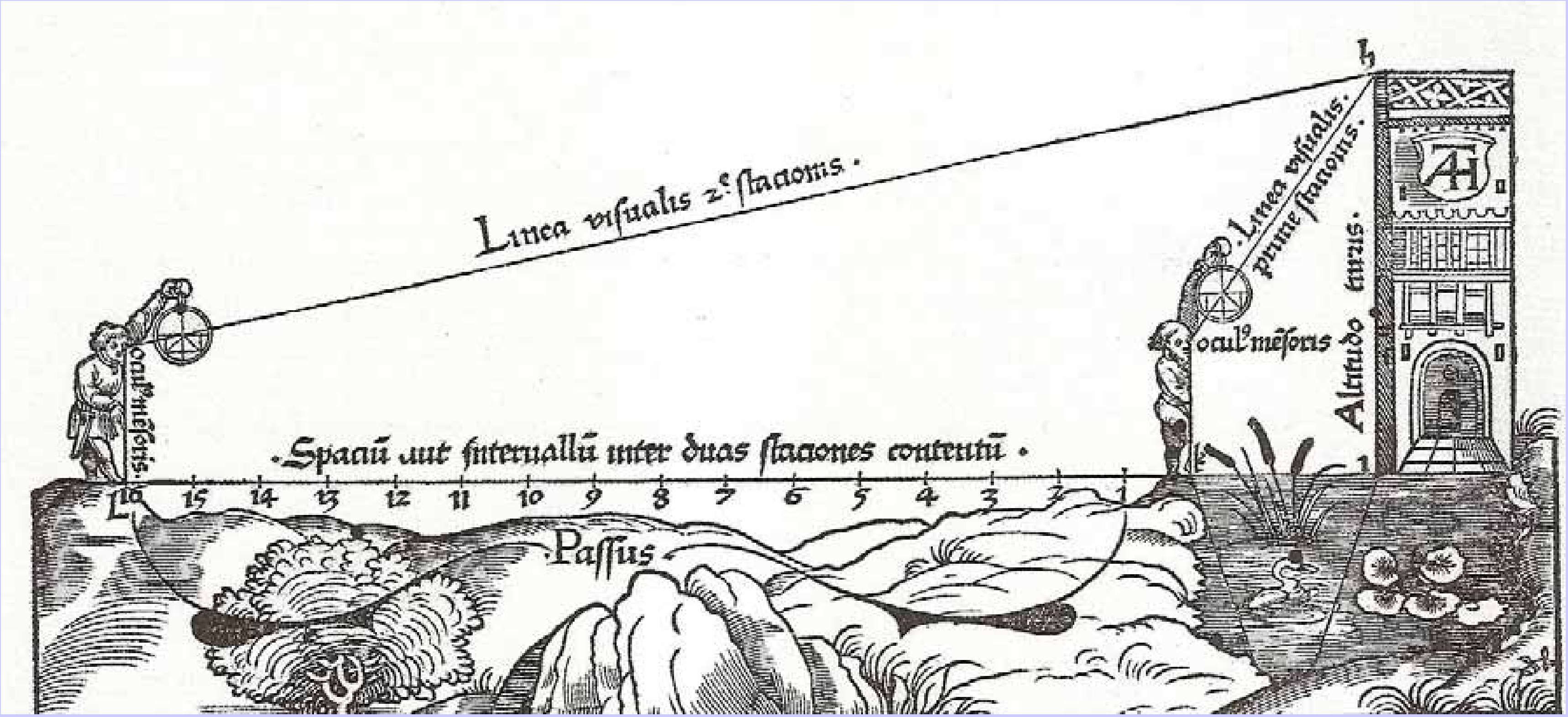


Alle origini della matematica applicata: le scuole d’abaco

“Maestro a cosa serve la geometria?”

Si racconta che Euclide, avendogli un discepolo rivolto questa domanda, chiamò un servo e gli ordinò di pagare una moneta all’incauto e di cacciarlo, dal momento che voleva trarre profitto dalla scienza.

Questo aneddoto anche se non vero è significativo del fatto che la matematica in Grecia veniva concepita come assolutamente lontana da ogni applicazione pratica.

E’ noto che la geometria è nata nell’antico Egitto come misurazione dei campi; è presso i greci che ha fatto il salto a scienza pura con la idealizzazione degli enti geometrici.

E’ tuttavia vero che con Archimede anche la matematica greca si è per così dire sporcata le mani, avendola applicata alla fisica, all’ingegneria.

Tuttavia se ci riferiamo alle applicazioni della matematica alle attività economiche, commerciali, professionali, all’architettura, al campo militare, agli strumenti di misura, cioè alle sue applicazioni su larga scala, perlomeno in Italia bisogna risalire al XIII secolo per coglierne le sue origini e la sua diffusione.

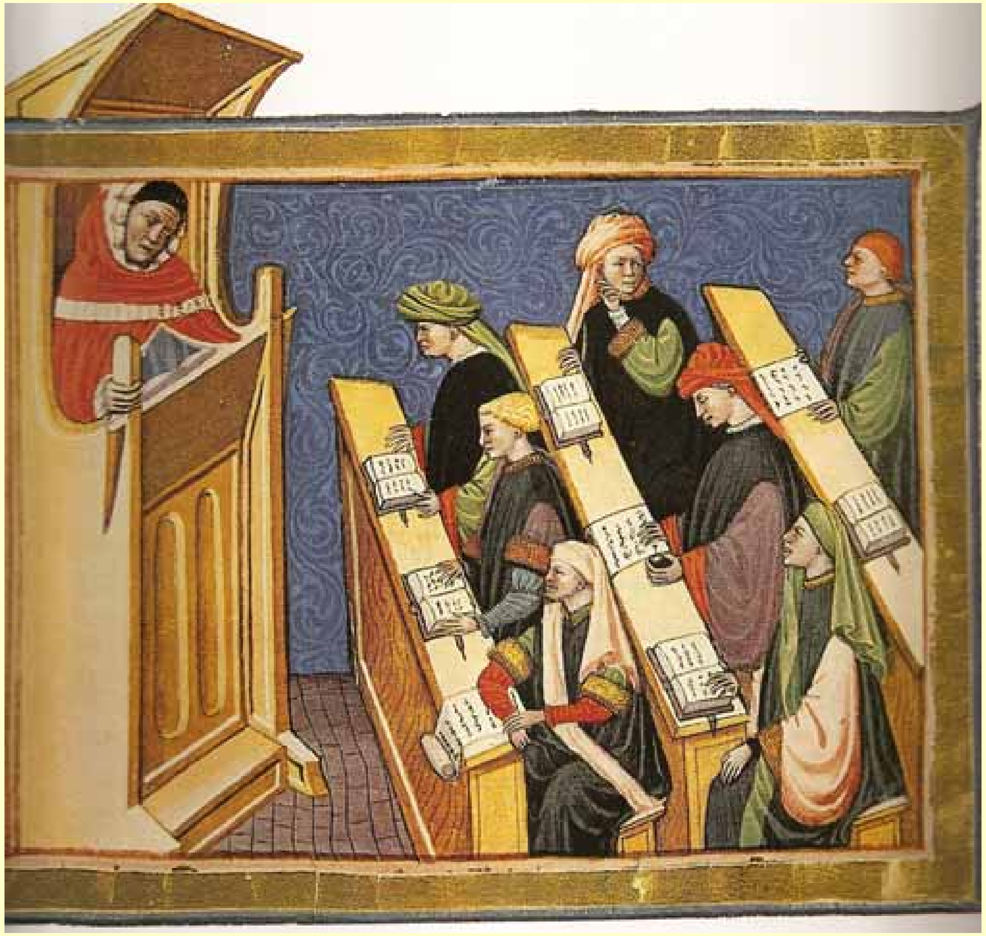
Non stiamo dicendo che la matematica applicata è nata in Italia, anche in questo campo bisogna pagare il tributo alla tradizione araba.

Anonimo fiorentino. Miniatura da Domenico Lenzi

Che cosa succede in Italia a partire dal XI secolo?

Nascono i Comuni.

Con l’età comunale la società cambia profondamente e con essa cambia la domanda di cultura in qualità e quantità. I commerci fioriscono, la borghesia avanza ed ha bisogno di una istruzione che le istituzioni di allora, prevalentemente in mano alla Chiesa, non erano in grado di dare.



Miniatura bolognese dell’inizio del Quattrocento

Una base matematica diventava il supporto necessario alle sempre più numerose professioni che si andavano configurando. Abilità contabili erano richieste non solo agli addetti al commercio ma agli artigiani, ai bottegai, agli architetti, agli artisti. Chiunque dovesse comperare o vendere una merce aveva a che fare con cambi di monete, passaggi di unità di misura di peso, lunghezza e superficie. Si costituivano o si riordinavano i catasti ed erano richiesti tecnici di agrimensura che sapessero calcolare la superficie dei terreni.

Di qui l’esigenza di un luogo in cui tutto ciò venisse insegnato e le scuole ecclesiastiche non servivano allo scopo perché in esse l’istruzione aveva un carattere prevalentemente religioso.

Lezione di geometria. Dipinto di anonimo, sec. XVI

Nascono quindi le cosiddette **scuole dell'abaco,** dove si pratica un insegnamento funzionale ai mercanti e ai tecnici, analoghe alle scuole professionali o alle scuole tecniche di oggi. Tali scuole sono prima private, poi, specie nei piccoli centri, diventano comunali. Prima del 1200 la documentazione è scarsa, ma dopo il 1200 i documenti diventano più numerosi.

La Toscana è il luogo in cui le scuole d'abaco si affermano per prime, poi si diffondono in tutta Italia, grazie soprattutto alla consistente migrazione avvenuta negli ultimi decenni del 1200, lungo tutto il Trecento, di fiorentini, lucchesi, senesi. Il movente di questo spostamento è economico: mercanti, banchieri aprono succursali o spostano la loro attività in terra veneta, a Venezia, Verona, Padova Vicenza e sulla scia di costoro prende residenza tutta una infrastruttura di agenti, sensali, notai, scrivani e maestri d'abaco. Si aprono scuole sul modello toscano.

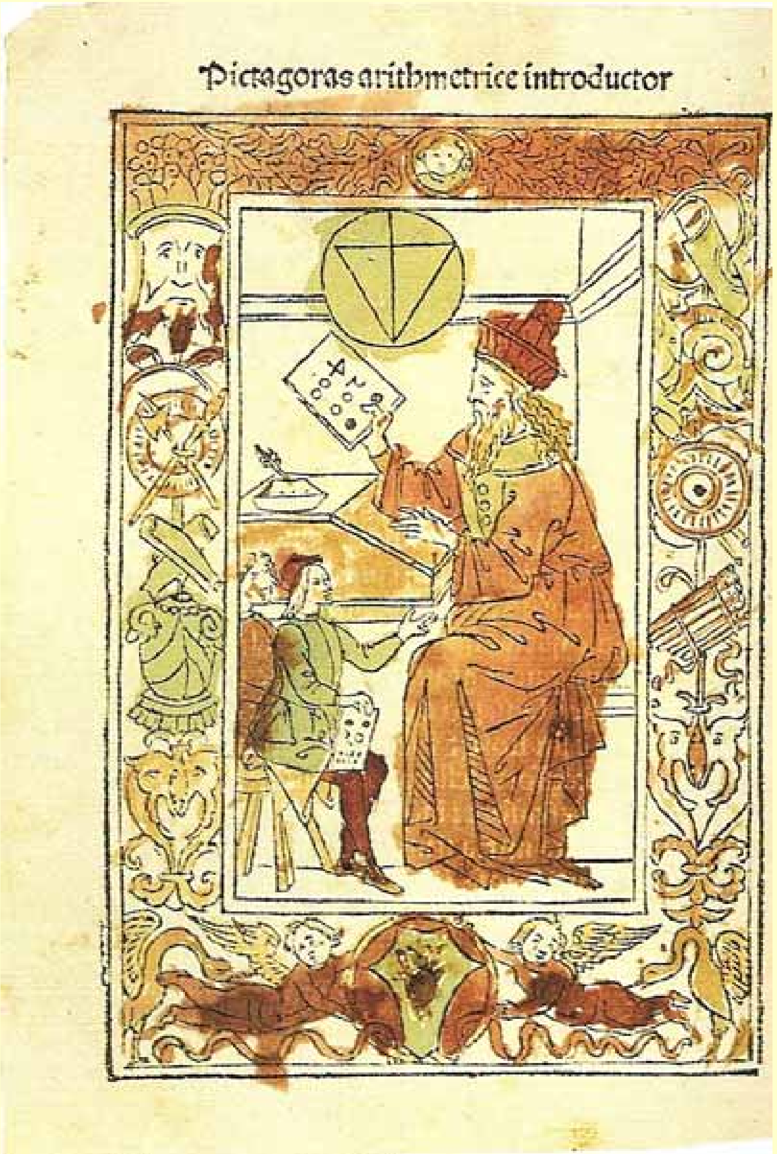
Sulle scuole d’abaco abbiamo poche informazioni. L’ iter scolastico di un giovane non era così codificato come oggi, ma in genere possiamo dire che era il seguente:

C’era un insegnamento elementare che durava fino ai dieci, undici anni, in cui si imparavano i rudimenti del leggere, dello scrivere e far di conto. Avveniva nelle scuole pubbliche o private o in famiglia con i precettori per i più abbienti.

Al termine di questo periodo al giovane si aprivano due strade:

a) l’approfondimento dello studio della grammatica con l’apprendimento del latino e della scrittura umanistica. Tale strada portava poi all’università

b) La frequenza di una scuola d’abaco, che poteva durare anche 5 o 6 anni e che poi apriva la via all’apprendistato in una bottega di un artigiano o di un mercante. Anche l’apprendistato poteva avere una durata oscillante fra i 3 e i 6 anni, secondo le capacità dell’allievo o la difficoltà del mestiere.



Un maestro d'abaco. Filippo Calandri,
De arimetricha opusculum, Firenze 1491

La matematica abachistica è la matematica dei commerci, della contabilità, della misura dei campi, per usare una espressione moderna è la matematica delle forze produttive

La sua lingua è il volgare

La sua grafia è la mercantesca cioè il modo di scrivere dei mercanti

L'istituzione in cui è trasmessa è la scuola d'abaco.

Il suo pubblico è il cosiddetto STRATO CULTURALE INTERMEDIO

Che cosa è lo STRATO CULTURALE INTERMEDIO?

E’ intermedio fra gli analfabeti e coloro che sapevano il latino e possedevano gli strumenti metodologici e concettuali forniti dalla cultura filosofica, giuridica, medica e letteraria in senso classico. Allo strato culturale intermedio appartengono i mercanti, i tecnici, gli artisti, di architetti del nostro Umanesimo e Rinascimento. A questo strato culturale appartengono Leonardo da Vinci, Raffaello, Michelangelo, solo per fare alcuni nomi.

Leonardo da Vinci, Codice B, Parigi, Institut de France. Studio botanico, testo descrittivo e figura per la costruzione di un pentagono.

Qual è l’arco temporale del fenomeno abachistico?

Liber Abaci
1202

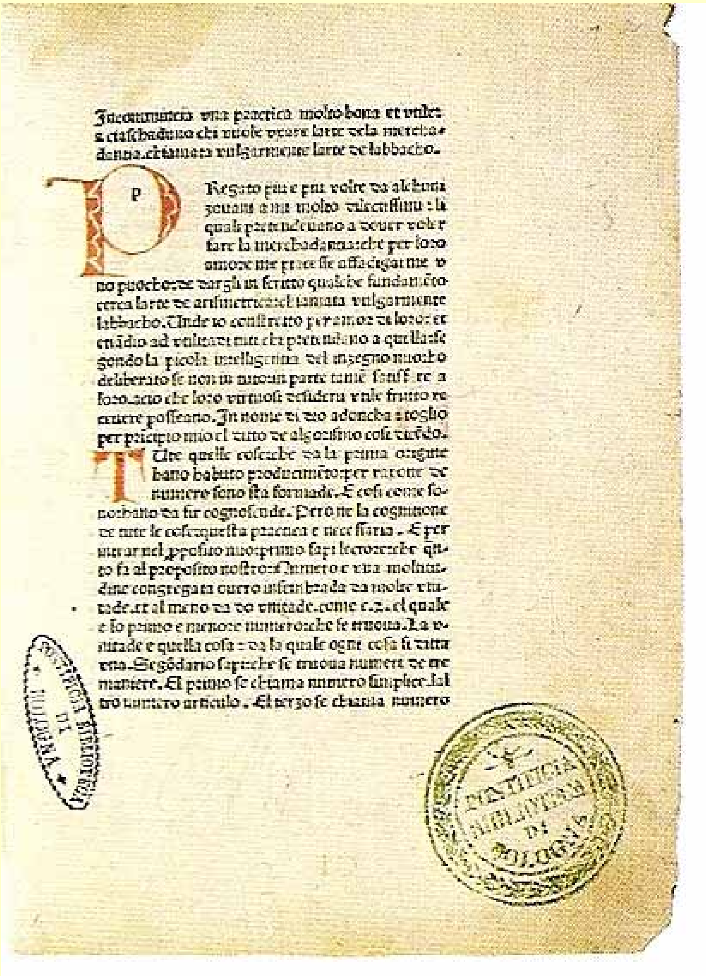
Leonardo Pisano, detto Fibonacci

Summa
1494

Luca Pacioli

Volendo mettere delle date, il periodo “classico” della matematica dell'abaco va dal 1202, l'anno in cui Leonardo Pisano termina di scrivere il *Liber abaci* , al 1494 l'anno di stampa a Venezia della *Summa de Arithmetica*, *Geometria*, *Proportioni et proportionalità* di Luca Pacioli.

Dal punto di vista strettamente matematico il capostipite, il punto di riferimento di tutta la tradizione abachistica è Leonardo Pisano, detto Fibonacci, figlio di Bonaccio. E’ nato a Pisa nel 1170, era figlio di un mercante e come molti altri mercanti di allora aveva avuto la possibilità di entrare in contatto con il mondo arabo. Il padre era stato infatti inviato dai suoi concittadini alla dogana di Bugia (sulla costa africana presso Algeri) e Leonardo, raggiunto il padre, ebbe modo di studiare la matematica araba. Rientrato in patria nel 1202 scrive il *Liber abaci* che diventa il “vangelo” per gli abachisti. Ma il libro era scritto in latino, era molto imponente e quindi era troppo difficile per costituire una base per l’istruzione dei mercanti.



Incominciа vna practica molto bona et vtile: a ciaschaduno chi vuole vsare larte dela merchadantia. chiamata vulgarmente larte de labbacho.

L'aritmetica di Treviso 1478

Verso la fine del Duecento cominciano ad apparire delle versioni ridotte, scritte in volgare, in cui erano scomparsi tutti gli argomenti di carattere più strettamente teorico. **E' l'inizio della tradizione dei libri d'abaco ai quali dobbiamo la maggior parte delle informazioni relative ai contenuti e ai metodi d'insegnamento delle scuole d'abaco.**

Il primo libro d'abaco a stampa è l'Aritmetica di Treviso (1478) anonima e senza titolo, così detta perché pubblicata a Treviso. Essa rappresenta anche in assoluto la prima opera matematica stampata.

Jacopo de' Barbari. Ritratto di Pacioli. Museo di Capodimonte, Napoli

Luca Pacioli (1445 circa, 1517) compendia nella *Summa* tutto ciò che la matematica abachistica aveva prodotto, fino ai primi del Cinquecento. In tal senso la sua opera testimonia il culmine dello sviluppo della matematica dell'abaco. Pacioli non appartiene propriamente allo strato culturale intermedio. Ha insegnato nelle principali università italiane, ha frequentato le principali corti di allora.

Ma a Venezia è stato il precettore dei figli del ricco mercante Antonio Rompiasi, ha quindi avuto modo di approfondire la matematica dei mercanti.

Il fenomeno abachistico continua per tutto il Cinquecento, estendendo man mano la sua influenza finché non invade il campo “dotto”: matematici che pur si muovono in contesti diversi dalle scuole d’abaco, si occupano di matematica abachistica. Gerolamo Cardano (1501-1576), professore alle Università di Bologna, Pavia e Milano scrive in latino nel 1539 una *Practica arithmetice et mensurandi singularis.* Anche Cristoforo Clavio (1537-1612) eminente matematico della Compagnia di Gesù, consulente scientifico di papa Gregorio XIII per la riforma del calendario, che intrattiene rapporti con i più importanti studiosi del suo tempo, Galileo, Ticho Brahe, Keplero, Maurolico, Commandino, scrisse *l’Aritmetica pratica*, in latino nel 1583 e in volgare nel 1586.

La matematica abachistica entra anche nel mondo universitario. Si hanno documenti che testimoniano che all’Università di Bologna c’erano letture di una Matematica di “minor guisa” con scopi pratici e utilitari, fin dal secolo XIV.

Quali sono i contenuti dell’insegnamento desunti dai libri d’abaco?

La parola abaco non indicava più il vecchio strumento di calcolo ma la nuova disciplina che faceva uso della numerazione posizionale

1) **Innanzitutto l’aritmetica e le operazioni elementari**. Alle scuole d’abaco si deve la diffusione delle cifre indo-arabe e del sistema di numerazione posizionale e delle operazioni relative. Basterebbe questo solo per esaltare il ruolo dell’abachismo.

   Nell’illustrazione a fianco tratta dal testo “Margarita philosophica” di Reisch (1503) viene rappresentata la contesa fra i conservatori che sostenevano la numerazione romana (Pitagora) e il sistema additivo e gli innovatori algoritmisti che sostenevano il nuovo sistema di numerazione posizionale (Boezio).

2) **Calcoli con le frazioni, proporzioni**

3) **Problemi di compravendita, costi, profitti, paghe, affitti**

4) **Cambio di monete, passaggi di unità di misura**

5) **Problemi relativi al baratto**

   Due baratano formagio a panno, el cantaro del formagio vale L. 7 ½, la cana del pano vale L. 13 s. 5, si domanda per cantara 64 ½ di formaggio quanto pano sarà. (1 L. = 20 s)

6) **Problemi di matematica finanziaria: interessi, sconti ammortamenti**

7) **Problemi relativi alla composizione di società di capitale (Problemi di "compagnia")**

   Sono 2 fano compagnia, el primo mette 40, l'altro 30 scudi et ànno guadagnato 120, che tocha per uno?

8) **Leghe e misture.** Nel Medioevo e nel Rinascimento il valore della moneta era determinato dalla quantità di metallo prezioso in essa contenuto, quantità che variava da città a città per monete dello stesso nome. Il problema del "consolare" le monete consiste nel calcolare la quantità di metallo prezioso da mettere nella moneta da fondere per ottenere il titolo desiderato.

9) **Problemi di geometria pratica** (calcolo di aree e volumi e misura di altezze, distanze tramite gli strumenti per "misurar con la vista")

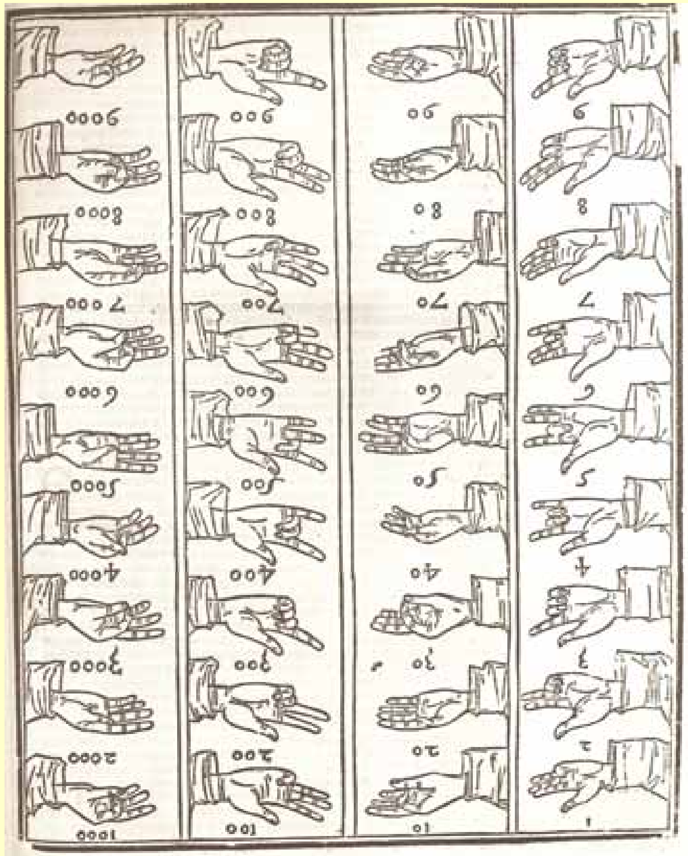
10) **Calcolo radicale**

11) **Algebra**. Problemi risolti con l'uso delle equazioni

12) **Problemi dilettevoli, giochi di società**

Una pagina dell'*Aritmetica* di Filippo Calandri

Quali sono i metodi d’insegnamento?



LUCA PACIOLI *Summa de arithmetica*

Il lettore del libro d’abaco e l’utente della scuola era interessato ad imparare a fare i conti presto e bene e a risolvere i problemi posti dalla pratica della professione svolta.

• L’insegnamento è per problemi (“le ragioni”), l’apprendimento è di tipo catechistico, basato su formule da ricordare e comportamenti da imitare: “Fa così” senza spiegazioni ulteriori. La mateamtica abachistica è prescrittiva e non esplicativa

• no piano teorico ma solo regole, la regola del tre, della falsa posizione semplice e doppia, che funzionano e una ricca casistica in cui applicarle

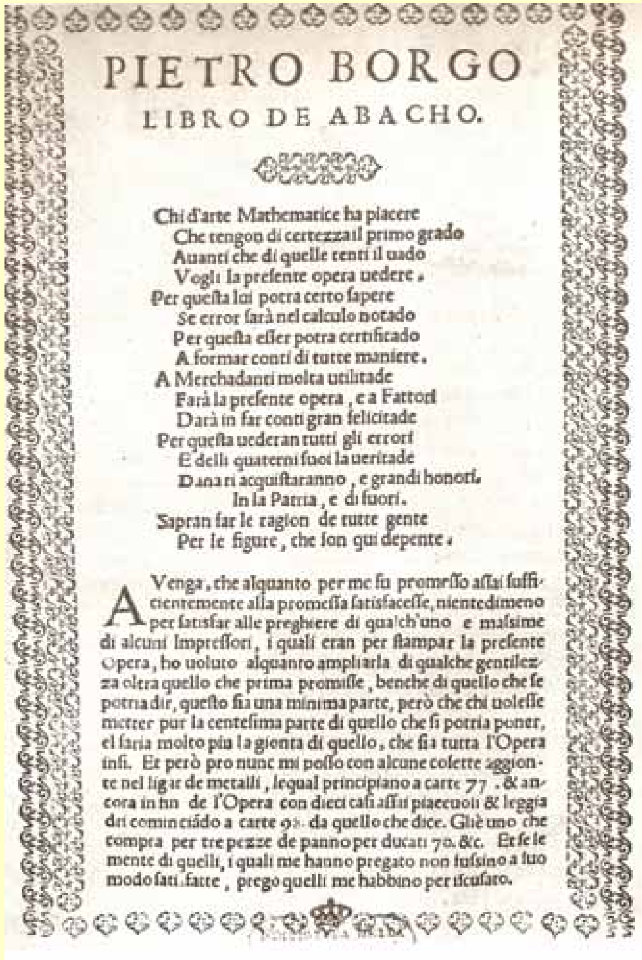
• apprendimento per imitazione dei casi risolti, come nelle botteghe artigiane

• grande importanza della memoria nell’apprendimento

• Una mentalità mnemonico-analogico-operativa anziché logico-deduttiva

• L’abilità, l’intelligenza non è nel dedurre, nel collegare logicamente, ma nel riconoscere, nel confrontare col modello prefabbricato, nel verificare, nell’approssimare

• I libri d’abaco non sono libri scolastici nel senso moderno del termine, ma solo dei promemoria, una sorte di magazzino in cui si depositano in modo piuttosto disordinato “i casi occorsi” con le relative soluzioni



PIETRO BORGO

LIBRO DE ABACHO.

Chi d'arte Mathematice ha piacere
Che tengon di certezza il primo grado
Auanti che di quelle tenti il uado
Vogli la presente opera uedere.
Per questa lui potra certo sapere
Se error sarà nel calculo notado
Per questa esser potra certificado
A formar conti di tutte maniere.
A Merchadanti molta utilitade
Farà la presente opera, e a Fattori
Darà in far conti gran felicitade
Per questa uederan tutti gli errori
E delli quaterni fuoi la ueritade
Danari acquistaranno, e grandi honori.
In la Patria, e di fuori.
Sapran far le ragion de tutte gente
Per le figure, che son qui depente.

AVenga, che alquanto per me fu promesso assai sufficientemente alla promessa satisfacesse, nientedimeno per satisfar alle preghere di qualch'uno e maßime di alcuni Impressori, i quali eran per stampar la presente Opera, ho uoluto alquanto ampliarla di qualche gentilezza oltra quello che prima promisse, benche di quello che se potria dir, questo sia una minima parte, però che chi uolesse metter pur la centesima parte di quello che si potria poner, el saria molto piu la gionta di quello, che sia tutta l'Opera insi. Et però pro nunc mi posso con alcune cosette aggionte nel ligar de metalli, lequal principiano a carte 77. & ancora in fin de l'Opera con dieci casi assai piaceuoli & leggiadri comminciãdo a carte 93. da quello che dice. Gliè uno che compra per tre pezze de panno per ducati 70. &c. Et se le mente di quelli, i quali me hanno pregato non fusino a suo modo sati. fatte, prego quelli me habbino per iscusato.

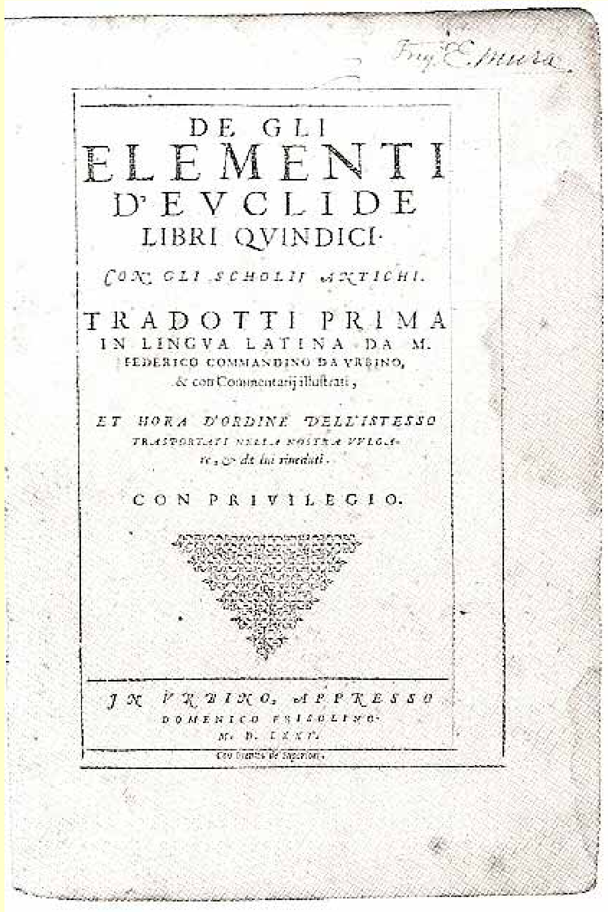
Pietro Borghi, *Libro de abacho*, 1567

Come si pone la matematica abachistica rispetto a quella euclidea? (matematica dei dotti)

La differenza si evidenzia soprattutto in campo geometrico e non solo nei contenuti ma nel metodo.

Euclide affronta teoremi e li dimostra senza far mai ricorso al calcolo. Euclide non ha mai calcolato ad esempio la superficie di una sfera. Invece quella abachistica è una geometria per così dire "calcolistica" che non si propone di dimostrare quanto di calcolare un lato, un'area, un volume, in un contesto di figura di cui siano note le dimensioni numeriche.

Non appare mai la dimostrazione nel senso euclideo del termine, "dimostrare" è sinonimo di "mostrare" e "mostrare" vuol dire ricorrere alla prova. Si hanno tre tipi di prove:


DE GLI
ELEMENTI
D'EVCLIDE
LIBRI QVINDICI.
CON GLI SCHOLII ANTICHI.
TRADOTTI PRIMA
IN LINGVA LATINA DA M.
FEDERICO COMMANDINO DA VRBINO,
& con Commentarij illustrati,
ET HORA D'ORDINE DELL'ISTESSO
TRASPORTATI NELLA NOSTRA VULGA-
RE, & da lui riveduti.
CON PRIVILEGIO.
IN VRBINO, APPRESSO
DOMENICO FRISOLINO.
M. D. LXXV.

Gli elementi di Euclide nella traduzione di Federico Commandino Pesaro 1575

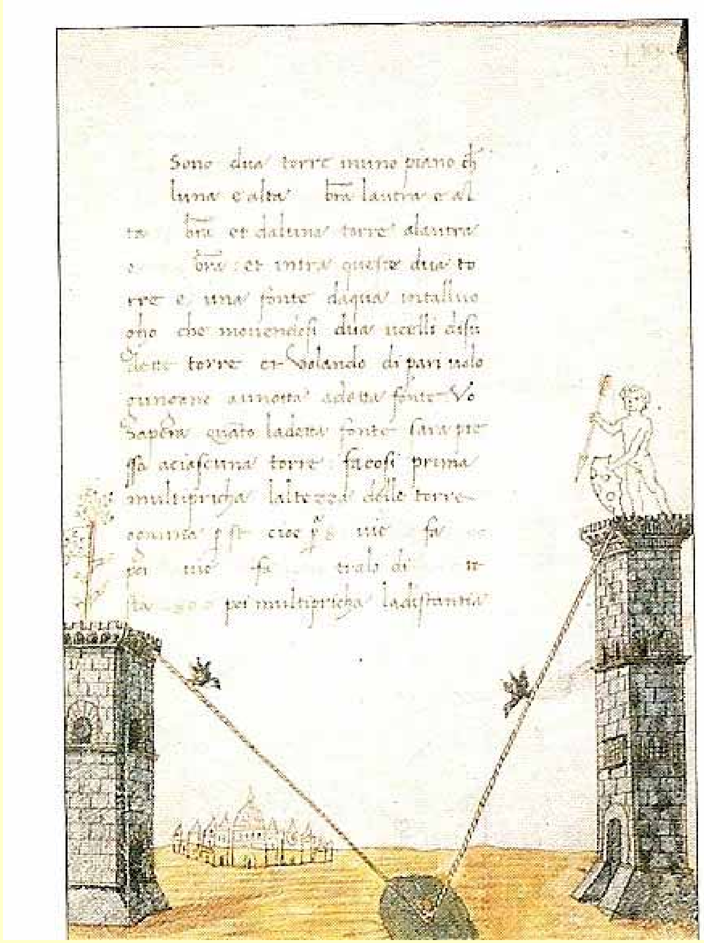
1) Prova delle operazioni aritmetiche, quindi esattezza del calcolo

2) Prova delle “ragioni”. Il verificare che un certo procedimento o metodo è efficace a risolvere un certo problema costituisce per l’abachista un motivo per assumerlo come vero.

   Il Tartaglia descrive bene la situazione: parlando della regola “delle 5 cose” (3 composto) scrive:” questo tal modo è quasi come quello della regola del tre [3 semplice] che per vigor di quelle parole, over di quel ordine che si fa imparare a mente anchor che non sappia la causa di tal ordine quando l’operante con la sperientia l’ha ritrovato più volte vero, lo suppone per cosa certa senza saper altra causa, il medesimo bisogna far di questo ordine da noi formato sopra questa regola del 5”

3) Prova numerica dei teoremi

La dimostrazione è sostituita dalla verifica numerica che viene teorizzata dal Tartaglia come caratteristica del “pratico” nei confronti del “matematico speculativo”. Scrive Tartaglia in riferimento alla traduzione di Euclide da lui fatta in volgare: “ma perché una cosa è il saper speculativamente dimostrare una propositione geometrica ed un’altra è il saperlo essequire over essemplificare e provare attualmente con numeri e radici over con altre quantità irrationali perché la prima parte appartiene solamente al theorico cioè al speculativo e la seconda al pratico”



Aritmetica di Filippo Calandri

Ad esempio Francesco Feliciano da Lasizio, per “dimostrare” l’esattezza della sua formula per calcolare l’area di un segmento circolare ad una base, compone con 4 segmenti circolari e un quadrato un cerchio e mostra con il calcolo che usando la sua formula si ottiene correttamente l’area del cerchio.

Anche la terminologia risente di questa impostazione pratica. Pier Maria Calandri così definisce una frazione: “Dicesi lo numero di sopra “denominato” et quello di sotto “denominante” ma per me in questa opera si dirà quello di sopra o quello di sotto, acciò non si pigli errore nello nominargli”. (*Trattato d’abaco*)

Così in geometria, il triangolo diventa “vela marina”, una figura piana un pezzo di terreno, si chiede di calcolare quanto vino c’è in un tino piuttosto che parlare del volume di un tronco di cono. Il triangolo è uno scudo, il cilindro una colonna, il cono un mucchio di grano.

Il volume di una botte.
Biblioteca riccardiana
Firenze, Ricc. 2669

Un problema di viaggi

Le definizioni sono quindi in qualche modo narrative, così è narrativa tutta la struttura espositiva dei libri d’abaco. La matematica è narrata, più che trattata. I problemi sono episodi di questo racconto della matematica. Compaiono sistematicamente situazioni di persone che trovano borse di denaro, pellegrini che viaggiano, gatti che inseguono topi, fontane che si riempiono e si svuotano. Questo tipo di esposizione è tipico dell’espressione orale.

Un problema di compagnia

?

Ma che tipo di matematica è questa? Se la confrontiamo con la matematica di Euclide è una matematica di serie B? Che valutazione dare dell’abachismo?

Facciamo alcune considerazioni:

1. Cominciamo con una constatazione: se si guarda ai risultati strettamente matematici, alla nascita di nuove teorie, ecc… non si registrano nella matematica abachistica grandi progressi. La *Summa* di Luca Pacioli stampata nel 1494, che riassume tutta la produzione abachistica, non registra sostanziali progressi rispetto al *Liber Abaci* di Leonardo Pisano del 1202. Dal punto di vista dei risultati matematici la *Summa* invece di essere scritta 300 anni dopo potrebbe essere stata scritta 30 anni dopo l'opera di Fibonacci.

   Se si concepisce la scienza come sviluppo di idee che risiedono nella mente di pochi individui (i "geni") che la fanno progredire, e la si misura dai suoi risultati, saremmo costretti a parlare di questo periodo come un periodo di stagnazione.

Ci si potrebbe mettere in un’ottica diversa e chiederci:

agli inizi del Duecento quante erano in Italia le persone che sapevano fare le quattro operazioni, adoperare la regola del tre semplice, arrangiare qualcosa di algebra, misurare distanze, superfici e quante erano le persone nelle stesse condizioni alla fine del 1400? Quanti strumenti, squadri, quadrati e simili, circolavano all’inizio e alla fine dello stesso periodo?

E’ ragionevole pensare che più persone sanno di matematica, più sono le probabilità che qualcuno abbia idee nuove, più strumenti circolano più è facile che vengano perfezionati, che ispirino l’invenzione di altri strumenti.

NON SOLO QUINDI LA SCIENZA DI PUNTA MA LA SCIENZA DIFFUSA.

Sotto questo punto di vista la matematica abachistica ha avuto una grande funzione perché ha determinato una **alfabetizzazione matematica di massa**, prendendo il termine con la dovuta cautela dato i tempi cui è riferito, con la diffusione delle cifre arabe e delle tecniche di calcolo aritmetiche e algebriche.

2. Il fenomeno abachistico, al di là dei risultati strettamente matematici e dei limiti evidenziati, è innanzitutto un evento che ha determinato una lento ma profondo cambiamento culturale, di cui il vero protagonista è il maestro d’abaco. I nomi dei maestri d’abaco sono poco conosciuti perché per secoli non sono stati ritenuti degni di essere ricordati. Solo oggi grazie agli studi di Gino Arrighi e della scuola matematica di Siena della prof.ssa Franci e Toti Rigatelli cominciano ad essere scoperti.

   In cosa consiste questo cambiamento culturale?

   Per la prima volta la matematica entra in modo capillare nelle varie attività professionali. Di quanta matematica ha bisogno un artigliere? Un capitano? Un tecnico di agricoltura, un architetto, un pittore? Sono tutte domande che circolano nei numerosi trattati del Cinquecento.

Il maestro d’abaco aveva la duplice funzione di maestro e di libero professionista.

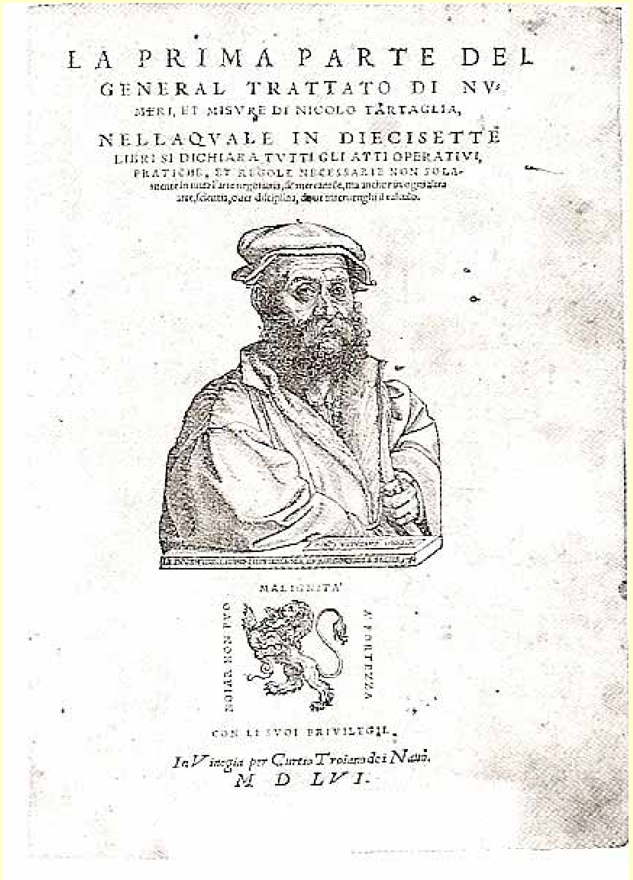
Come professionista il suo campo d’azione comprendeva: tenuta e controllo della contabilità, stime e perizie, rilievi topografici per il catasto, opere varie inerenti l’architettura e l’ingegneria ad es. livellazioni per bonifiche, canalizzazioni

Il grande Tartaglia, fu maestro d’abaco a Verona per molti anni, fu perito contabile in una causa e come ricorda nel *General Trattato* ebbe l’incarico di revisionare le tabelle dei fornai che servivano a determinare il peso di un soldo di pane in funzione del costo unitario della farina, in quanto al tempo della carestia il costo della farina aveva superato il valore previsto dalle vecchie tavole

Lo stesso Fibonacci ebbe l’incarico di tenere il “Libri della ragione” della città di Pisa.

L’uso della matematica nelle professioni porta a dei risultati positivi, talvolta imprevisti, in campo strettamente scientifico.

Scrive il Tartaglia nel *General Trattato*: “le dimande , quesiti, over interrogationi…fanno molte volte considerare allo interrogato molte cose e anchora conoscerne molte altre…Questo dico per me, qual mai feci professione, over dilettai de tirare di alcuna sorte, artiglieria, archibuso, bombarda, né schioppo (né manco tirar intendo) e un sol quesito fattomi da un perito bombardero l’anno 1531 in Verona, mi fece a quel tempo considerare e investigare speculativamente l’ordine e proportione di tiri propinqui e lontani, secondo le varie ellevationi de tale macchine tormentarie”.

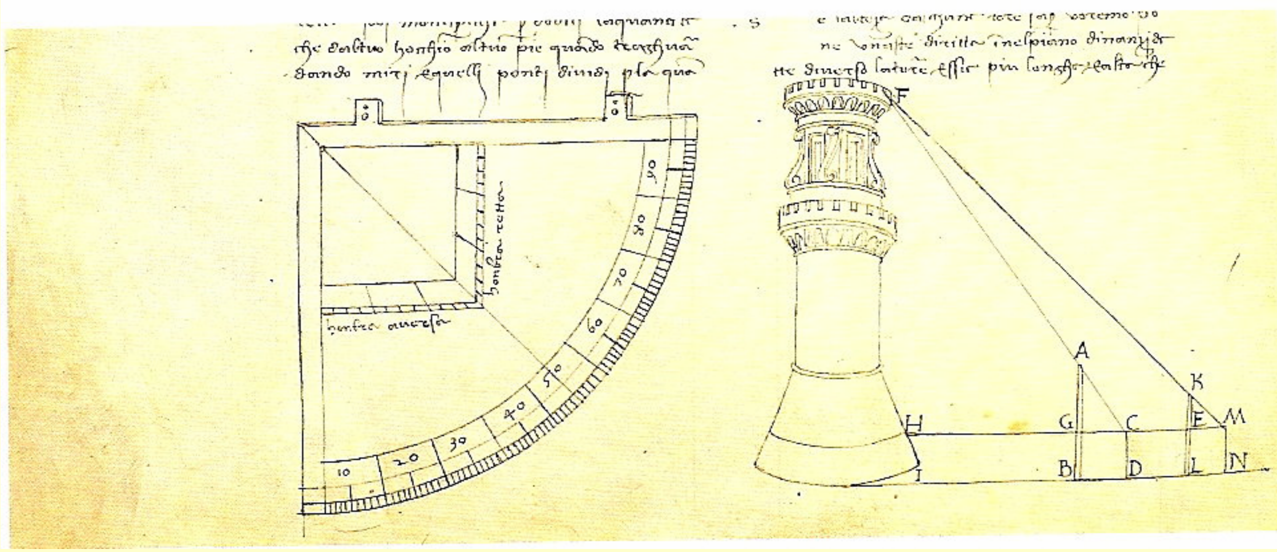

LA PRIMA PARTE DEL
GENERAL TRATTATO DI NV-
MERI, ET MISVRE DI NICOLO TARTAGLIA,
NELLAQVALE IN DIECISETTE
LIBRI SI DICHIARA TVTTI GLI ATTI OPERATIVI,
PRATICHE, ET REGOLE NECESSARIE NON SOLA-

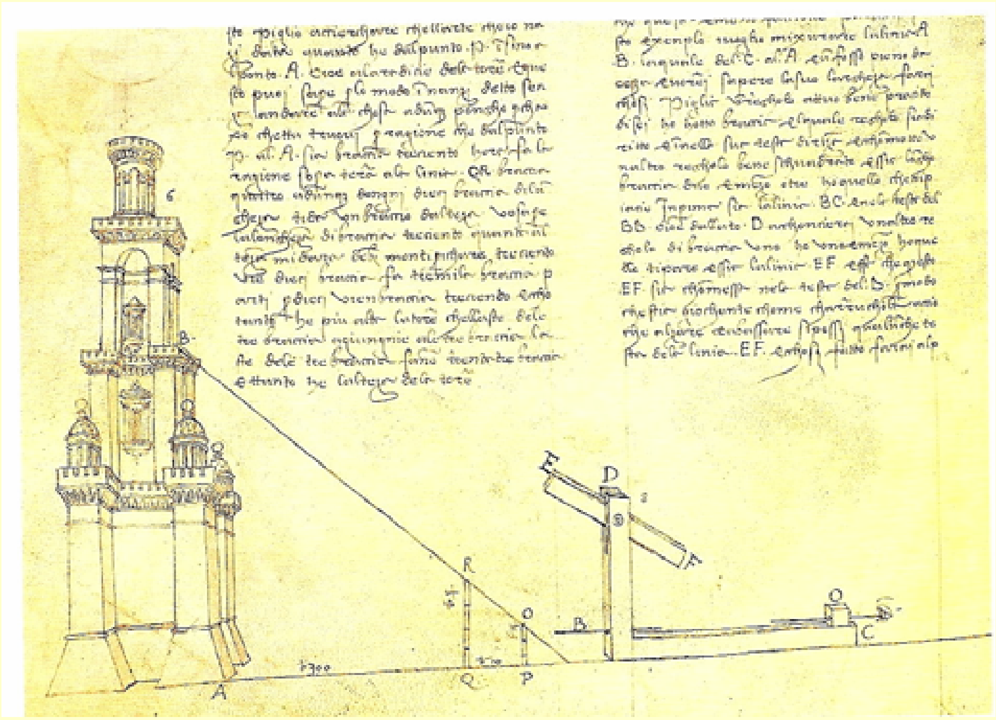
MALIGNITA'

CON LI SVOI PRIVILEGII.
In Vinegia per Curtio Troiano dei Navò.
M D L V I.

Nicolò Tartaglia, *General Trattato di numeri et misure*, Venezia 1556

C’è inoltre da dire che l’ambiente abachistico contribuì molto allo sviluppo degli strumenti di misura anche se prevalentemente nel campo dell’agrimensura, dei rilievi topografici e noi sappiamo che il metodo sperimentale è il metodo della scienza moderna.





Tutto ciò rivela che si sta consolidando una cultura che creerà le premesse e l’ambiente favorevole allo sviluppo della scienza moderna.

D’altra parte oggi gli studiosi siano d’accordo nel riconoscere alla rivoluzione scientifica dei connotati rivoluzionari per quanto riguarda i suoi esiti conoscitivi, operativi, ma anche nel toglierne quel carattere di capovolgimento improvviso e rapido che si conviene ad ogni evento rivoluzionario.

Galileo Galilei

3. Ma torniamo alla domanda iniziale, che tipo di matematica è quella abachistica, una matematica di serie B?

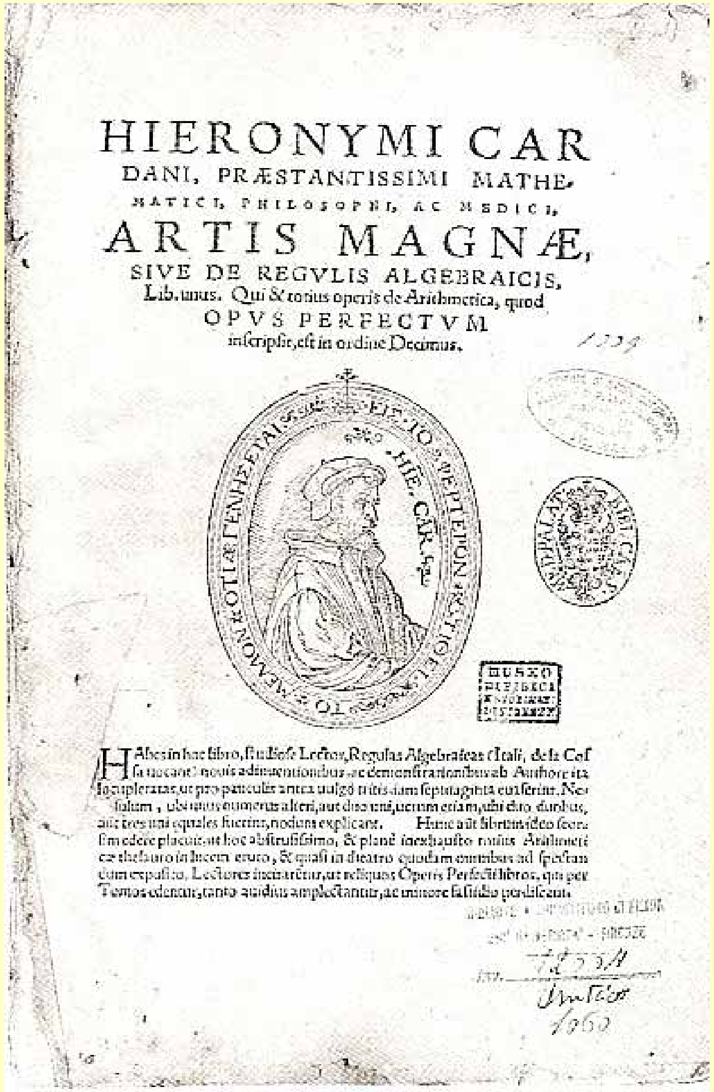
   Abbiamo detto che la matematica abachistica è una matematica pratica. E' vero, ma scorrendo i libri d'abaco si incontrano numerosi problemi che nulla hanno a che fare con esigenze professionali. C'è nei migliori abachisti il gusto del problema, delle sue complicazioni, dei casi "curiosi"; soprattutto c'è lo studio dell'algebra che non aveva nulla a che fare con la pratica ma era il segno distintivo dell'abilità del maestro.

   La matematica abachistica è capace di fare ricerca ma la fa sui problemi. Il problema è il motore della ricerca, sia nel campo dell'algebra che in quello della geometria

   E' una matematica induttiva, non deduttiva, che parte dal caso singolo e tende a trovare regole che funzionano all'interno di una certa casistica, più che a dimostrare o generalizzare in forma logica quanto trovato. E' una matematica che, per risolvere problemi, procede provando e riprovando, a tastoni, come dice il Pacioli a proposito delle formule risolutive delle equazioni di grado superiore al 2°.

Fra i meriti delle scuole d’abaco va messo lo sviluppo e la diffusione dell’algebra in Italia.

L’abachismo ha determinato le premesse al primo vero grande evento che ha segnato il superamento della matematica classica: la scoperta, nella prima metà del Cinquecento, delle formule risolutive delle equazioni complete di 3° e 4° grado, ad opera degli algebristi italiani Scipione dal Ferro, professore all’Università di Bologna, di Nicolò Tartaglia, maestro d’abaco, Gerolamo Cardano, professore all’Università di Padova e Ludovico Ferrari suo discepolo.



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Girolamo Cardano, *Ars Magna*, Norimberga 1545

In che senso la matematica abachistica ha contribuito in modo consistente allo sviluppo dell'algebra?

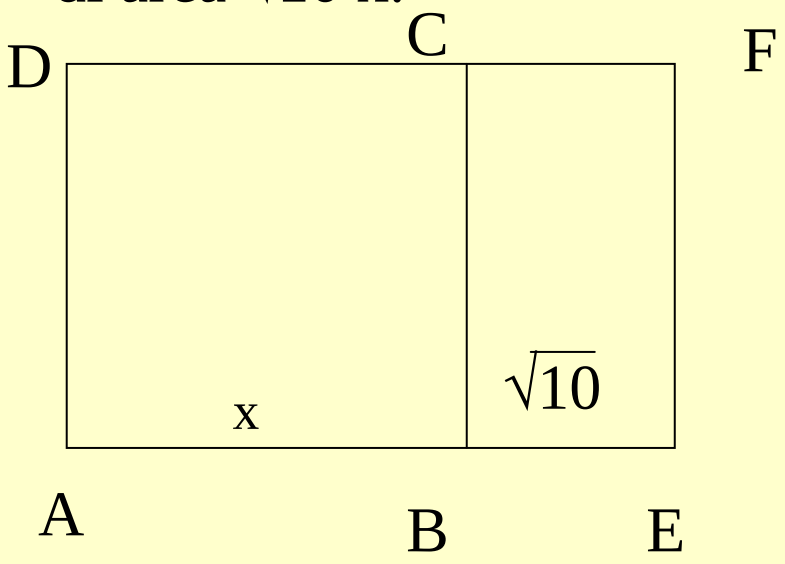
Perché ha inciso su due aspetti fondamentali.

1) **La risoluzione delle equazioni sulla base di formule che agiscono sui coefficienti**. Si conoscevano le equazioni di 1° e 2° grado e di ordine superiore nei casi particolari: equazioni binomie e trinomie

La tradizione classica "teorica" risolveva le equazioni per via geometrica. Il che rendeva difficile il procedimento e non alla portata di tutti.

Risoluzione geometrica di un’equazione di 2° grado

Ad esempio per risolvere geometricamente l’equazione $x^2+\sqrt{10}\,x = 9x$, si considerava un segmento AB = x per cui x^2 = area ABCD, si prendeva BE = $\sqrt{10}$ e si costruiva il rettangolo BEFC di area $\sqrt{10}\,x$.



Il primo membro dell’equazione è l’area del rettangolo AEFD che è 9x. Visto che AD = x allora AE=9 per cui AB = x = 9- $\sqrt{10}$ che è la soluzione non nulla.

Gli abachistici risolvono invece le equazioni alla maniera nostra con una formula che fa riferimento ai coefficienti dell’equazione.

2° risultato importante ottenuto dall’abachismo nel campo dell’algebra è stato l’avviamento al simbolismo algebrico, che è stato l’elemento fondamentale che ha permesso l’enorme sviluppo che poi l’algebra ha avuto.

Nelle scuole d’abaco l’algebra era espressa in forma retorica cioè le formule risolutive erano espresse a parole ma si verificano i primi tentativi per arrivare alla forma simbolica passando attraverso la forma sincopata.

Esempio di risoluzione retorica.

“Quando i censi e le cose sono equali al numero [$ax^2+bx=c$], se vole recare a uno censo [$x^2+b/a\,x = c/a$], poi demeççare le cose [$b/(2a)$] e quello demeççamento montiplicare in sé [$(b/(2a))^2$] e ponere sopra il numero [$(b/(2a))^2+c/a$] e la radici de la somma meno il demeççamento de le cose vale la cosa.

[$x = \sqrt{(b/(2a))^2+c/a} - b/(2a)$]”

Da notare che nella formula, che è corretta,

manca la soluzione negativa

$x = -\sqrt{(b/(2a))^2+c/a} - b/(2a)$

Piero della Francesca, *Trattato d’abaco*

All’algebra **“retorica”** fa seguito l’algebra **“sincopata”** in cui vengono introdotte delle abbreviazioni. L’abbreviazione delle parole è tipico della scrittura medioevale. Esempio:

p per più; *m* per meno ; *ae* per aequalis; *mca* o *via* o v^a per multiplica; *n°* per numero (cioè termine noto); *co* per cosa cioè x; *ce* per censo cioè x^2; *cu* per cubo cioè x^3; *cece* per x^4 ecc..

Rx per radice quadrata; *RxRx* per radice quarta.

Ecco come Pacioli illustra l’esecuzione del prodotto $(3-\sqrt{5})(6-\sqrt{20})$

“Multiplica 3mRx5 via 6mRx20… troverai che farà 18 m Rx180 m Rx180 p Rx100 che in tutto recato a minore denominatore vol dire 28 m Rx720”

L’ultima fase è quella **dell’algebra “simbolica”.**

Tale stadio fu raggiunto soprattutto grazie all’opera di François Viète (1540-1603). Il nostro attuale simbolismo è dovuto a Cartesio (1596-1650).

Tuttavia anche nell’ambito abachistico non mancano indizi di una timida introduzione di simboli. Ad esempio in Piero della Francesca e altri.

$\overline{\mathbf{3}}$ per $3x$; $\overset{\square}{\mathbf{3}}$ per $3x^2$; $\overset{\square\square}{\mathbf{3}}$ per $3x^4$; $\mathbf{3}^{\mathbf{c}}$ per $3x^3$.

RAFFAELE CANACCI (Sec. XIV)

Termine noto = n°

x = co

x^2 = □

x^3 = □□

x^4 = □ □

x^5 = □□ □

x^6 = □□ □□

ECCO COME CANACCI MOLTIPLICA I DUE POLINOMI IN COLONNA

$2x^3+3x^2+4x+5$ e $6x^3+7x^2+8x+9$

□□	□	co		
2	3	4	e	5n°
□□	□	co		
6	7	8	e	9n°

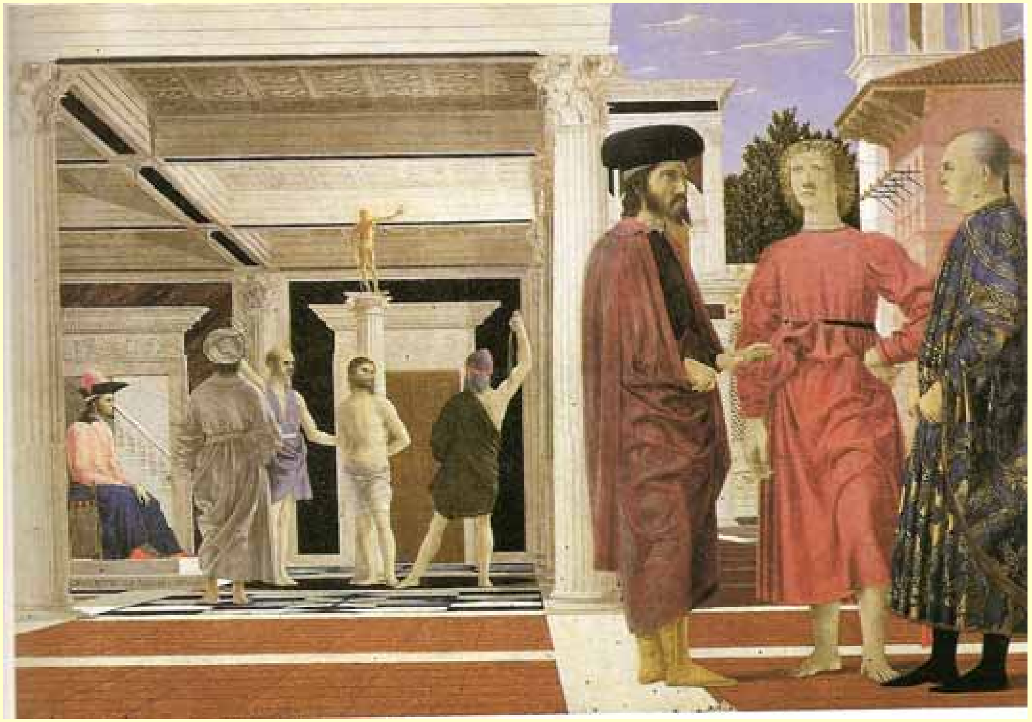
□□ □□	□□ □	□ □	□□			
12	18	24	30			
				□		
	14	16	28	35		
					co	
		21	24	32	40	
			18	27	36	45n°
□□ □□	□□ □	□ □	□□	□	co	
12	32	61	100	94	76	45n°

$12x^6+32x^5+61x^4+100x^3+94x^2+76x+45$

Ma anche nel campo della risoluzione delle equazioni si registrano dei tentativi di risolvere le equazioni di grado superiore al 2°, ottenendo in qualche caso dei risultati apprezzabili.

Ad esempio Piero della Francesca nel *Trattato d’abaco* dà una formula per risolvere un problema di capitalizzazione in tre anni, che si traduce in un’equazione di 3° grado completa, formula che è valida qualunque siano i dati iniziali di partenza.

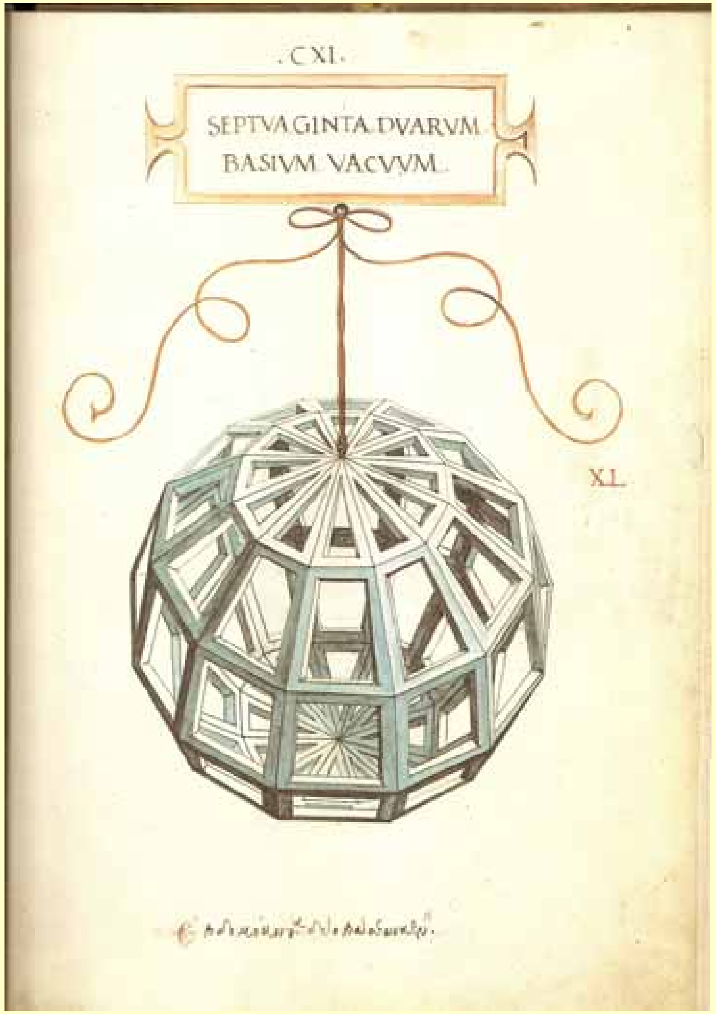
Anche in campo geometrico la matematica abachistica dimostra di essere in grado di fare ricerca e di ottenere risultati che talvolta vanno oltre Euclide.



Piero della Francesca, *Flagellazione di Cristo*, Urbino Galleria Nazionale delle Marche

Ad esempio Piero della Francesca (1420 circa- 1492) nel *Libellus de quinque corporibus regularibus* considera l’inclusione dell’icosaedro in un cubo di lato assegnato, caso non presente nel libro XV degli *Elementi*.

La cosa è degna di essere ricordata se non altro perché il Tartaglia nel suo commento agli *Elementi* di Euclide del 1548, alla fine del XV libro, si attribuisce il merito di aver trovato altre due inclusioni di poliedri regolari oltre alle dodici già considerate negli *Elementi*, quella dell’ottaedro nell’icosaedro e quella appunto dell’icosaedro nel cubo.



Disegno di Leonardo da Vinci per il ms. *De divina Proportione* di Luca Pacioli, 1498

Nella quarta parte del *Libellus* Piero tiene a farci sapere di essere riuscito a fare meglio di Giovanni Campano da Novara, autorevole commentatore di Euclide del XIII secolo, autore di una traduzione degli *Elementi* dall'arabo in latino, la prima ad essere stampata nel 1482 e usatissima nel corso del Medioevo e del Rinascimento.

Si tratta della superficie e del volume del solido a 72 facce che Campano non calcola: la sua superficie è formata da 24 triangoli isosceli e da 48 trapezi isosceli, il volume è la somma dei volumi delle corrispondenti 24 piramidi a base triangolare e delle 48 a base trapezoidale aventi tutte il vertice nel centro della sfera circoscritta al solido.

Superficie:

$$\sqrt{540}+\sqrt{2160+\sqrt{248832}+\sqrt{2239488}}+\sqrt{3996+\sqrt{3048192}+\sqrt{5038848}}$$

Volume : la somma delle 3 quantità seguenti

$$\sqrt{\sqrt{162800}+360+\frac{14}{15}}$$

La radice quadrata di

$$\sqrt{2224432+\frac{80}{121}}+\sqrt{2764800}+\sqrt{2359296}+1614+\frac{6}{11}-\sqrt{2538+\frac{102}{121}}-\sqrt{2166+\frac{174}{363}}$$

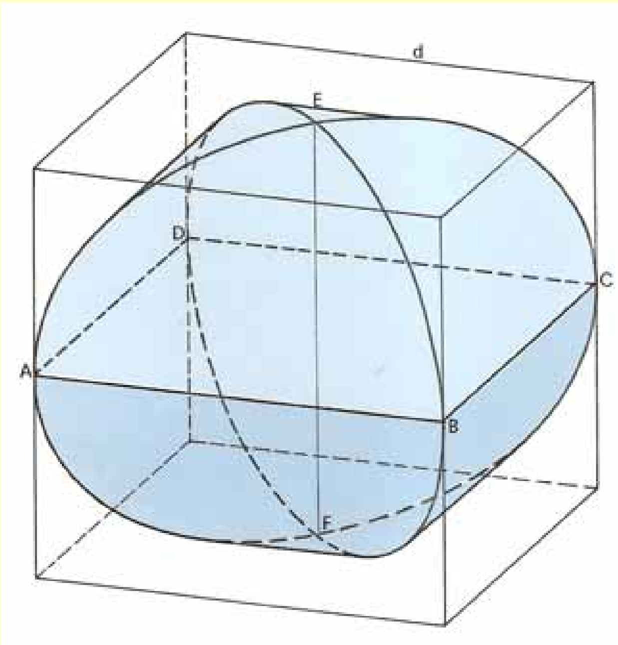
La radice quadrata di

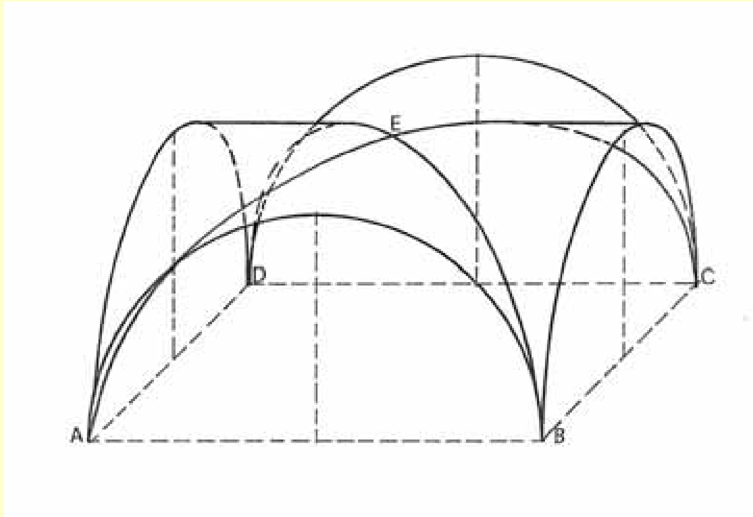
$$\sqrt{2665175+\frac{97}{121}}+\sqrt{1612266+\frac{102}{121}}+\sqrt{9462528}+\sqrt{2985984}+\sqrt{1806336}+\sqrt{425770+\frac{114}{363}}$$

+

$$+\sqrt{134355+\frac{69}{121}}+\sqrt{81276+\frac{300}{363}}-\sqrt{703824+\frac{48}{121}}-\sqrt{222097+\frac{119}{121}}-\sqrt{134355+\frac{69}{121}}+2906+\frac{2}{11}$$

Segnalo come ulteriore esempio di ricerca, ancora ad opera di Piero della Francesca, i calcoli del volume della volta a padiglione e della superficie della volta a crociera ottenuti con procedimenti analogico- intuitivi che richiamano Archimede e che, controllati con il calcolo integrale, risultano corretti. Sono risultati assolutamente originali che finora dobbiamo attribuire a Piero.





Superficie = $4r^2(\pi - 2)$

Volume doppia volta = $2/3\ d^3$

Il volume della volta a padiglione

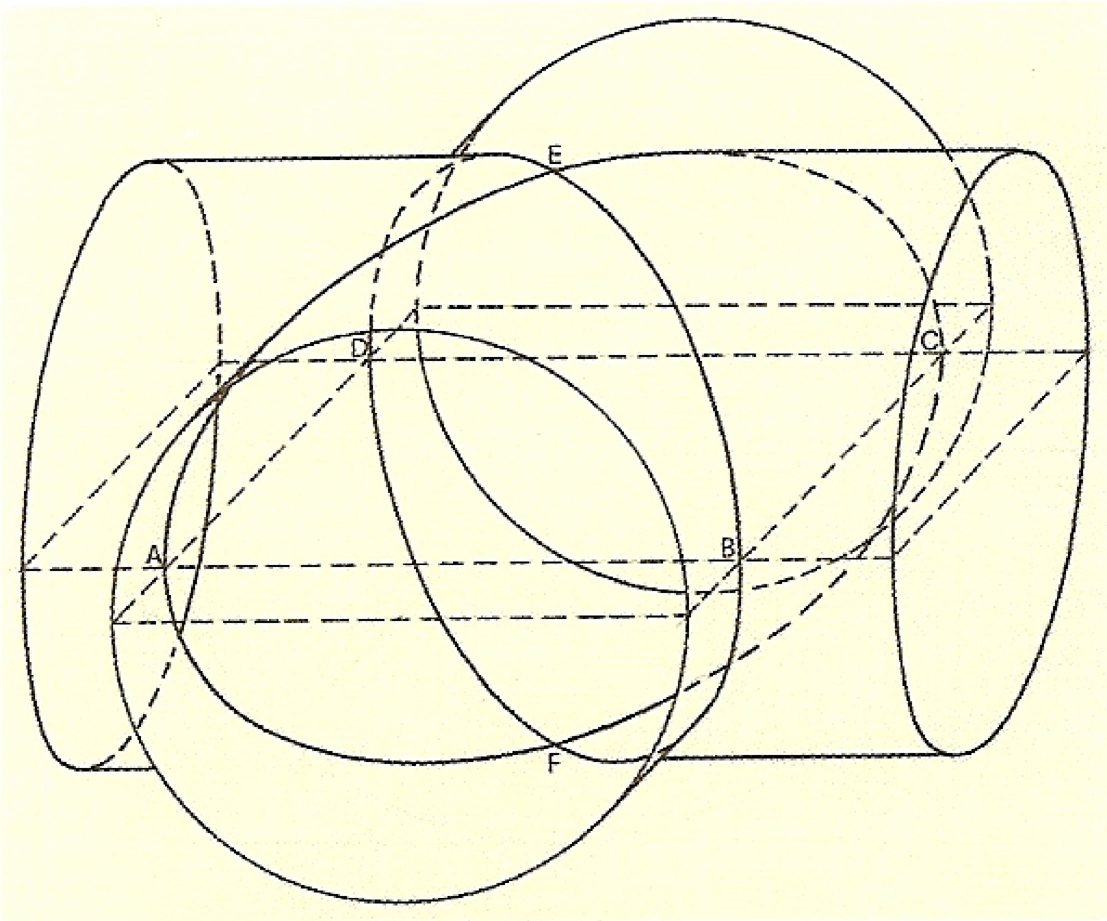


Fig. 1

Piero affronta il problema di calcolare il volume dell'intersezione di due cilindri di diametro 4 fra loro perpendicolari.Tale volume risulta il doppio di quello di una volta a padiglione. Piero usa la formula seguente:

$$V = \frac{2}{3} d^3$$

dove d è il diametro comune ai due cilindri

Procedimento di Piero

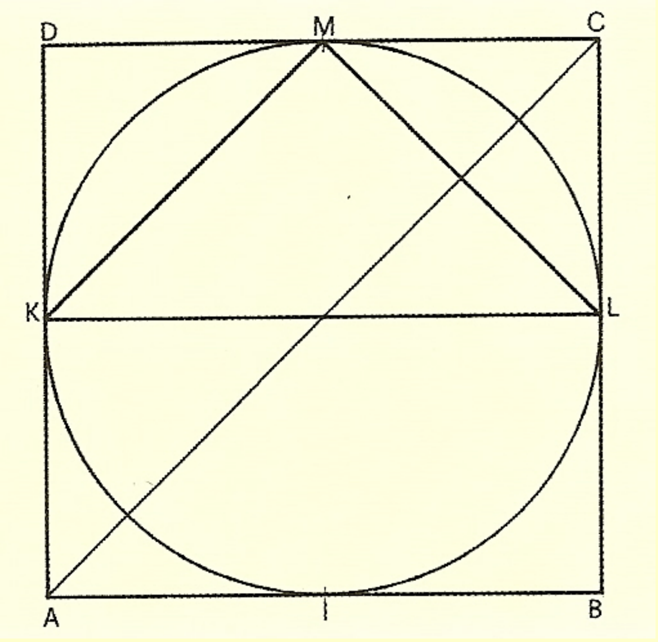
In via del tutto eccezionale rispetto alle abitudine dei “pratici”, Piero accenna ad una spiegazione, della formula usata. Considera il quadrato ABCD di lato 4, pari al diametro del cilindro, il cerchio in essa inscritto KLMI e il triangolo KLM. Poi il rettangolo TVXY che ha per lati VX = 4 e TV uguale alla diagonale AC del quadrato ABCD. Tale rettangolo è circoscritto all’ellisse OPQR che a sua volta circoscrive il triangolo PQR. Valgono le seguenti relazioni

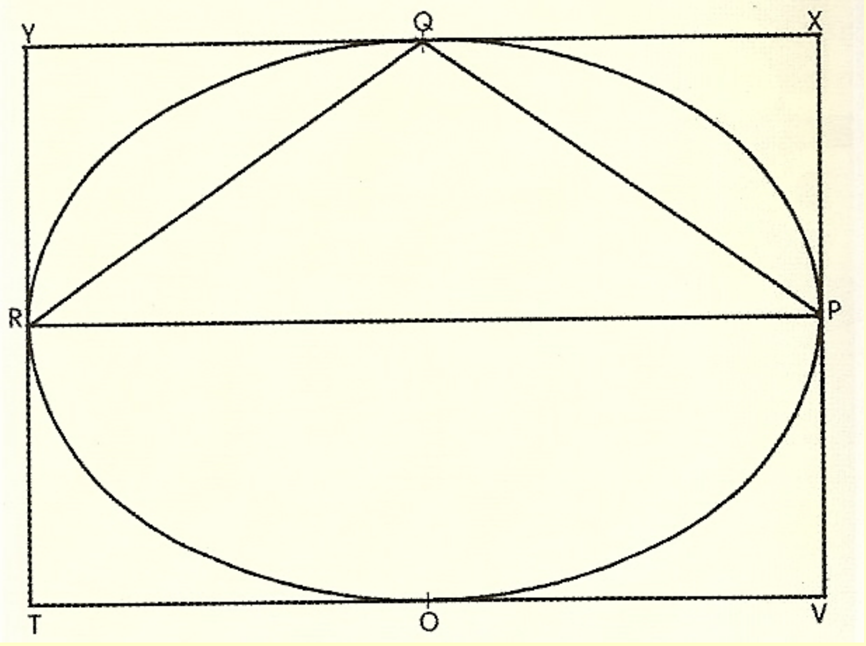
(1) Area(ABCD) : Area(TVXY) = Area (cerchio) : Area(ellisse)

(2) Area(KLM) : Area(PQR) = Area(ABCD) : Area(TVXY)

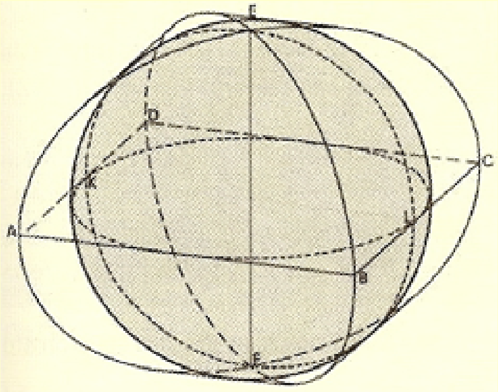
Dalle precedenti deduce la proporzione:

(3) Area(KLM) : Area(cerchio) = Area(PQR) : Area(ellisse)

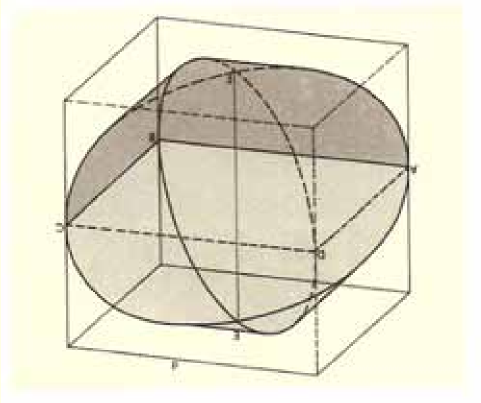




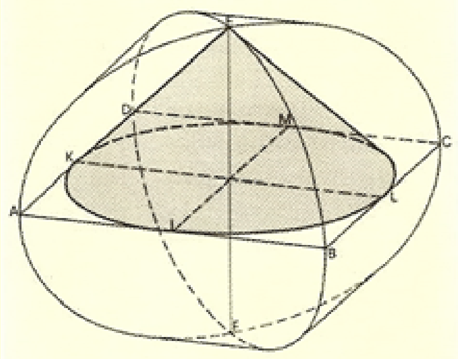
Piero considera poi le quattro figure solide seguenti che fa in qualche modo “corrispondere” alle figure piane considerate prima



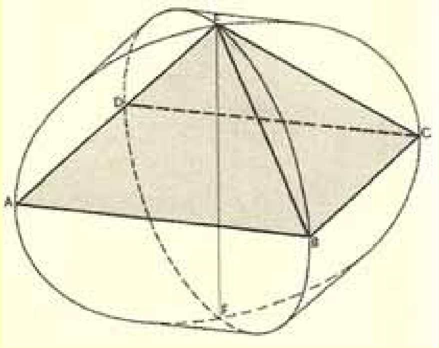
Al cerchio fa corrispondere la sfera



all’ellisse fa corrispondere il solido



al triangolo KLM inscritto nel cerchio fa corrispondere il cono

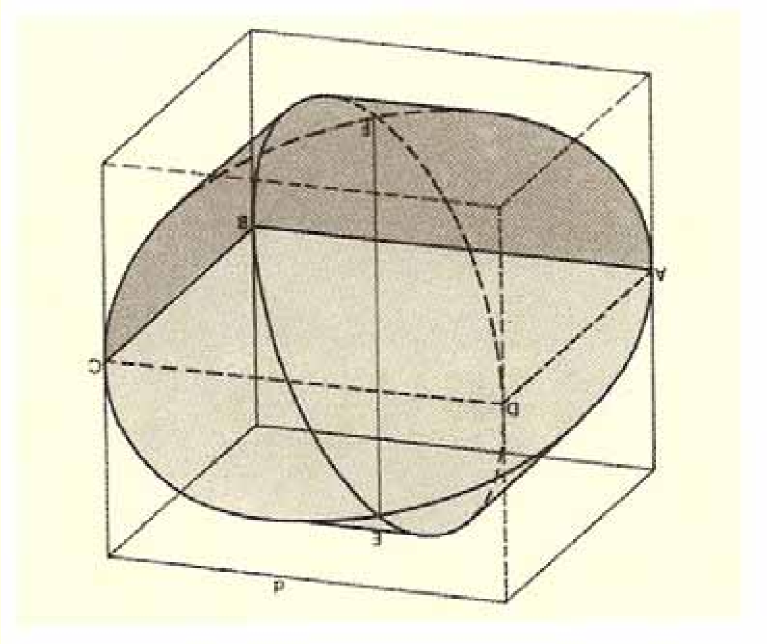


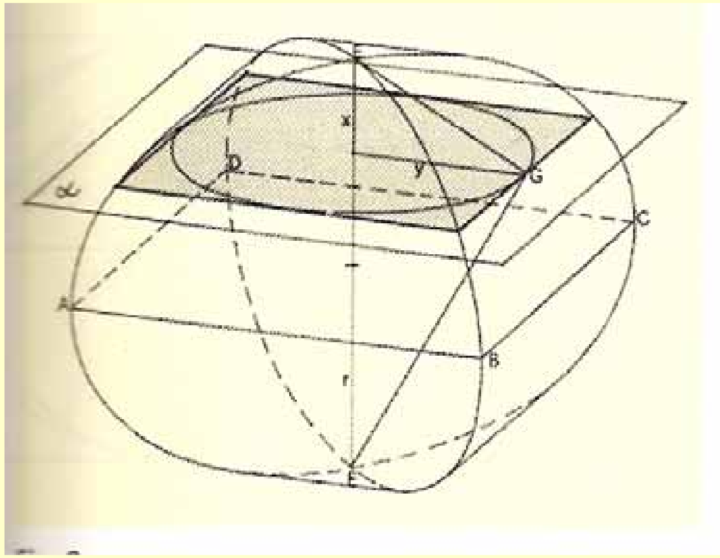
al triangolo PQR inscritto nell’ellisse fa corrispondere la piramide

Piero generalizza a queste figure solide, senza giustificazione alcuna, la relazione (3) considerata fra le figure piane, cioè Area(PQR) : Area(ellisse)= Area(KLM) : Area(cerchio) arrivando alla conclusione seguente:

Volume (piramide) : Volume (doppia volta) = Volume (cono) : Volume (sfera)

Da cui si ricava il volume della doppia volta





Indicando con x la distanza del piano sezione dal punto E, con y il raggio del cerchio sezione e con R il raggio della sfera, si ha, per il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo EFG, che

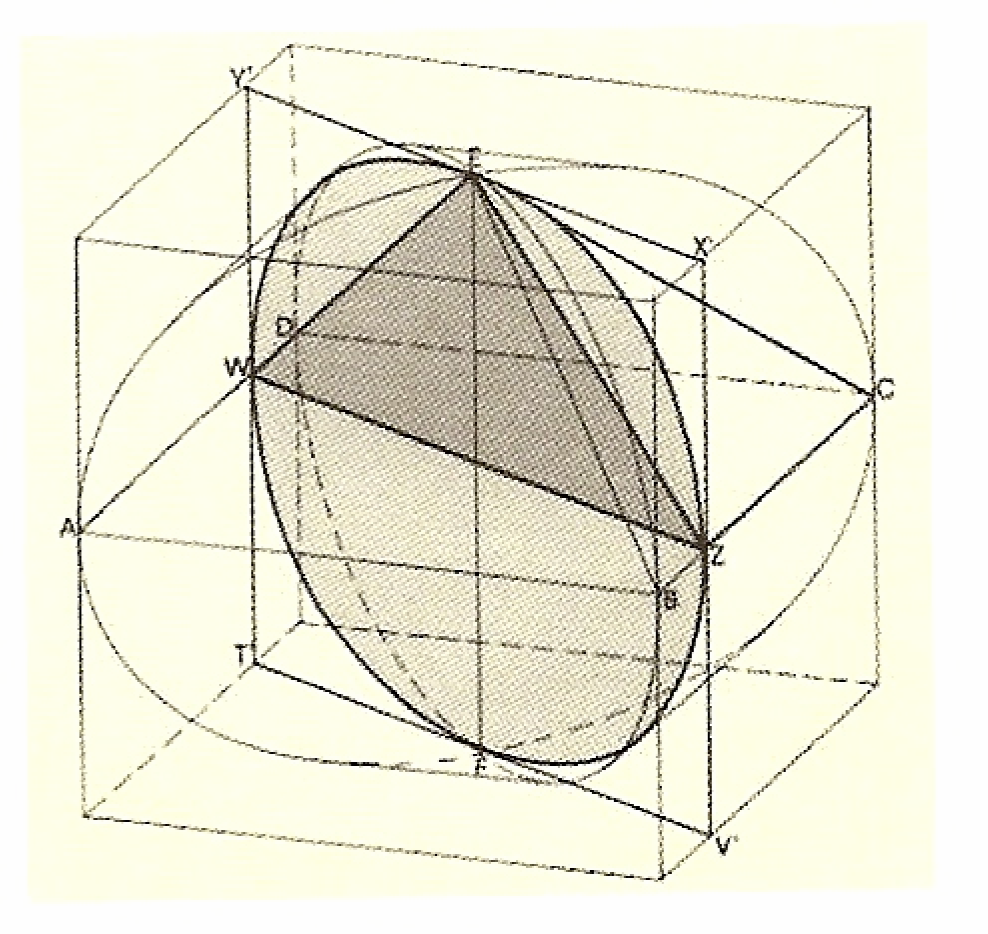
$y = \sqrt{x(2R - x)}$ per cui l'area del quadrato sezione è $(2y)^2 = 4x(2R - x)$

Allora il volume della doppia volta è

$$V = \int_0^{2R} 4x(2R - x)dx = \frac{16}{3}R^3 = \frac{2}{3}d^3$$

Il problema di calcolare il volume del solido intersezione di due cilindri fra loro perpendicolari dello stesso diametro è enunciato e dimostrato nel *Metodo* di Archimede. Ma il *Metodo* è rimasto sconosciuto per secoli, è venuto alla luce solo nel 1917 ad opera di Heiberg, ma purtroppo la dimostrazione del teorema è andata perduta. Ad oggi non abbiamo nessuna prova che ai tempi di Piero il Metodo fosse noto, per cui non abbiamo nessuna evidenza circa la possibile fonte da cui Piero può avere attinto.

Ipotesi sul procedimento seguito da Piero



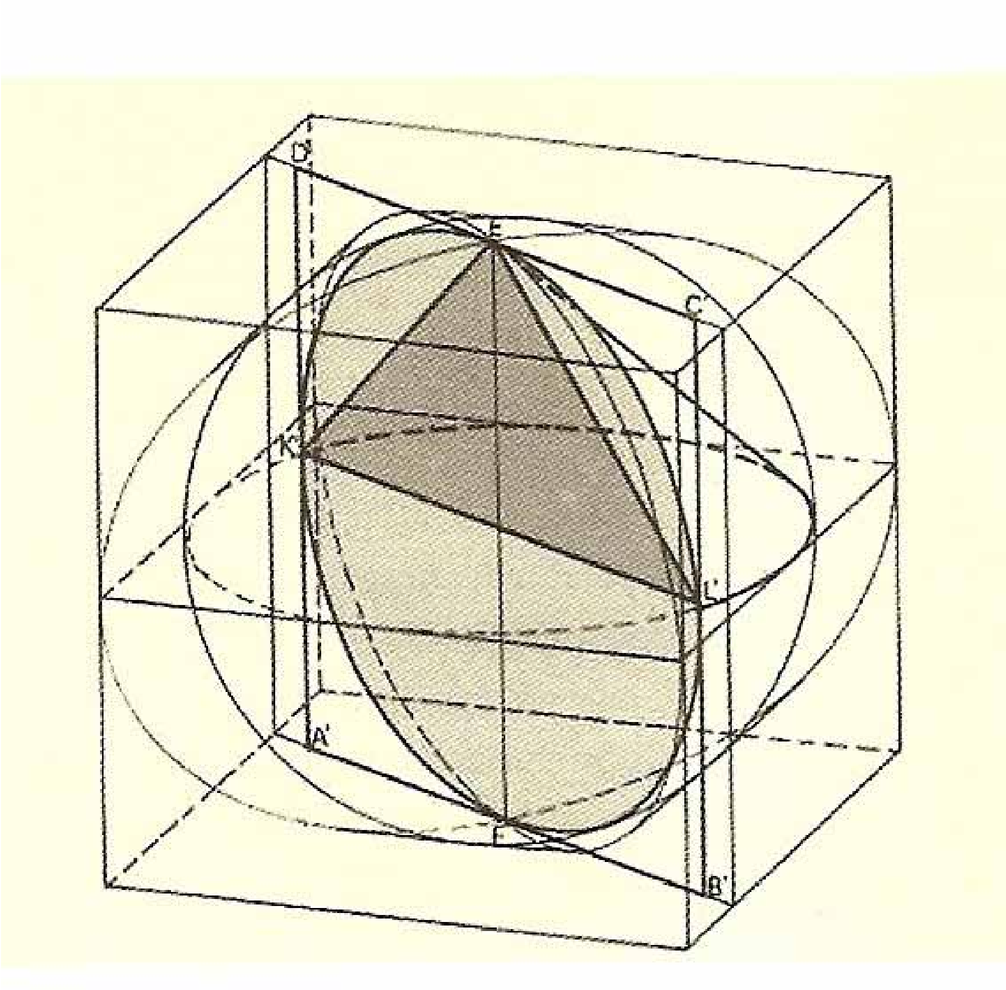
Al variare del piano nel fascio di asse EF la regione piana delimitata dall'ellisse descrive la doppia volta

Considero un piano del fascio di asse EF, esso seziona:

- la volta secondo una ellisse di asse minore EF e asse maggiore variabile i cui estremi W e Z scorrono lungo il contorno del quadrato ABCD. Il piano infatti taglia la doppia volta su due vele opposte che fanno parte dello stesso cilindro le cui sezioni piane sono ellittiche.

- Il cubo circoscritto secondo il rettangolo T'V'X'Y' circoscritto all'ellisse

- La piramide di vertice E e base ABCD secondo il triangolo EWZ inscritto nell'ellisse.



Il piano del fascio taglia inoltre:

• La sfera inscritta nella doppia volta secondo una circonferenza EK’FL’inscritta nel quadrato A’B’C’D’ di lato d

• il cono secondo il triangolo EK’L’

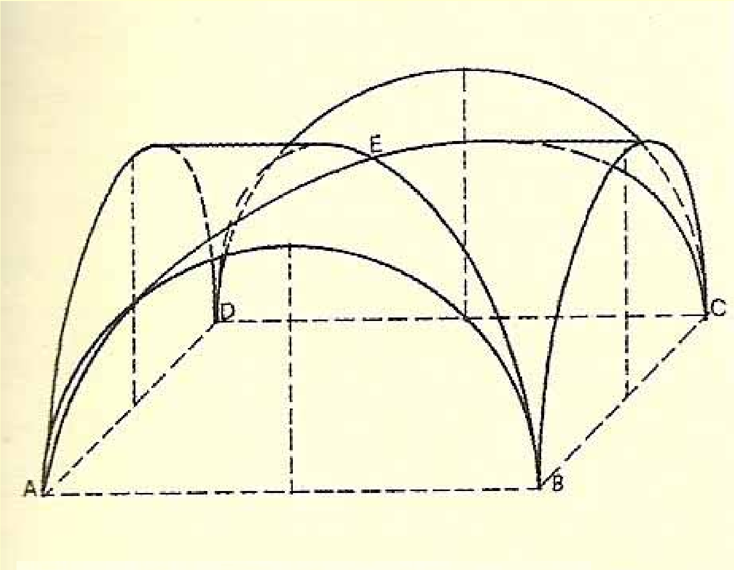
Fra tutte queste sezione vale la relazione considerata da Piero cioè:

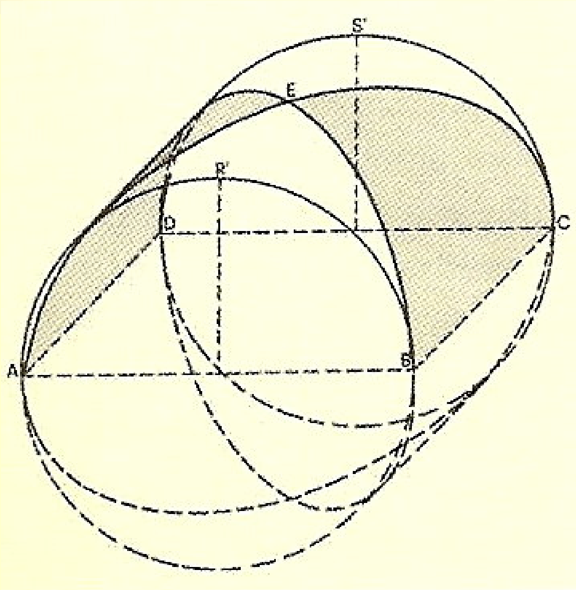
Area (EK’L’):Area(cerchio) = Area (EWZ): Area (ellisse)

Piero deve aver pensato giustamente che tale proporzione restasse valida anche per le figure solide di cui quelle piane sono sezione cioè

Volume(cono) : volume(sfera) = volume(piramide):volume (doppia volta)

La superficie della volta a crociera





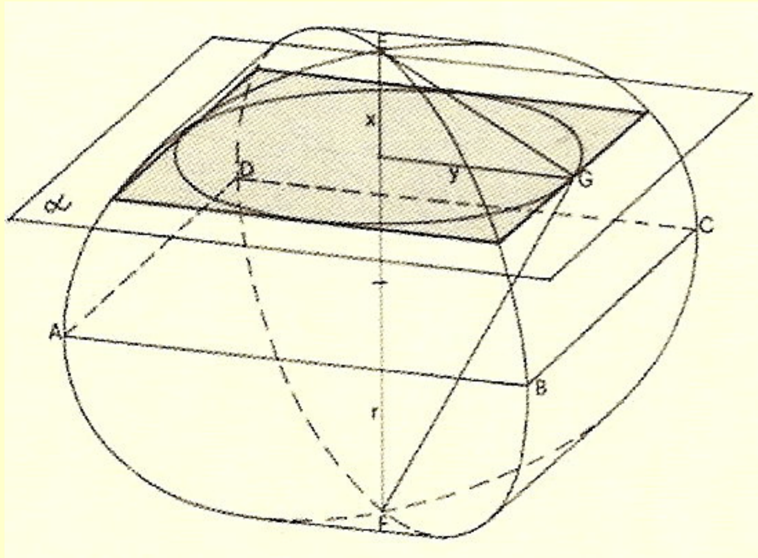
Piero osserva che la superficie della volta a crociera si ottiene togliendo dal cilindro la superficie della volta a padiglione.

Per calcolare la superficie della volta a padiglione, avendo calcolato il suo volume, Piero enuncia, senza nessuna giustificazione, la seguente relazione

$S_p = 3V_p/r$ che è corretta e risolve il problema.

Per giustificare la formula $S_p = 3V_p /r$ (1) si può ipotizzare che indicando con V e S il volume e la superficie della semisfera di raggio r , Piero assuma la relazione seguente $V/S= V_p/S_p$ (2) ma essendo $V/S = r/3$ ne segue $S_p = 3V_p /r$.

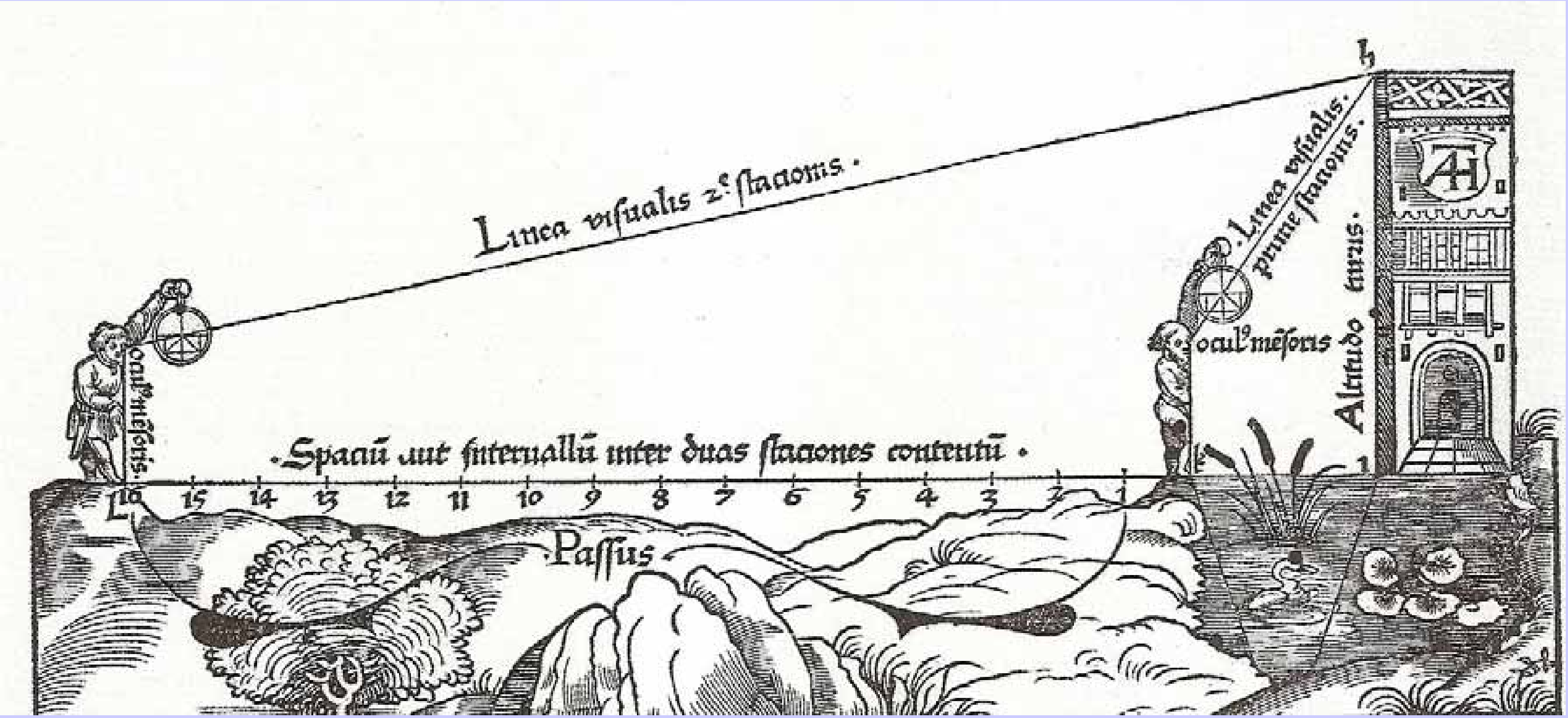
Per giustificare la (2) si può considerare che tagliando la volta a padiglione con



piani paralleli al piano ABCD si ottengono come sezioni dei quadrati i cui vertici variano sulle due costole semiellittiche AEC e DEB. Tali piani tagliano la semisfera inscritta nella volta secondo dei cerchi inscritti nei suddetti quadrati. La somma di tutti questi quadrati dà il volume della volta a padiglione e i loro contorni descrivono la superficie della volta, la somma dei cerchi descrive la sfera e le circonferenze la superficie sferica. Per ogni sezione piana vale la seguente relazione, facile da dimostrare:

Area(quadrato):perimetro(quadrato)= Area(cerchio): perimetro(circonferenza).

E' ragionevole pensare che la stessa relazione valga per i solidi e le loro superfici che generano tali sezioni, cioè la (2)



Grazie per l’attenzione

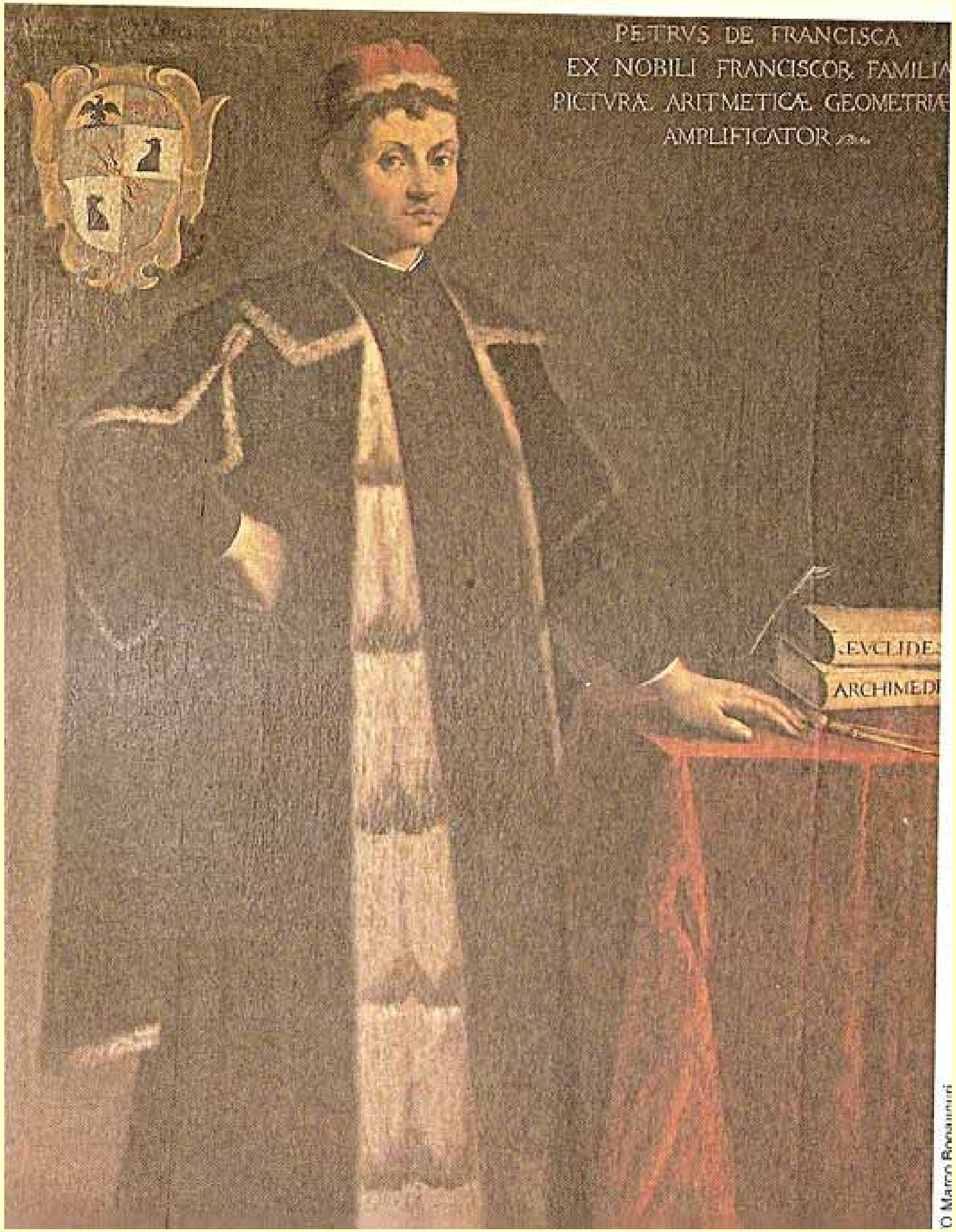
Bibliografia

E. Gamba – V. Montebelli, *La matematica abachistica tra ricupero della tradizione e rinnovamento scientifico*, in “Cultura, scienze e tecniche nella Venezia del Cinquecento, Atti del Convegno internazionale di studio su Giovan Battista Benedetti e il suo tempo”. Istituto Veneto di scienze, lettere e arti, Venezia 1987, pp.169-202

V. Montebelli, *Ex falsis verum. Il metodo della falsa posizione, semplice e doppia, nell’ambito della matematica abachistica del Medioevo e del Rinascimento*, in “Quaderni dell’Accademia fanestre”, 3/2004, pp. 191-230

E. Gamba-V. Montebelli, *La matematica di Piero della Francesca*, in “Lettera matematica pristem 59”, Centro Eleusi, Università Bocconi, pp. 49-59

E. Gamba- V. Montebelli, *Piero della Francesca matematico*, in “Le scienze”, numero 331, marzo 1996



Ritratto di Piero della Francesca attribuito a Santi di Tito, probabilmente eseguito nel tardo Cinquecento.

Reca la scritta:“Petrus de Francisca ex nobili Franciscorum familia, picturae, aritmeticae, geometriae amplificator”.

Sembra che l’autore intenda celebrare Piero più come matematico che come artista, come d’altronde fa Giorgio Vasari nelle sue *Vite de’ più eccellenti scultori, pittori et architettori*. Sono eloquenti le opere di Euclide e di Archimede sul tavolo.