Università di Bologna - Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Corso di ALGEBRA COMPUTAZIONALE A.A. 2009/10

1. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2y - 12yz - 9z^2 = 0 \\ 4y^2 + 16yz - 3z^3 - 12z - 3 = 0 \\ 4x^4 - 16x^2y - 48yz + 9z^3 + 36z + 9 = 0\,. \end{cases}$$

   a) Utilizzando il metodo di eliminazione, si determinino tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{R}$.

   b) Si dimostri che il sistema ha un numero finito di soluzioni in $\mathbb{C}$.

   c) Si determinino tre polinomi $f, g, h \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ tali che il sistema di equazioni $f = g = h = 0$ abbia le stesse soluzioni in $\mathbb{Q}$ del sistema su scritto, ma i due ideali (f, g, h) e $(x^4-4x^2y-12yz-9z^2,\ 4y^2+16yz-3z^3-12z-3,\ 4x^4-16x^2y-48yz+9z^3+36z+9)$ di $\mathbb{Q}[x, y, z]$ siano diversi.

   d) Si provi che un qualunque generatore dell'ideale $(x^4-4x^2y-12yz-9z^2,\ 4y^2+16yz-3z^3-12z-3,\ 4x^4-16x^2y-48yz+9z^3+36z+9) \cap \mathbb{Q}[z]$ è riducibile.

   e) Si scrivano due diversi ideali radicali non massimali di $\mathbb{Q}[x, y, z]$ contenenti l'ideale $(x^4-4x^2y-12yz-9z^2, 4y^2+16yz-3z^3-12z-3, 4x^4-16x^2y-48yz+9z^3+36z+9)$ di $\mathbb{Q}[x, y, z]$.

   f) Si stabilisca se i polinomi $f_1 = x^4-4x^2y-12yz-9z^2$ e $f_2 = 4y^2+16yz-3z^3-12z-3$ hanno un fattore comune di grado positivo in x e in y.

2. Si consideri il seguente sistema di equazioni polinomiali:

$$\begin{cases} xz = 0 \\ xy = 0 \\ x^2 - yz = 0 \end{cases}$$

   a) Si dimostri che il sistema non ha un numero finito di soluzioni in $\mathbb{C}$.

   b) Si stabilisca se la varietá algebrica definita dal sistema é riducibile o irriducibile e nel caso sia riducibile si calcolino le componenti irriducibili.

3. Si consideri il seguente sistema di equazioni polinomiali:

$$\begin{cases} xy + x - yz = 0 \\ -xz + y^2z = 0 \\ x^2 - xz - x + yz = 0 \end{cases}$$

a) Si stabilisca se su $\mathbb{C}$ il sistema é equivalente al sistema di (2).

b) Si stabilisca se la varietá algebrica definita dal sistema ha componenti irriducibili in comune con la varietá definita da (2).

4. In $\mathbb{R}^3$ sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e si consideri la superficie S data dalle parametrizzazioni razionali:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{(u+v)^2} \\ y = \dfrac{u}{(u+1)^2} \\ z = \dfrac{u+v}{u+1} \end{cases}$$

   a) Si determini la più piccola varietà W di R^3 contenente S e si stabilisca se essa è irriducibile.

   b) Si stabilisca se $W = S$, cioè se le equazioni date parametrizzano tutta W e nel caso vi sia una disuguaglianza stretta determinare i punti di $W - S$. (Suggerimento: dato $P = (a, b, c) \in W$ è sempre possibile trovare $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tali che (u, v, a, b, c) soddisfino le equazioni date? Usare il teorema di estensione).

5. Si consideri la superficie $\mathcal{S}$ di $\mathbb{R}^3$ data dalla seguente parametrizzazione razionale:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{uv} + 1 \\ y = \dfrac{v-1}{u} \\ z = \dfrac{3-u^2}{uv} \end{cases}$$

   a) Si determini la più piccola varietà W di $\mathbb{R}^3$ contenente $\mathcal{S}$.

   b) Si stabilisca se $W - \mathcal{S}$ è una varietá algebrica e in caso positivo se ne determinino le componenti irriducibili.

6. In $\mathbb{R}^3$, dove è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sia C la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t^2 + t - 1 \\ z = t^2 + 1 \end{cases}$$

e sia r la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - z - 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0\,. \end{cases}$$

   a) Si scriva l'equazione cartesiana del cilindro S che proietta la curva C parallelamente alla retta r.

   b) Si scrivano le equazioni di due rette r_1 e r_2 giacenti su S.