Università di Bologna - Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA PER LE APPLICAZIONI A.A. 2015/16 - N1

1. Si consideri il sistema di equazioni polinomiali

$$\begin{cases} 2y^2 + 8yz + 3z^3 + 18z^2 + 12z + 3 = 0 \\ x^4 - 4x^2y - 4y^2 - 28yz + 3z^3 - 9z^2 + 12z + 3 = 0 \\ 5x^4 - 20x^2y - 60yz + 9z^3 - 9z^2 + 36z + 9 = 0\,. \end{cases}$$

   a) Utilizzando il metodo di eliminazione, si determinino tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{R}$.
   b) Si dimostri che il sistema ha un numero finito di soluzioni in $\mathbb{C}$.
   c) Si determinino tre polinomi $f, g, h \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ tali che il sistema di equazioni $f = g = h = 0$ abbia le stesse soluzioni in $\mathbb{Q}$ del sistema su scritto, ma i due ideali (f, g, h) e $(2y^2 + 8yz + 3z^3 + 18z^2 + 12z + 3,\ x^4 - 4x^2y - 4y^2 - 28yz + 3z^3 - 9z^2 + 12z + 3,\ 5x^4 - 20x^2y - 60yz + 9z^3 - 9z^2 + 36z + 9)$ di $\mathbb{Q}[x, y, z]$ siano diversi.
   d) É possibile trovare un generatore irriducibile dell'ideale $(2y^2+8yz+3z^3+18z^2 + 12z + 3,\ x^4 - 4x^2y - 4y^2 - 28yz + 3z^3 - 9z^2 + 12z + 3,\ 5x^4 - 20x^2y - 60yz + 9z^3 - 9z^2 + 36z + 9) \cap \mathbb{Q}[z]$?
   e) Si scrivano due diversi ideali radicali non massimali di $\mathbb{Q}[x, y, z]$ contenenti l'ideale $(2y^2 + 8yz + 3z^3 + 18z^2 + 12z + 3,\ x^4 - 4x^2y - 4y^2 - 28yz + 3z^3 - 9z^2 + 12z + 3,\ 5x^4 - 20x^2y - 60yz + 9z^3 - 9z^2 + 36z + 9)$ di $\mathbb{Q}[x, y, z]$.

2. Si consideri il seguente sistema di equazioni polinomiali:

$$\begin{cases} x^4 - z^2 = 0 \\ (y-1)z - x^2 = 0 \\ x^2 - yz + z^3 = 0 \end{cases}$$

   a) Si dimostri che il sistema non ha un numero finito di soluzioni in $\mathbb{C}$.
   b) Si stabilisca se la varietá algebrica definita dal sistema é riducibile o irriducibile e, nel caso sia riducibile, se ne calcolino le componenti irriducibili.

3. In $\mathbb{R}^3$ sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e si consideri la superficie S data dalle parametrizzazioni razionali:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t-s} - 1 \\ y = \dfrac{1}{(t+2)^2} \\ z = \dfrac{2(t+2)}{t-s} \end{cases}$$

a) Si determini la più piccola varietà W di R^3 contenente S e si stabilisca se essa è irriducibile.

b) Si stabilisca se $W = S$, cioè se le equazioni date parametrizzano tutta W e nel caso vi sia una disuguaglianza stretta determinare i punti di $W - S$. (Suggerimento: dato $P = (a, b, c) \in W$ è sempre possibile trovare $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tali che (u, v, a, b, c) soddisfino le equazioni date? Usare il teorema di estensione).

c) Si scrivano le equazioni cartesiane della curva intersezione di W con il cono T di vertice $V = (1, 0, 1)$ e direttrice la curva C di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t - 1 \\ z = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$$

4. Si consideri la superficie $\mathcal{S}$ di $\mathbb{R}^3$ data dalla seguente parametrizzazione razionale:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v+1}{2u(v+1)} + 1 \\ y = \dfrac{2v+1}{2u} \\ z = \dfrac{3-4u^2}{4u(v+1)} \end{cases}$$

a) Si determini la più piccola varietà W di $\mathbb{R}^3$ contenente $\mathcal{S}$.

b) Si stabilisca se $W = \mathcal{S}$, cioè se dato $P = (a, b, c) \in W$ è sempre possibile trovare $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tali che (u, v, a, b, c) soddisfino le equazioni date.