclei scuola dell'obbligo, in stampa

Harper E., 1987, Ghost of Diophantus, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, 75-90

Herscoviz N., 1987, 1987, Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra, in Wagner e Kieran (a cura di), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, LEA, Reston Virginia

Kieran K.,1990, Cognitive Processes involved in Learning School Algebra, in Nesher P. e Kilpatrik J. (a cura di), *Mathematics and Cognition*, ICMI Study Series, Cambridge University Press, 96-112

Kieran K., 1992, The Learning and Teaching of School Algebra, in Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NY, 390-419

Kuchemann D.E., 1981, Algebra, in Hart K. (ed.) *Children Understanding Mathematics: 11-16*, Murray, London

Krigowska A.Z., 1957, Sul pericolo del formalismo e del verbalismo nell'insegnamento dell'algebra, *Archimede*, 165-177

Lemoyne G., Conne F., Brun J., 1993, Du traitement des formes a celui des contenus d'ecritures litterales: une perspective d'enseignement introductif de l'algebre, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.13, n.3, 333-384

Mac Gregor M., Stacey K., 1993, Cognitive Models underlying students' formulation of simple linear equations, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, n. 3, 217-232

Malara N.A., 1989, Riflessioni sull'insegnamento delle strutture algebriche nell'area comune del Biennio delle scuole medie superiori, *La Matematica e la sua Didattica*, anno 3, n.1, 40-44

Norman F., 1987, A Psycolinguistic Perspective of Algebraic Language, in proc. *PME XI*, vol.1, 324-330

Progetto RICME, 1980, *Rinnovamento del curricolo matematico elementare*, Armando, Roma

Reggiani M., 1994, Analisi di difficoltà legate all'uso di convenzioni nel linguaggio aritmetico-algebrico, in Basso M. e Altri (a cura di) "*Numeri e Proprietà*" CSU, Parma,

Sfard A., 1991, On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, 1-36

Sfard A., 1992, The Development of Algebra: Confronting historical and Psychological Perspectives, *Algebra Working Group-ICME 7*, Quebec

Sfard A., 1994, The Gains and Pitfalls of reification: The case of Algebra, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 26, 191-228

Sawyer W.W., 1973, *Come insegnare l'algebra astratta*, Boringhieri Torino

Socas M.M., Camacho M., Palarea M., Hernandez J., 1989, *Iniciacion al Algebra*, Sintesis, Madrid