Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Esercitazione scritta di Algebra 23.2.1995 A

I Trovare il periodo [ordine] dei seguenti elementi nei rispettivi gruppi:
i) $([6]_{22},[60]_{114})$ in $(\mathbb{Z}_{22} \times \mathbb{Z}_{114}, +)$;
ii) $\alpha = (25)(137)(426)$ in $(S_8, \circ)$;
iii) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita per ogni $z \in \mathbb{Z}$ da $f(z) = \begin{cases} z - 8 & \text{se 3 divide } z \\ z + 4 & \text{altrimenti} \end{cases}$
in $(S(\mathbb{Z}),\circ)$.

II Sia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8$ il gruppo prodotto diretto dei gruppi degli interi e delle classi di resto modulo 8 e sia $S = \{(14z, [4w]_8) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8 \ / \ z,w \in \mathbb{Z}\}$.
i) Mostrare che S è un sottogruppo normale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8$.
ii) Stabilire se il gruppo quoziente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8/S$ è finito o infinito.
iii) Stabilire se in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8/S$ esiste un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

III Rispondere alle sequenti domande:
i) esiste un omomorfismo di gruppi $\mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_3$ il cui nucleo sia il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{20}$ generato da $[4]_{20}$?
ii) esistono omomorfismi di gruppi suriettivi $\mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_6$?
iii) ogni omomorfismo di gruppi $\mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_5$ è anche un omomorfismo di anelli?
iv) il sottoinsieme $S := \{[m]_{20} \in \mathbb{Z}_{20} \ / \ m$ è divisibile per 2 o per 5$\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}_{20}$?

IV Sia $f: A \to B$ un omomorfismo di anelli commutativi.
i) Si provi che se J è un ideale primo di B allora $f^{-1}(J)$ è un ideale primo di A.
ii) Si provi che se J è un ideale massimale di B e f è suriettiva allora $f^{-1}(J)$ è un ideale massimale di A.

[Si ricordi che un ideale proprio I *di un anello commutativo* R *si dice* *__ideale primo__* *se* $ab \in I$ *implica* $a \in I$ *o* $b \in I$ *e che un ideale proprio* I *di* R *si dice* *__ideale massimale__* *se* $I \subseteq I' \subseteq R$, *con* I' *ideale di* R, *implica* $I = I'$ *oppure* $I' = R$ *(ossia se I non è contenuto propriamente in nessun ideale proprio di* R*).]*

V Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $\mathcal{R}$ la relazione su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita per ogni $(m,n), (m_1,n_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da $(m,n) \, \mathcal{R} \, (m_1,n_1) \iff m^2 + 3n^2 = m_1^2 + 3n_1^2$.
i) Mostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
ii) Stabilire se l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} /\mathcal{R}$ è finito o infinito.
iii) Elencare gli elementi di $[(5,1)]_{\mathcal{R}}$.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Esercitazione scritta di Algebra 27.5.1995 B

I In $\mathbb{Q}[x]$ siano $a(x) = x^4 - 9$ e $b(x) = x^2 + 3$. Siano $A = \mathbb{Q}[x]/(a(x))$, $B = \mathbb{Q}[x]/(b(x))$ e sia $\phi: \mathbb{Q}[x]/(a(x)) = A \to B = \mathbb{Q}[x]/(b(x))$ definita associando ad ogni $[h(x)] \in A$ l'elemento $[h(x)] \in B$.

i) Stabilire se gli anelli quoziente A e B sono campi.

ii) Stabilire se $[x - 1] \in A$ ammette inverso in A e in caso affermativo determinarlo.

iii) Provare che ϕ è ben definita ed è un omomorfismo di anelli.

iv) Determinare Ker ϕ e stabilire se é un ideale massimale di A.

v) Stabilire se il polinomio $x^2 + 3x + 2$ appartiene al laterale $x + 3 + (b(x))$.

II Si consideri l'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ e sia

$$I = \{a + ib \in \mathbb{Z}[i] \ / \ a + b \equiv 0 \ (\text{mod } 2)\}.$$

i) Verificare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.

ii) Stabilire se I é un ideale principale e, in caso affermativo, trovarne un generatore.

iii) Si stabilisca se I è un ideale primo e se é massimale.

iv) Calcolare M.C.D.(46 + 3i, 85i).

III Dato il numero complesso $u = -1 + \sqrt{2} + i$, si chiede:

i) trovare un polinomio non nullo $f \in \mathbb{Q}[x]$ che abbia u come radice.

ii) decomporre il polinomio f trovato in fattori irriducibili di $\mathbb{R}[x]$.

IV i) Mostrare che il polinomio $f = x^4 - 2x^3 + 6x + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Decomporre in irriducibili di $\mathbb{Z}_3[x]$ il polinomio $g = x^5 + x^4 + x^3 - x - 1$.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Prova scritta di Algebra 2.6.1995 A

I Sia $X = \{0,1\}$ e $\mathbb{Z}_3{}^X$ l'anello delle funzioni punto per punto da X all'anello $\mathbb{Z}_3$.

i) Trovare i divisori di zero di $\mathbb{Z}_3{}^X$.

ii) E' vero che se $f \in \mathbb{Z}_3{}^X$ allora f è divisore di zero oppure è invertibile.

iii) Esiste un sottoanello di $\mathbb{Z}_3{}^X$ che sia un dominio d'integrità?

II Sia S_7 il gruppo delle permutazioni su $\{1,...,7\}$ e $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ e $\beta = (1\ 5)$. Sia S il sottogruppo di S_7 generato da $\{\alpha,\beta\}$. Si stabilisca:

i) quanti elementi ha S;

ii) se S è normale in S_7;

iii) quanti sono i morfismi da $\mathbb{Z}$ a S_7 che hanno S come immagine.

III In $\mathbb{Q}[x]$ siano: I l'insieme costituito dal polinomio nullo e da tutti i polinomi aventi 1 come radice di molteplicità almeno 2, J l'insieme costituito dal polinomio nullo e da tutti i polinomi aventi 1 come radice di molteplicità esattamente 2.

i) Stabilire se I è un ideale di $\mathbb{Q}[x]$ e se è principale.

ii) Trovare un generatore di I e stabilire se $\mathbb{Q}[x]/I$ è un campo.

iii) Stabilire se J è un ideale di $\mathbb{Q}[x]$, se è un sottoanello di $\mathbb{Q}[x]$, se é un sottogruppo additivo di $\mathbb{Q}[x]$.

IV Si consideri l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/I$, dove $I = (x^2 + kx - 2)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

i) Provare che esistono infiniti valori di $k \in \mathbb{Z}$ per i quali l'anello $\mathbb{Q}[x]/I$ è un campo.

ii) Posto $k = -1$, trovare una coppia di divisori dello zero in $\mathbb{Q}[x]/I$.

iii) Usando ancora $k = -1$, stabilire se i polinomi $a(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x - 1$ e $b(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 - 4x - 7$ appartengono allo stesso laterale di $\mathbb{Q}[x]/I$.

V Sia $F: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ l' omomorfismo di anelli definito da: $F(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $F(x) = i\sqrt{3}$.

i) Verificare che F è suriettivo e determinare $\operatorname{Ker} F$.

ii) Determinare $F(\mathbb{Z}[x])$ e il nucleo della restrizione di F a $\mathbb{Z}[x]$.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Prova scritta di Algebra **1.7.1995** **A**

I Sia K un campo.

i) Si determini il sottogruppo H di GL(2,K) formato dalle matrici $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ che commutano con la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ con $a \neq 0$.

ii) Si provi che la funzione $f\colon H \to (K^*,\cdot)$ definita da $f(A) = a_{11}$ é un omomorfismo di gruppi suriettivo.

iii) Si determini ker f.

iv) Si provi che la funzione $g\colon \ker f \to (K,+)$ definita da $g(A) = a_{21}$ è un isomorfismo.

II In $\mathbb{Z}_7[x]$ siano

$I = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{Z}_7[x] \;/\; a_0 = a_1 = 0\}$,

$J = \{p(x) \in \mathbb{Z}_7[x] \;/\; p(0) = p(1) = 0\}$,

$T = \{p(x) \in \mathbb{Z}_7[x] \;/\; p(4) = 0\}$.

i) Stabilire se I, J e T sono ideali di $\mathbb{Z}_7[x]$ e in caso affermativo trovarne il generatore.

ii) Studiare i quozienti $\mathbb{Z}_7[x]/I$ e $\mathbb{Z}_7[x]/J$ stabilendo se sono domini di integrità e se sono isomorfi.

iii) Provare che $\mathbb{Z}_7[x]/T \cong \mathbb{Z}_7$.

III In $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri la relazione

$(a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d) \iff \exists\ m, n$ interi positivi tali che $c = a\cdot m,\ d = b\cdot n$.

Stabilire:

i) se $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine;

ii) se $\mathcal{R}$ é una relazione d'ordine totale.

iii) se nell'insieme $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;/\; a > 0,\ b > 0\}$ esiste minimo rispetto a $\mathcal{R}$.

IV i) Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ rispettivamente.

ii) Stabilire se i campi $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$ e $\mathbb{Q}[x]/(x^2+2)$ sono isomorfi.

iii) Stabilire se i campi $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ e $\mathbb{R}[x]/(x^2+2)$ sono isomorfi.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Prova scritta di Algebra **15.9.1995** **A**

I i) Mostrare che in S_8 gli elementi di periodo 12 sono tutti coniugati.

ii) Quante sono le classi di coniugio in cui si ripartiscono gli elementi di periodo 4 di S_8?

iii) E' vero che $S_4 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_4$?.

II Sia $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}$ l'anello prodotto diretto degli anelli delle classi di resti modulo 12 e 20 rispettivamente e sia J l'ideale di $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}$ generato da $([9]_{12},[15]_{20})$. Si chiede:

i) Quanti elementi ha l'anello quoziente $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}/J$?

ii) $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}/J$ è un dominio d'integrità?

iii) $J + ([5]_{12},[7]_{20})$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}/J$?

iv) Esiste un intero positivo m per il quale gli anelli $\mathbb{Z}_m$ e $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}/J$ siano isomorfi?

III Sia u una delle radici quadrate del numero complesso $2 + \sqrt{2}\, i$. Si chiede:

i) Disegnare la posizione (approssimata) di u nel piano di Gauss.

ii) Provare che u è algebrico e trovarne il polinomio minimo p_u.

iii) Decomporre in fattori irriducibili la riduzione del polinomio p_u negli anelli $\mathbb{Z}_3[x]$ e $\mathbb{Z}_5[x]$.

IV i) Stabilire, motivando le risposte, se il polinomio $a(x) = x^3 - 3x - 1$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

ii) Determinare il numero degli elementi di $A = \mathbb{Z}_5[x]/(a(x))$.

iii) Determinare l'inverso dell'elemento $[x^2 - 3] \in A$.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Prova scritta di Algebra 11.10.1995 **A**

I Nel gruppo simmetrico S_8 delle permutazioni di 8 elementi si consideri il sottoinsieme $H := \{\sigma \in S_8 \ / \ \sigma(\{1,2,3\}) \subseteq \{1,2,3\}\}$.

i) Si stabilisca se H è un sottogruppo di S_8.

ii) Si trovino, se esistono, elementi di periodo 7 e 6 in S_8 e in H.

iii) Si calcoli $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$ e se ne scriva la decomposizione in prodotto di cicli disgiunti.

II Sia A un anello commutativo e sia J un ideale di A. Sia $I = \{p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n \in A[x] \ / \ p_i \in J$ per ogni $i\}$ e sia $f: A[x] \to (A/J)[x]$ l'applicazione definita da $f(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n) = [p_0] + [p_1]x + [p_2]x^2 + \ldots + [p_n]x^n$ dove $[p_i]$ denota la classe di p_i in A/J.

i) Provare che I è un ideale di A[x].

ii) Determinare ker f.

iii) Esiste un isomorfismo fra A[x]/I e (A/J)[x]?

iv) Stabilire se è vero il seguente risultato: " se I è un ideale primo di A[x] allora J è un ideale primo di A".

v) Dare un esempio in cui J è un ideale massimale di A ma I non è un ideale massimale di A[x].

III Si trovino in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{C}$ le radici comuni dei seguenti polinomi :
$f(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4$ e $g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$.

IV Esistono campi con 4, 13, 14, 25 elementi? Motivare le risposte e, nei casi affermativi, trovarne un esempio.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Prova scritta di Algebra 16.12.1995 A

I Dato il gruppo simmetrico S_6 delle permutazioni sull'insieme $I = \{1,2,3,4,5,6\}$, dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottogruppi e, in caso positivo, determinarne l'ordine:

a) $A = \{\alpha \in S_6 \ / \ \alpha(1) = 1, \alpha(6) = 6\}$,

b) $B = \{\alpha \in S_6 \ / \ \alpha(4) \in \{4,5,6\}\}$,

c) $C = \{\alpha \in S_6 \ / \ \alpha(1), \alpha(6) \in \{1, 6\}\}$

II Sia $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ l'anello delle funzioni punto per punto dall'insieme dei naturali all'anello degli interi e sia $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $\alpha(n) = 2n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $\phi : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ la funzione così definita: $\phi(f) = f \circ \alpha$ per ogni $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

i) Stabilire se nell'anello $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ esistono divisori dello zero non nulli.

ii) Mostrare che f è un omorfismo di anelli.

iii) Esibire un elemento di $\ker \phi$ diverso dallo zero di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

iv) Stabilire se $\ker \phi$ è un ideale primo.

III i) Determinare la decomposizione in fattori irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$ del polinomio:
$p(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 14$
sapendo che $p(2) = p(-i) = 0$.

ii) Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{Q}$, in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$ del sistema:

$$\begin{cases} x^4 + x^3 - x - 1 = 0 \\ x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

IV i) Stabilire per quali valori di $\bar{k} \in \mathbb{Z}_3$ l'anello $A = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 - x + \bar{k})$ è un campo e, per tali valori, indicarne il numero degli elementi.

ii) Sia $\bar{k} \in \mathbb{Z}_3$ uno dei valori determinati in i). Nel campo A corrispondente a tale valore si determini la radice cubica di $[x]$.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica

Prova scritta di Algebra 19.2.1996 **A**

I Sia $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ l'anello prodotto diretto degli anelli delle classi di resti modulo 6 e 8 rispettivamente.

i) Si stabilisca se l'elemento $([5]_6, [3]_8)$ appartiene al sottoanello fondamentale di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$.

ii) Trovare, se esiste, l'inverso di $([5]_6, [5]_8)$ in $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$.

iii) Trovare un ideale J di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ tale che l'anello quoziente $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8/J$ sia isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

II i) Dimostrare che i gruppi S_4 e D_{12} non sono tra loro isomorfi.

ii) Trovare cinque gruppi di ordine 24 a due a due non isomorfi, spiegando perchè non lo sono.

III Dato il numero algebrico $u = \sqrt{-3 + \sqrt{10}}$, si chiede:

i) Trovare il polinomio minimo p_u di u su $\mathbb{Q}$.

ii) Decomporre in fattori irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ il polinomio p_u.

iii) Trovare un divisore di zero non nullo dell'anello quoziente $\mathbb{R}[x]/(p_u)$.

iv) Decomporre in fattori irriducibili di $\mathbb{C}[x]$ il polinomio p_u.

IV Siano

$I = \{p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n \in \mathbb{Z}[x] \ / \ 5 \text{ divide } p_i \text{ per ogni } i\}$ e

$J = \{p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n \in \mathbb{Z}[x] \ / \ 5 \text{ divide } p_0\}$.

i) Provare che I e J sono ideali di $\mathbb{Z}[x]$ e stabilire se sono principali.

ii) Stabilire se I è un ideale primo e se J è un ideale massimale.

iii) Determinare gli ideali $I \cap J$ e $I + J$.

iv) Provare che l'ideale

$K = \{q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots + q_nx^n \in \mathbb{Q}[x] \ / \ 5 \text{ divide } q_0\}$

non è un ideale proprio di $\mathbb{Q}[x]$.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Esercitazione scritta di Algebra 22.5.1996 A

I Sia $\mathbb{Z}_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_5$ e siano $f = x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 3$, $g = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ due suoi elementi. Sia $J = (f,g)$ l'ideale di $\mathbb{Z}_5[x]$ generato da $\{f,g\}$.

i) Si decompongano i polinomi f, g in irriducibili di $\mathbb{Z}_5[x]$.

ii) Si stabilisca quanti sono gli elementi di $\mathbb{Z}_5[x]/J$.

iii) Si dimostri che l'anello $\mathbb{Z}_5[x]/J$ è un campo.

iv) Trovare la radice in $\mathbb{Z}_5[x]/J$ del polinomio $[x + 4]\, y + [x] \in (\mathbb{Z}_5[x]/J)[y]$ (ossia del polinomio nell'indeterminata y e a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_5[x]/J$)

II Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano $u = -3 + 11i$, $v = 8 - i$ due suoi elementi.

Determinre gli ideali $(u) + (v)$ e $(u) \cap (v)$ di $\mathbb{Z}[i]$ e stabilire se sono primi e se sono massimali.

III Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali, $\mathbb{R}$ il campo dei reali e siano $u = \sqrt{2}$, $v = 1/\sqrt{2}$. Si denotino con $\sigma_u: \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ e $\sigma_v: \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ i morfismi sostituzione relativi a u, v rispettivamente.

i) Si stabilisca se σ_u è iniettivo.

ii) Si stabilisca se $v \in \mathrm{Im}(\sigma_u)$.

iii) Si trovi, se esiste, un elemento non nullo di $\ker(\sigma_u) \cap \ker(\sigma_v)$.

iv) Si determini il polinomio minimo di $u + \sqrt{u}$ su $\mathbb{Q}$.

IV Sia $\mathbb{Z}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi e sia $\phi: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ l'applicazione definita da: $\phi(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = a_0 + a_1x$.

i) Si stabilisca se ϕ è un omomorfismo di anelli.

ii) Si provi che $\phi^{-1}(0)$ è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$ e si stabilisca se è un ideale principale.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Prova scritta di Algebra **10.6.1996** **A**

I Si introduca su $X = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22\}$ la seguente relazione:
$x \, r \, y$ se $\phi(x) = \phi(y)$ dove ϕ denota la funzione di Eulero.
Stabilire se la relazione r è di equivalenza e, in caso positivo, calcolare le classi di equivalenza.

II Sia $X = \{1,2\}$ e Z_4^X l'anello delle funzioni punto per punto da X all'anello Z_4.
i) Elencare gli elementi del sottoanello fondamentale di Z_4^X.
ii) Trovare, se esiste, l'inverso in Z_4^X della funzione $f: X \to Z_4$ definita, per ogni $x \in X$, da $f(x) = [2x + 1]_4$.

III Sia $Q[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali, R il campo dei reali e siano $u, v \in R$. Si denotino con $\sigma_u: Q[x] \to R$ e $\sigma_v: Q[x] \to R$ i morfismi sostituzione relativi a u, v rispettivamente.
i) Si dimostri che $\mathrm{Im}(\sigma_u) = Q$ se e solo se $u \in Q$.
ii) E' possibile trovare $u, v \in R - Q$ tali che $u \neq v$ e $\mathrm{Im}(\sigma_u) = \mathrm{Im}(\sigma_v)$?
iii) E' vero che se $\ker(\sigma_u) \cap \ker(\sigma_v) = \{0\}$, allora $\ker(\sigma_u) = \{0\}$ oppure $\ker(\sigma_v) = \{0\}$?
iv) Si determini $\ker(\sigma_u)$ per $u = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ e si dimostri che è un ideale massimale di $Q[x]$.

IV Sia $R[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti reali, sia $A = R[x]/(x^2 - 1)$ e sia $\pi: R[x] \to A$ la proiezione canonica. Sia S l'ideale di A generato da $[(x + 3)(x + 1)]$.
i) Esistono nell'anello A elementi non nulli il cui quadrato sia nullo?
ii) Trovare due ideali distinti I e J di $R[x]$ tali che $\pi(I) = \pi(J) = S$.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Prova scritta di Algebra 8.7.1996 A

I Siano $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ i gruppi additivi degli interi e dei reali.

i) Si stabilisca se esiste in $\mathbb{R}$ un sottogruppo con 4 elementi.

ii) Si trovino due sottogruppi S e T di $\mathbb{R}$, distinti, che siano isomorfi a $\mathbb{Z}$.

iii) Si stabilisca se i sottogruppi S e T del punto precedente possono essere presi in modo che $S \cap T = \{0\}$.

II Si consideri l'anello prodotto diretto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e i suoi ideali $I = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $J = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$.

i) Si individui un anello A per il quale esiste un omomorfismo di anelli suriettivo $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to A$ tale che $\ker f = I$. Si descriva f.

ii) Si provi che I è un ideale massimale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

iii) Si individui un anello B per il quale esiste un omomorfismo di anelli suriettivo $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to B$ tale che $\ker g = J$. Si descriva g.

iv) Si stabilisca se J è un ideale primo di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

III i) Stabilire se i seguenti polinomi sono riducibili in $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$:

$$a(x) = 2x^5 - 6x^3 + 5x^2 - 15$$
$$b(x) = 2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$$

ii) Scrivere una decomposizione in irriducibili del polinomio $a(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

iii) Stabilire se esiste un primo p per il quale $a(x)$ e $b(x)$ siano divisibili per $x + 1$ in $\mathbb{Z}_p[x]$.

IV Siano $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali e $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ l'anello prodotto diretto di $\mathbb{Q}$ per se stesso. Dati $a, b \in \mathbb{Q}$ sia $f_{a,b} : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ l'omomorfismo di anelli definito da $f_{a,b}(p(x)) = (p(a),p(b))$ per ogni $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

i) Si stabilisca per quali valori di $a, b \in \mathbb{Q}$ l'omomorfismo $f_{a,b}$ è suriettivo.

ii) Si determini un generatore di $\ker f_{a,b}$.

iii) E' possibile scegliere $a, b \in \mathbb{Q}$ in modo che $f_{a,b}$ sia suriettivo e $\ker f_{a,b}$ sia un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x]$?

iv) Nel caso in cui $a = b$ si stabilisca se $\operatorname{Im} f_{a,b}$ è un campo e, in caso affermativo, se è isomorfo a $\mathbb{Q}$.

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Prova scritta di Algebra 11.9.1996 A

I Sia $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ il gruppo prodotto diretto del gruppo delle classi di resto modulo 6 per se stesso ed S il sottogruppo di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ generato da

$$X = \{([2]_6,[0]_6),\ ([2]_6,[2]_6),\ ([0]_6,[4]_6)\}.$$

i) Si stabilisca quanti elementi ha S.
ii) Si stabilisca se S è isomorfo a qualche gruppo $\mathbb{Z}_m$.
iii) Si stabilisca se esiste un epimorfismo da $\mathbb{Z}_{36}$ a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6/S$.

II Sia $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'anello delle funzioni punto per punto dal campo dei numeri reali in se stesso.
i) Verificare che l'insieme M delle funzioni che si annullano in 3 è un ideale di A.
ii) Verificare che l'applicazione ϕ: $A/M \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $[f]_M \in A/M$, da $\phi([f]_M) = f(3)$ è un isomorfismo di anelli.
iii) Stabilire se M è un ideale primo di A .

III i) Stabilire se in $\mathbb{Z}[x]$ l'insieme S di tutti i polinomi il cui termine noto è divisibile per 3 o per 5 è un ideale.
ii) Stabilire se in $\mathbb{Z}[x]$ i polinomi costanti 1 e 2 appartengono all'ideale somma degli ideali $I = (x^3 + x + 1)$ e $J = (x + 1)$.
iii) In $\mathbb{Q}[x]$ si considerino i polinomi

$$a(x) = x^3 + 4x^2 + 7x + 6 \qquad b(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4$$

e si stabilisca se l'ideale $M = (a(x)) \cap (b(x))$ è primo.

IV Si risponda alle seguenti domande motivando la risposta e, in caso affermativo, costruendo l'omomorfismo richiesto.
i) Esiste un omomorfismo di anelli iniettivo dal campo $\mathbb{Z}_3$ al campo $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+x+1)$?
ii) Esiste un omomorfismo di anelli iniettivo dal campo $\mathbb{Q}$ al campo $\mathbb{Z}_5(x)$?
iii) Esiste un omomorfismo di anelli suriettivo dal campo $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+x+1)$ al campo $\mathbb{Q}$?
iv) Esiste un omomorfismo di anelli suriettivo dal campo $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+x+1)$ al campo $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3+x+1)$?
v) Esiste un omomorfismo di anelli suriettivo dal campo $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3+x+1)$ al campo $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+x+1)$?

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica

Prova scritta di Algebra 10.10.1996 A

I Sia S_{10} il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,\dots,10\}$ e sia $\alpha =$ $(37145)(2849)$ un suo elemento.

i) Si determini l'ordine del sottogruppo H di S_{10} generato da α.

ii) Se $\beta \in S_{10}$ è tale che $\beta(1) = 3$ e $\beta(3) = 1$, può essere coniugato di α?

iii) Esiste un morfismo iniettivo f dal gruppo Z_4 ad S_{10} tale che $\mathrm{Im}(f)$ z H ? In caso affermativo si determini un f siffatto.

II Sia $Z_{20} \times Z$ l'anello prodotto diretto degli anelli Z_{20} e Z.

i) Stabilire se l'elemento $([13]_{20}, -27)$ appartiene al sottoanello fondamentale di $Z_{20} \times Z$.

ii) Trovare un ideale I di $Z_{20} \times Z$ tale che $Z_{20} \times Z/I$ abbia caratteristica 3.

iii) Stabilire se esiste un ideale J di $Z_{20} \times Z$ tale che $Z_{20} \times Z/J$ sia isomorfo all'anello $Z_3 \times Z$.

III Sia $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$ un polinomio a coefficienti interi.

i) Si provi che $f(x)$ è irriducibile in $Q[x]$.

ii) Decomporre in irriducibili di $Z_3[x]$ la riduzione modulo 3 di $f(x)$.

iii) Trovare una radice reale di $f(x)$, cercando, per esempio, gli $a \in R$ per i quali $x^2 + ax + 1$ divide $f(x)$.

iv) Decomporre $f(x)$ in irriducibili di $R[x]$ e di $C[x]$.

IV Siano A_1 e A_2 due anelli non nulli e sia $f: A_1 \to A_2$ un morfismo suriettivo.

i) Mostrare che se A_1 è un campo anche A_2 è un campo.

ii) Trovare un esempio in cui il viceversa è falso, cioè un caso in cui A_2 sia un campo ma A_1 non lo sia.

iii) Se $\mathrm{car}(A_2) = 2$, cosa si può dire di $\mathrm{car}(A_1)$?

iv) Se J è un ideale proprio di A_1, $f(J)$ è necessariamente un ideale proprio di A_2 ?

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Prova scritta di Algebra 22.2.1997 B

I Sia S_7 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,...,6,7\}$ e sia α un suo elemento tale che $\alpha(3) = 6, \alpha(6) = 1, \alpha(1) = 3$.

i) Si determinino i possibili periodi di α in S_7.

ii) Si stabilisca se α può essere coniugato di $(3\ 6)(7\ 1)$.

iii) Si stabilisca se è vero che α^3 commuta con $(3\ 6)$.

II Sia $Z_{10} \times Z$ il gruppo prodotto diretto del gruppo delle classi di resti modulo 10 e del gruppo degli interi.

i) Elencare i morfismi $f: Z \rightarrow Z_{10} \times Z$ tali che $\ker f = 2Z$.

ii) Un morfismo $g: Z \rightarrow Z_{10} \times Z$ puo' essere suriettivo ?

iii) Esiste un sottogruppo normale S di $Z_{10} \times Z$ tale che il gruppo quoziente $Z_{10} \times Z/S$ sia isomorfo a $Z_2 \times Z_2$?

III Sia Z l'insieme degli interi ed E la relazione su Z cosi' definita: per ogni $z,w \in Z$,

$$z\,E\,w \iff 4 \text{ divide } 3z + w$$

i) Mostrare che E e' una relazione di equivalenza.

ii) Dire quali elementi dell'insieme $\{-2,-1,0,1,2\}$ sono E-equivalenti a 6.

iii) Elencare 4 classi di equivalenza di E distinte.

IV Sia $Z_2 \times Z_6$ l'anello prodotto diretto degli anelli delle classi di resti modulo, rispettivamente, 2 e 6.

i) Trovare gli elementi invertibili di $Z_2 \times Z_6$.

ii) Trovare un sottogruppo del gruppo additivo dell'anello $Z_2 \times Z_6$ che non sia un ideale.

iii) Stabilire se l'ideale di $Z_2 \times Z_6$ generato da $([0]_2,[2]_6)$ e' primo.

iv) Stabilire se nell'anello $Z_2 \times Z_6$ esistono elementi nilpotenti.

Università degli Studi di Bologna — C.d.L in Matematica

Prova scritta di Algebra 24.5.97 B

I Sia $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{C}^*$ il gruppo prodotto diretto del gruppo additivo delle classi di resti modulo 8 e del gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli ed H il sottogruppo di $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{C}^*$ generato dall'insieme $\{([6]_8, i), ([4]_8, 1)\}$. Si chiede:

i) Elencare gli elementi di H.

ii) H è ciclico ?

iii) Esiste nel gruppo S_6, delle permutazioni su $\{1, 2, \dots, 6\}$, un sottogruppo isomorfo ad H ?

II Dato il numero complesso $u = \sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}$, si chiede:

i) Trovare il polinomio minimo, p_u, di u in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Determinare due radici complesse di p_u.

iii) Trovare in $\mathbb{R}[x]$ un polinomio di secondo grado che divida p_u.

III Siano $f = x^2 + x - 2$ e $g = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ due polinomi a coefficienti interi. Si chiede:

i) Esistono nell'anello quoziente $\mathbb{R}[x]/(f) \cap (g)$ dei divisori di zero non nulli ?

ii) L'ideale $(f) + (g)$ è primo in $\mathbb{Q}[x]$?

iii) L'ideale $(f) + (g)$ è principale in $\mathbb{Z}[x]$?

IV Sia $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$ l'anello prodotto diretto degli anelli delle classi di resti modulo 12 e 18. Si chiede:

i) $([5]_{12}, [11]_{18})$ appartiene al sottoanello fondamentale di $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$?

ii) Esiste un morfismo di anelli da $\mathbb{Z}_{18}$ a $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$?

iii) Trovare un ideale J di $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$ tale che l'anello quoziente $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}/J$ abbia 4 elementi ma non sia isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

Università degli Studi di Bologna — C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 9.6.97 A

I Sia $\mathbb{Z}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi ed $f = x^5 + 4x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ sia un suo elemento. Si chiede:

i) Decomporre in irriducibili di $\mathbb{Z}_2[x]$ la riduzione modulo 2 di f.

ii) Decomporre in irriducibili di $\mathbb{Z}_3[x]$ la riduzione modulo 3 di f.

iii) Dedurre dalle prime due risposte che f è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

II Siano $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ i gruppi additivi degli interi e dei razionali ed H il sottogruppo di $\mathbb{Q}$ generato dall'insieme $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\}$. Si chiede:

i) Mostrare che H è ciclico esibendone un generatore.

ii) È vero che, per ogni $z, w \in \mathbb{Z}$, risulta $[z]_H = [w]_H$?

iii) Costruire un morfismo di gruppi $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tale che $\mathrm{Im}(f) = H$.

III Sia K un campo con 4 elementi ed $x^2 + 1_K$ sia un polinomio di $K[x]$. Si chiede:

i) Quanti elementi ha l'anello quoziente $K[x]/(x^2 + 1_K)$?

ii) L'ideale $(x^2 + 1_K)$ è massimale in $K[x]$?

iii) È vero che $K[x]/(x^2 + 1_K) \cong K \times K$?

IV Sia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto dell'anello degli interi per se stesso e J sia un suo ideale. Si chiede:

i) Trovare J in modo che l'anello quoziente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/J$ sia un campo.

ii) Esiste J per cui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/J$ sia un campo con 4 elementi ?

iii) Trovare tutti gli J per i quali $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/J$ ha caratteristica 10.

V Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali, $A = \{1\} \cup \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ed R la relazione su $\mathbb{N}$ definita da; $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $m R n \iff \exists\, a \in A$ tale che $ma = n$. Si chiede:

i) Mostrare che R è un ordine su $\mathbb{N}$.

ii) R è totale ?

iii) L'insieme $\{3, 9, 18\}$ ha minimo rispetto ad R ?

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 10.7.97 A

I Sia $(G,\cdot)$ un gruppo di ordine 8 e $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi. Sia poi E la relazione su $G\times\mathbb{Z}$ definita da: per ogni $(g,z),(h,w)\in G\times\mathbb{Z}$,
$(g,z)\,E\,(h,w) \iff g^z=h^w$. Si chiede:

i) Provare che E è una equivalenza su $G\times\mathbb{Z}$.

ii) Mostrare che $G\times\mathbb{Z}/E$ ha 8 elementi.

iii) Esiste $g\in G$, $g\neq 1_G$, tale che $(g,3)\in[(1_G,0)]_E$?

II Sia J l'ideale dell'anello $\mathbb{Z}_5[x]$ generato dal polinomio x^2+4x+1; posto $K=\mathbb{Z}_5[x]/J$ e $[x]_J=\varepsilon$, si chiede:

i) Mostrare che K è un campo e trovarne la caratteristica.

ii) Trovare la forma ridotta dell'elemento ε^3+4 in K.

iii) Trovare in K, se esiste, una radice quadrata di 3ε.

III Sia $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali, $A=\mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]$ e I, J gli ideali di A generati, rispettivamente, da (x,x^2+2) e $(2,x^2+2)$. Si chiede:

i) Mostrare che $I\subseteq J$ ma non viceversa.

ii) I e J sono ideali massimali ?

iii) Esiste un isomorfismo di anelli tra A/J e $\mathbb{C}$?

IV Sia S_6 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,2,\ldots,6\}$ ed $H\subseteq S_6$ sia così definito: $H=\{\sigma \mid \sigma\in S_6 \,\&\, \sigma(2)=2\}$. Si chiede:

i) Provare che H è un sottogruppo di S_6.

ii) H è normale in S_6 ?

iii) È vero che tutti gli elementi di periodo 4 di H sono tra loro coniugati in H ?

V Sia $\mathbb{Z}_{13}^*$ il gruppo degli elementi invertibili del campo $\mathbb{Z}_{13}$ e $\mathbb{Z}_4$ il gruppo additivo delle classi di resti modulo 4. Si chiede:

i) Determinare tutti i morfismi da $\mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_{13}^*$.

ii) Dire se ce ne sono di suriettivi.

iii) Quanti sono quelli iniettivi ?

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica

Prova scritta di Algebra 10.9.97 B

I Siano F_1 ed F_2 due campi finiti con 9 e 27 elementi. Si chiede:

i) Quale è la caratteristica dell'anello $F_1 \times F_2$?

ii) L'insieme $F_1 \times \{0_{F_2}\}$ con le restrizioni delle operazioni di $F_1 \times F_2$ è un campo ?

iii) $F_1 \times \{0_{F_2}\}$ è un sottocampo di $F_1 \times F_2$?

II Sia $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ l'anello delle funzioni punto per punto dall'insieme dei naturali all'anello degli interi e sia $J = \{f \mid f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \;\&\; f(n) = 0 \;\forall n \in 7\mathbb{N}\}$. Si chiede:

i) Mostrare che J è un ideale di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

ii) L'ideale J è primo ?

iii) È vero che $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/J \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$?

III Sia S_5 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 5\}$, $\alpha = (2\,3)(4\,5)$, $\beta = (2\,4)(3\,5)$ due suoi elementi ed $H = \langle\{\alpha, \beta\}\rangle$. Si chiede:

i) Quanti elementi ha H ?

ii) Gli elementi $(1\,3\,4\,5)$ e $(1\,3\,5\,2)$ di S_5 stanno in uno stesso laterale di H ?

iii) Trovare un elemento di $S_5 \setminus H$ che commuti con α.

IV Siano $f = x^6 - 5x^5 + 9x^4 - 9x^3 + 20x^2 - 36x + 20$, $g = x^5 - 2x^3 - x^2 + 2$ e $h = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ tre polinomi a coefficienti interi. Si chiede:

i) Sapendo che $f(1) = 0$ e $f(2+i) = 0$ decomporre f in irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Decomporre in irriducibili di $\mathbb{Z}_3[x]$ la riduzione modulo 3 di f.

iii) Trovare le radici complesse comuni dei polinomi g ed h.

V Sia a un intero positivo e sia $u = \sqrt{a + \sqrt{6}}$. Si chiede:

i) Trovare un polinomio f monico, a coefficienti interi e di grado 4 che abbia u come radice.

ii) Trovare un a per cui f sia irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

iii) f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ per tutti gli interi positivi a ?

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 9.10.97 A

I Sia $\mathbb{Z}_{12}$ l'insieme delle classi di resti modulo 12 e $*$ l'operazione in esso definita da: per ogni $[x]_{12}, [y]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$, $[x]_{12} * [y]_{12} = [x+y+5]_{12}$. Si chiede:

i) Mostrare che $(\mathbb{Z}_{12}, *)$ è un gruppo, indicandone l'elemento neutro e l'inverso di ogni elemento.

ii) Trovare in $(\mathbb{Z}_{12}, *)$ un elemento di periodo 2.

iii) Elencare gli elementi del sottogruppo di $(\mathbb{Z}_{12}, *)$ generato da $[3]_{12}$.

II Sia $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ il prodotto diretto degli anelli delle classi di resti modulo 3 e degli interi e sia $J = \{([z]_3, 6w) \mid z, w \in \mathbb{Z}\}$. Si chiede:

i) Esistono dei sottoanelli finiti di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$?

ii) Mostrare che J è un ideale di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ e che non è massimale.

iii) Trovare un ideale H di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$, $H \neq J$, tale che $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}/H \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}/J$.

III Sia $\mathbb{Z}_3[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, $f = x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^3 + 2$, $g = 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$ due suoi elementi e sia K un campo, estensione di $\mathbb{Z}_3$, nel quale esista ε tale che $\varepsilon^2 = -1$. Si chiede:

i) Trovare un massimo comun divisore, d, di f e g.

ii) Decomporre d in irriducibili di $\mathbb{Z}_3[x]$.

iii) È vero che in $K[x]$ il polinomio d si decompone in fattori lineari ?

IV Sia $\mathbb{R}$ il campo reale, $\sigma_u : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ e $\sigma_v : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ i morfismi sostituzione relativi ai numeri reali $u = \sqrt{6}$ e $v = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Si chiede:

i) Trovare un generatore dell'ideale $\ker \sigma_u$.

ii) Mostrare che $\mathrm{Im}(\sigma_u) \subseteq \mathrm{Im}(\sigma_v)$.

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 11.2.98 A

I Siano $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{Q}[x]$ gli anelli di polinomi a coefficienti, rispettivamente, interi e razionali ed $f = x^2 + x + a$, $g = x + 2$ due elementi di $\mathbb{Z}[x]$. Se $I = (f) + (g)$ in $\mathbb{Z}[x]$ e $J = (f) + (g)$ in $\mathbb{Q}[x]$ si chiede:

i) Esiste a tale che $I = \mathbb{Z}[x]$?

ii) Trovare un a per il quale I non sia principale.

iii) C'è qualche a per cui J risulti massimale ?

iv) Determinare un a per cui J non sia massimale.

II Sia $\mathbb{Z}$ il gruppo degli interi e $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ il prodotto diretto del gruppo delle classi di resti modulo 4 per se stesso. Si chiede:

i) Elencare tutti i morfismi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ per cui $|\mathrm{Im}(f)| = 2$.

ii) Esiste qualche epimorfismo da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$?

iii) Trovare un morfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ tale che $\ker f = 4\mathbb{Z}$.

III Sia $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ed E la relazione su X definita da; per ogni $f, g \in X$, $f\, E\, g \iff f(5) = g(5)\ \&\ f(6) = g(6)$. Si chiede:

i) Mostrare che E è una equivalenza su X.

ii) Provare che X/E ha 4 elementi.

iii) È vero che, per ogni $f \in X$, l'insieme $[f]_E$ è infinito ?

IV Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei razionali, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ la sua estensione ottenuta con l'aggiunta del numero complesso $\sqrt{-5}$ e sia $u = \sqrt{1 + \sqrt{-5}}$. Si chiede:

i) Trovare il polinomio minimo, p_u, di u in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Decomporre p_u in irriducibili di $K[x]$.

iii) Decomporre p_u in irriducibili di $\mathbb{C}[x]$.

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica
Esercitazione scritta di Algebra 4.3.98 B

I Sia S_7 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$,

$$\alpha = (2\,6\,7)\circ(1\,2\,3\,7) \qquad \beta = (1\,6\,7)\circ(2\,3\,4\,5)$$

due suoi elementi e sia $H = \langle\alpha\rangle$, $K = \langle\beta\rangle$. Si chiede:

i) Determinare il periodo di α e β in S_7.

ii) Stabilire se α e β sono coniugati in S_7.

iii) Esiste un morfismo iniettivo $f : \mathbb{Z}_3 \to S_7$ tale che $\mathrm{Im}(f) \subseteq H$?

iv) È vero che $(1\,6\,7) \in H \cap K$?

II Sia $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi e $\mathbb{Z}_{12}$ quello delle classi di resti modulo 12. Siano poi $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{12}$, non entrambi nulli, ed $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}$ definita da, per ogni $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f((x, y)) = x\alpha + y\beta$. Si chiede:

i) Determinare tutti i divisori di zero di $\mathbb{Z}_{12}$.

ii) Mostrare che esistono degli α, β per cui f non è un morfismo di anelli.

iii) È vero che se f è un morfismo di anelli allora è suriettivo ?

iv) Trovare $\alpha, \beta \notin \{[0]_{12}, [1]_{12}\}$ per cui f è un morfismo di anelli.

v) Per $\alpha = [1]_{12}$, $\beta = [0]_{12}$ trovare il nucleo di f e stabilire se è un ideale primo.

III Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali ed R la relazione su $\mathbb{N}$ definita da; $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $m\,R\,n \iff \exists\, h \in \mathbb{N}$ tale che $m^h = n$. Si chiede:

i) Mostrare che R è un ordine su $\mathbb{N}$.

ii) Trovare gli $n \in \mathbb{N}$ per cui si verifica $3\,R\,n$ & $n\,R\,3^{14}$.

iii) Il sottoinsieme $\{3^k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ha massimo rispetto ad R ?

Università degli Studi di Bologna — C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 27.5.98 D

I Sia $\mathbb{Z}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi ed I l'ideale di $\mathbb{Z}[x]$ generato da -7. Si chiede:

i) L'ideale I è massimale ?

ii) Provare che l'anello quoziente $\mathbb{Z}[x]/I$ è infinito.

iii) L'elemento $I - 7x - 1$ è invertibile in $\mathbb{Z}[x]/I$?

iv) Calcolare la caratteristica di $\mathbb{Z}[x]/I$. 7

II Sia S_7 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$, $\alpha = (1\,3\,4\,6)$, $\beta = (1\,4)(3\,6)(5\,7)$ due suoi elementi ed $H = \langle\{\alpha, \beta\}\rangle$. Si chiede:

i) Stabilire se $\alpha\beta = \beta\alpha$.

ii) Mostrare che H ha 8 elementi.

iii) H è isomorfo a $\mathbb{Z}_8$?

iv) Esiste un morfismo $f : \mathbb{Z} \to S_7$ tale che $\mathrm{Im}(f) \subseteq H$ e $|\mathrm{Im}(f)| = 4$? $|\alpha^4| = 4$

III Sia $f = x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 25x - 1$ un polinomio a coefficienti interi ed f_3, f_5 siano le riduzioni di f modulo 3 e 5 rispettivamente. Si chiede:

i) Decomporre f_5 nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}_5[x]$.

ii) Esiste, nell'anello quoziente $\mathbb{Z}_3[x]/(f_3)$, un divisore di zero non nullo ?

iii) Mostrare che f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$. Eisestein

IV Sia u una delle due radici del polinomio a coefficienti reali $x^2 - 5x + 5 - \sqrt{5}$. Si chiede:

i) Mostrare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e trovare il suo polinomio minimo p_u in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ è sottocampo di $\mathbb{Q}(u)$?

iii) Stabilire se $\mathbb{Q}(u)$ è campo di spezzamento per p_u.

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica

Prova scritta di Algebra 9.6.98 D

I Sia $\mathbb{Z}_{40}$ il gruppo additivo delle classi di resti modulo 40 e $\mathbb{Z}_{28}^*$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_{28}$. Si chiede:

i) Elencare i morfismi da $\mathbb{Z}_{40}$ a $\mathbb{Z}_{28}^*$.

ii) Esiste un morfismo $f : \mathbb{Z}_{40} \to \mathbb{Z}_{28}^*$ tale che $\ker f = \langle [5]_{40} \rangle$?

iii) $\mathbb{Z}_{28}^*$ è ciclico ?

II Sia $\mathbb{Z}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi, $f = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 4$, $g = 2x^2 - 6x + 4$ siano due suoi elementi, e sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali. Si chiede:

i) Determinare in $\mathbb{Q}[x]$ un generatore dell'ideale (f, g).

ii) Mostrare che in $\mathbb{Z}[x]$ l'ideale $(f) + (g)$ non è principale.

iii) Esiste $h \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $h \in (f) \cap (g)$ e $h \notin (fg)$?

III Siano a e b interi positivi, u sia il numero reale $\sqrt{a + \sqrt{7b}}$ e p_u il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}[x]$. Si chiede:

i) Mostrare che $\deg(p_u) \leq 4$.

ii) Trovare a e b per i quali risulti $\deg(p_u) = 4$.

iii) È vero che $u_1 = \sqrt{a - \sqrt{7b}}$ è radice di p_u ?

IV Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e $w = 17 - 4i$, $z = 4 - 7i$ siano due suoi elementi. Si chiede:

i) Decomporre w nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}[i]$.

ii) È vero che 13 appartiene all'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $\{w, z\}$?

iii) Trovare $a \in \mathbb{Z}[i]$ tale che l'ideale $(\{a, w\})$ sia massimale.

Università degli Studi di Bologna — C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 9.7.98 A

I Sia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto dell'anello degli interi per se stesso e sia $A = \{(3z, 5z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Si chiede:

i) Mostrare che A non è un ideale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

ii) Determinare l'ideale I di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generato da A.

iii) L'ideale I è primo ?

iv) L'anello quoziente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/I$ è isomorfo a qualche anello $\mathbb{Z}_m$?

II Sia S_8 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 8\}$, $\mathbb{Z}$ il gruppo additivo degli interi ed $f : \mathbb{Z} \to S_8$ un morfismo di gruppi. Si chiede:

i) Elencare le classi di coniugio in cui si ripartiscono gli elementi di periodo 6 di S_8.

ii) Per quali f si ha $11 \in \ker f$?

iii) Esiste f tale che $\{(1\,3\,5), (2\,4)\} \subseteq \mathrm{Im}(f)$?

III Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali ed $f = 2x^5 + x^4 + 6x^2 + 5x + 1$ un suo elemento. Si chiede:

i) Decoporre f nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Se $u \in \mathbb{C}$ è una radice di f, trovare il polinomio minimo di $u + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.

iii) Provare che la riduzione modulo 7 di f ha in $\mathbb{Z}_7$ una radice multipla.

IV Sia $\mathbb{R}$ il campo dei reali, $u = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ e $\sigma_u : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ il relativo morfismo sostituzione. Si chiede:

i) Stabilire se $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

ii) Mostrare che $\sqrt{5} \in \mathrm{Im}(\sigma_u)$.

iii) È vero che $\mathrm{Im}(\sigma_u) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$?

iv) Trovare, se esiste, $f \in \ker \sigma_u$ tale che $\deg(f) = 2$.

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 9.9.98 A

I Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi ed E la relazione su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da; per ogni $(z, w), (z_1, w_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(z, w)\ E\ (z_1, w_1) \iff |z| + 2|w| = |z_1| + 2|w_1|$. Si chiede:

i) Mostrare che E è una equivalenza su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

ii) Provare che l'insieme quoziente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/E$ è infinito.

iii) Se z è un intero positivo, quanti elementi ha l'insieme $[(0, z)]_E$?

II Sia $\mathbb{Z}_3[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, $f = x^5 + 2x^3 + 2x + 1$ e $g = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2$ due suoi elementi e sia $d = \mathrm{MCD}(f, g)$. Si chiede:

i) Calcolare d.

ii) Decomporre d nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}_3[x]$.

iii) Trovare, se esistono, $s, t \in \mathbb{Z}_3[x]$ per cui $fs + gt = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x + 2$.

III Sia $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}$ il gruppo prodotto diretto del gruppo delle classi di resti modulo 8 e del gruppo degli interi e sia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}$ un morfismo di gruppi. Si chiede:

i) Trovare f per cui risulti $\ker f = 4\mathbb{Z}$.

ii) È vero che se $([1]_8, 2) \in \mathrm{Im}(f)$ allora f è iniettivo ?

iii) Mostrare che f non può essere suriettivo.

IV Sia $\mathbb{C}$ il campo complesso, $u \in \mathbb{C}$ diverso da 3 e $v = u/(u-3)$. Si chiede:

i) È vero che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(v)$?

ii) Mostrare che u è algebrico se e solo se lo è v.

iii) Se u e v sono algebrici e p_u, p_v sono, rispettivamente, i loro polinomi minimi in $\mathbb{Q}[x]$, è vero che $\deg(p_u) = \deg(p_v)$?

iv) Se $p_u = x^3 - 9x + 1$, calcolare p_v.

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 8.10.98 B

I Sia S_8 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \dots, 8\}$ e

$$\alpha = (1\,6)\circ(2\,6\,8)\circ(3\,5\,7\,8\,4)\,, \quad \beta = (1\,5\,7)\circ(2\,4\,5\,6\,8\,3)$$

due suoi elementi. Si chede:

i) Qual è l'ordine del sottogruppo $\langle\alpha\rangle$?

ii) α e β sono coniugati in S_8 ?

iii) Esiste un morfismo iniettivo $\phi : \mathbb{Z}_4 \to S_8$ tale che $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \langle\alpha\rangle$?

II Dati i numeri complessi $u = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$ e $v = u - 1$, si chiede:

i) Mostrare che u e v sono numeri algebrici e calcolarne i polinomi minimi, p_u e p_v, in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Ridurre, se è possibile, modulo 3 il polinomio p_v e decomporre tale riduzione nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}_3[x]$.

iii) Decomporre p_u nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{C}[x]$.

III Sia $\mathbb{Z}_3[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo delle classi di resti modulo 3, $f = ax^2 + 2x + 1$ un suo elemento e J l'ideale di $\mathbb{Z}_3[x]$ generato da f. Si chiede:

i) Quanti elementi ha l'anello quoziente $\mathbb{Z}_3[x]/J$?

ii) Trovare tutti gli $a \in \mathbb{Z}_3$ per cui $\mathbb{Z}_3[x]/J$ risulti un campo.

iii) Per ciascuno di tali a calcolare l'inverso in $\mathbb{Z}_3[x]/J$ dell'elemento $J + 2x$.

iv) Esiste $a \in \mathbb{Z}_3$ per cui $\mathbb{Z}_3[x]/J$ sia isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$?

IV Sia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto dell'anello degli interi per se stesso e sia $J = 3\mathbb{Z} \times 7\mathbb{Z}$. Si chiede:

i) L'ideale J è primo ?

ii) Trovare $w = (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che l'ideale $J + (w)$ sia massimale.

iii) Trovare un anello A ed un morfismo di anelli $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to A$ tale che $\ker f = J$.

iv) Un anello A che risponda al quesito precedente può essere un campo ?

Università degli Studi di Bologna — C.d.L in Matematica

Prova scritta di Algebra 29.1.99 A

I Sia S_8 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 8\}$ e

$$\alpha = (1\,4)\,, \quad \beta = (2\,5\,7)\circ(3\,6\,8)\,, \quad \gamma = (2\,3\,5\,6\,7\,8)$$

tre suoi elementi. Si chiede:

i) Trovare il periodo di $\beta\circ\gamma$ in S_8.

ii) È vero che $\langle\alpha, \beta\rangle \subseteq \langle\alpha, \gamma\rangle$?

iii) Trovare un sottogruppo H di S_8 tale che $\alpha \in H$ e $|H| = 4$.

iv) Mostrare che per nessun morfismo $\phi : \mathbb{Z} \to S_8$ può essere $\mathrm{Im}(\phi) = H$.

II Siano $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{Q}[x]$ gli anelli dei polinomi a coefficienti, rispettivamente, interi e razionali. Si chiede:

i) L'unione insiemistica degli ideali $(x^2 - 5x + 4)$ e $(2x - 2)$ di $\mathbb{Z}[x]$ è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$?

ii) Domanda uguale alla precedente sostituendo però $\mathbb{Z}[x]$ con $\mathbb{Q}[x]$.

iii) L'ideale $(x^2 + 1) \cap (2x - 2, x - 2)$ di $\mathbb{Q}[x]$ è primo ?

iv) L'ideale $(x^2 - 5x + 4) + (x - 2)$ di $\mathbb{Z}[x]$ è principale ?

III Sia $\mathbb{Z}_{11}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo delle classi di resti modulo 11 e J l'ideale di $\mathbb{Z}_{11}[x]$ generato da $x^2 + 4x + 1$. Si chiede:

i) Trovare un divisore di zero non nullo nell'anello quoziente $\mathbb{Z}_{11}[x]/J$.

ii) È vero che $J + 2x + 4$ ha periodo 2 nel gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_{11}[x]/J$?

iii) Quanti sono i sottoanelli di $\mathbb{Z}_{11}[x]/J$?

IV Siano $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ i campi dei reali e dei complessi e sia $u = 2i + \sqrt{-3 + 5i}$ dove $\sqrt{-3 + 5i}$ indica, tra i due numeri complessi il cui quadrato è $-3 + 5i$, quello che ha la parte reale positiva. Si chiede:

i) Trovare il polinomio minimo, p_u, di u in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Il numero complesso $-2i + \sqrt{-3 + 5i}$ è radice di p_u ?

iii) Scrivere u nella forma canonica per i numeri complessi: cioè trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che risulti $u = a + bi$.

Università degli Studi di Bologna — C.d.L in Matematica

Prova scritta di Algebra 18.2.99 D

I Sia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ il gruppo prodotto diretto del gruppo additivo degli interi per se stesso e sia H il sottogruppo di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generato da $(9, 15)$. Si chiede:

i) Mostrare che i laterali $H + (4, 4)$ e $H + (49, 49)$ di H non sono uguali.

ii) È vero che il gruppo quoziente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/H$ è infinito ?

iii) Trovare il periodo di $H + (12, 20)$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/H$.

iv) Esiste un epimorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/H$?

II Sia $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto degli anelli, delle classi di resti modulo 15 e degli interi. Si chiede:

i) È vero che l'elemento $([2]_{15}, 47)$ appartiene ad ogni sottoanello di $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}$?

ii) Trovare due ideali distinti, I e J, di $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}$ tali che gli anelli quoziente $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}/I$ e $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}/J$ siano isomorfi.

iii) Esiste un ideale I di $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}$ tale che $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}/I \cong \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_5$?

III Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali e $\phi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sia la funzione definita da; per ogni $f \in \mathbb{Q}[x]$, $\phi(f) = (f(5), f(6))$. Si chiede:

i) Mostrare che ϕ è un morfismo di anelli.

ii) Trovare un generatore dell'ideale $\ker \phi$.

iii) È vero che per ogni $f \in \mathbb{Q}[x]$ esiste $r \in \mathbb{Q}[x]$, nullo oppure di grado minore di 2, per il quale risulta $\phi(r) = \phi(f)$?

iv) Mostrare che $(10, 13) \in \operatorname{Im}(\phi)$.

IV Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei razionali ed A il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ così definito;

$$A = \{ \frac{z}{7^n} \mid z, n \in \mathbb{Z} \ \& \ n \geq 0 \}$$

Si chiede:

i) Mostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

ii) Trovare gli elementi invertibili di A.

iii) È vero che gli ideali $(\frac{10}{7}) + (\frac{25}{49})$ e (5) di A sono uguali ?

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica

Esercitazione scritta di Algebra 23.2.99 C

I Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali e $\sqsubseteq$ la relazione d'ordine in $\mathbb{N}$ così definita; per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m \sqsubseteq n \iff [(m = n) \vee (m \leq 50 \ \& \ m \leq n)]$. Si chiede:

i) L'ordine $\sqsubseteq$ è totale ?

ii) Trovare, se esiste, il minimo di $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$.

iii) Elencare gli elementi dell'insieme $\{a \mid a \in \mathbb{N} \ \& \ 48 \sqsubseteq a \ \& \ a \sqsubseteq 60\}$.

II Sia $\mathbb{Z}_{18}$ l'anello delle classi di resti modulo 18 ed A un anello. Si chiede:

i) Esiste A per cui l'anello prodotto diretto $A \times \mathbb{Z}_{18}$ risulti un dominio di integrità ?

ii) Trovare A in modo che $A \times \mathbb{Z}_{18}$ abbia caratteristica 36.

iii) Esiste A per il quale $A \times \mathbb{Z}_{18}$ abbia esattamente 12 elementi invertibili ?

III Sia S_6 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 6\}$ ed H il sottogruppo di S_6 generato da $\alpha = (3\,5\,4) \circ (1\,2\,4\,3)$. Si chiede:

i) Elencare gli elementi di H.

ii) Se A_6 è il sottogruppo alterno di S_6, trovare l'ordine di $H \cap A_6$.

iii) Trovare un morfismo $\phi : \mathbb{Z} \to S_6$ tale che $\ker \phi = 2\mathbb{Z} \ \& \ \mathrm{Im}(\phi) \subseteq H$.

IV Sia $\mathbb{Z}_8$ l'anello delle classi di resti modulo 8 e K un campo. Si chiede:

i) Può esistere in K un sottoanello isomorfo a $\mathbb{Z}_8$?

ii) Si può scegliere K in modo che esista un morfismo di anelli $\phi : \mathbb{Z}_8 \to K$?

iii) È possibile che esista un morfismo di anelli $\psi : K \to \mathbb{Z}_8$?

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 4.6.99 A

I Sia S_8 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 8\}$ ed $H \subseteq S_8$ sia così definito; per ogni $\alpha \in S_8$,

$$\alpha \in H \iff \alpha(\{2,3,4\}) = \{2,3,4\}$$

Si chiede:

i) Mostrare che H è un sottogruppo di S_8.

ii) H è isomorfo ad S_3 ?

iii) Trovare un coniugato di $(2\,4)$ che non stia in H.

iv) Esiste in H un elemento di periodo 7 ?

II Siano $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$ i campi dei razionali e dei complessi e $\sigma_u : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ sia il morfismo sostituzione relativo al numero complesso u. Si chiede:

i) Mostrare che se $u^{-1} \in \mathrm{Im}(\sigma_u)$ allora u è un numero algebrico.

ii) Se $f = x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ e $g = x^4 + x^3 - 2x - 4$, trovare u in modo che $\ker \sigma_u$ sia l'ideale $(\{f, g\})$.

iii) Mostrare che se $u = 3 + \sqrt{2}$ allora $\mathrm{Im}(\sigma_u) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

III Sia $\mathbb{Z}_{11}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_{11}$ e sia J l'ideale di $\mathbb{Z}_{11}[x]$ generato da $x^2 + [a]_{11}x + [2]_{11}$. Si chiede:

i) Quanti elementi ha l'anello quoziente $\mathbb{Z}_{11}[x]/J$?

ii) Mostrare che per $a = 1$ in $\mathbb{Z}_{11}[x]/J$ ci sono dei divisori dello zero non nulli.

iii) Trovare $a \in \mathbb{Z}$ per cui $\mathbb{Z}_{11}[x]/J$ sia un campo.

iv) È vero che se $\mathbb{Z}_{11}[x]/J$ è un campo allora $(J + x)^{120} = J + [1]_{11}$?

IV Sia $A = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto degli anelli, delle classi di resti modulo 8 e degli interi. Si chiede:

i) Elencare gli elementi di periodo finito del gruppo additivo di A.

ii) Trovare un sottoanello di A isomorfo a $\mathbb{Z}$.

iii) Esiste un morfismo di anelli da $\mathbb{Z}_8$ ad A ?

iv) Trovare un ideale massimale J di A tale che $([0]_8, 1) \in J$.

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica
Prova scritta di Algebra 9.7.99 C

I Sia u il numero reale $\sqrt[3]{7+\sqrt{6}}$. Si chiede:

i) Trovare il polinomio minimo, p_u, di u in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Mostrare che se ε è una radice cubica dell'unità allora il prodotto εu è radice di p_u.

iii) Trovare, nel campo dei numeri complessi, tutte le radici di p_u.

iv) Ridurre p_u modulo 3 (cosa possibile essendo p_u a coefficienti interi) e poi decomporre la riduzione nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}_3[x]$.

II Sia $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$ il gruppo prodotto diretto dei gruppi delle classi di resti modulo, rispettivamente, 4 e 12 e sia H il sottogruppo di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$ generato da $([1]_4, [5]_{12})$. Si chiede:

i) Elencare gli elementi del gruppo quoziente $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}/H$.

ii) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}/H$ è isomorfo al gruppo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

iii) Trovare un sottogruppo K di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$ per il quale si verifichi $|H| = |K|$ e $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}/H \ncong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}/K$.

III Sia $A = \mathbb{Z}_8^{\mathbb{N}}$ l'anello delle funzioni punto per punto dall'insieme dei naturali all'anello $\mathbb{Z}_8$. Siano poi A_0 il sottoanello fondamentale di A e $\vartheta \in A$ la funzione definita da: $\vartheta(n) = [5+4n]_8$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si chiede:

i) L'elemento ϑ appartiene ad A_0 ?

ii) Mostrare che ϑ è invertibile in A.

iii) È vero che, per ogni $\alpha \in A$, se α è invertibile allora $\alpha^2 = 1_A$?

iv) Mostrare che il sottoanello di A costituito dai polinomi nella ϑ a coefficienti in A_0 è finito, e trovarne la cardinalità.

IV Sia $\mathbb{Z}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi e siano $f = x^3+3x^2+x+2$ e $g = x^2+1$ due suoi elementi. Si chiede:

i) Trovare nell'ideale $(f) \cap (g)$ di $\mathbb{Z}[x]$ un polinomio non nullo e di grado minimo.

ii) È vero che $(f)+(g) = \mathbb{Z}[x]$?

iii) Mostrare che l'insieme H di tutti i polinomi $h \in \mathbb{Z}[x]$ tali che $h = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ e 5 divide $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$.

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica

Prova scritta di Algebra 14.9.99 A

I Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss ed $a = 51 + 18i$ e $b = 16 + 37i$ siano due suoi elementi. Si chiede:

i) Calcolare un massimo comun divisore d di a e b.

ii) È vero che l'ideale (d) di $\mathbb{Z}[i]$ è massimale ?

iii) È vero che $(d) \cap \mathbb{Z} = 13\mathbb{Z}$?

II Siano, S_8 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 8\}$ ed A_8 il suo sottogruppo alterno. Se H è il sottogruppo di S_8 generato dall'elemento $\sigma = (1\,5\,6) \circ (1\,3\,7\,8\,6)$, si chiede:

i) Quanti elementi ha H ?

ii) Mostrare che $H \subseteq A_8$.

iii) Elencare i coniugati di σ che stanno in H.

iv) Trovare un sottogruppo K di A_8 tale che $|K| = |H|$ e $K \ncong H$.

III Siano α ed u due numeri complessi che soddisfano le seguenti condizioni; $\alpha^2 - \alpha + 3 = 0$ ed $u^2 + u = \alpha$. Si chiede:

i) Mostrare che u è algebrico e trovarne il polinomio minimo, p_u, in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) È vero che anche $-1 - u$ è radice di p_u ?

iii) Mostrare che $\mathbb{Q}(\alpha)$ è contenuto propriamente in $\mathbb{Q}(u)$.

IV Siano, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto dell'anello degli interi per se stesso, J l'ideale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generato dalla coppia ordinata (r, s) ed A l'anello quoziente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/J$. Si chiede:

i) Trovare r ed s per i quali l'ideale J sia primo ma non massimale.

ii) Mostrare che se $(r, s) \neq (0, 0)$ allora gli anelli A e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non sono isomorfi.

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica

Prova scritta di Algebra 5.10.99 B

I Date le estensioni $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{11})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{11}+i)$ del campo dei numeri razionali si chiede:

i) È vero che i campi $\mathbb{Q}(i)$ e $\mathbb{Q}(i\sqrt{11})$ sono isomorfi ?

ii) Trovare un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ per cui risulti $\mathbb{Q}[x]/(f) \cong \mathbb{Q}(i\sqrt{11})$.

iii) Mostrare che $\mathbb{Q}(i\sqrt{11}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{11}+i)$.

II Sia $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ l'anello prodotto diretto dell' anello degli interi e del campo dei razionali. Siano poi A_0 il sottoanello fondamentale di A e J l'ideale di A generato da $(3, \frac{1}{2})$. Si chiede:

i) È vero che $(15, 3)$ appartiene a J ?

ii) Mostrare che J è massimale.

iii) Calcolare $J \cap A_0$.

iv) Trovare un sottoanello di A diverso da A_0, da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e da A stesso.

III Sia $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16}$ il gruppo prodotto diretto dei gruppi delle classi di resti modulo 8 e 16 e sia H il sottogruppo di $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16}$ generato da $([a]_8, [6]_{16})$. Si chiede:

i) Mostrare che $|H| = 8$ qualunque sia $a \in \mathbb{Z}$.

ii) Mostrare che per $a = 5$ il gruppo quoziente $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16}/H$ è ciclico.

iii) Trovare un $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 5$, per cui esiste un morfismo iniettivo da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16}/H$

IV Sia $f = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2$ un elemento dell'anello $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomi a coefficienti razionali. Si chiede:

i) Decomporre f nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Detta $\bar{f}$ la riduzione modulo 3 di f, decomporre $\bar{f}$ nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}_3[x]$.

iii) Esiste $g \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $\mathrm{MCD}(f, g)$ abbia grado 3 ?

iv) Trovare un morfismo di anelli ϕ da $\mathbb{Q}[x]$ al campo complesso $\mathbb{C}$ per il quale risulti $f \in \ker\phi$.

Università degli Studi di Bologna – C.d.L in Matematica

Prova scritta di Algebra 3.2.2000 A

I Sia S_6 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 6\}$ e siano, $\alpha = (1\,5) \circ (1\,2\,3)$ un suo elemento ed $f : \mathbb{Z} \longrightarrow S_6$ un morfismo di gruppi. Si chiede:

i) Trovare il periodo di α in S_6.

ii) Esistono in S_6 due elementi non coniugati e di periodo 6 ?

iii) Elencare gli f per cui risulta $\operatorname{Im}(f) = \langle \alpha \rangle$.

iv) È vero che esiste un solo f per cui si ha $11 \in \ker f$?

II Sia $\mathbb{Z}_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo delle classi di resti modulo 5 ed $f = x^2 + ax + [2]_5$ e $g = x^2 - x + [4]_5$ siano due suoi elementi. Si chiede:

i) L'ideale (g) è massimale in $\mathbb{Z}_5[x]$?

ii) Trovare $a \in \mathbb{Z}_5$ tale che l'inclusione $(f) \cdot (g) \subseteq (f) \cap (g)$ sia propria.

iii) È vero che per $a = [0]_5$ risulta $(f) + (g) = \mathbb{Z}_5[x]$?

III Sia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto dell'anello degli interi per se stesso e J sia un suo ideale tale che $(2, 8) \in J$. Si chiede:

i) Trovare J per il quale l'anello quoziente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/J$ risulti un campo.

ii) Mostrare che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/J$ è sempre finito.

iii) È vero che esiste J tale che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/J \cong \mathbb{Z}_4$?

IV Sia $\mathbb{R}$ il campo dei reali e sia u il numero reale $1 + \sqrt{\sqrt{6} - 1}$. Si chiede:

i) Trovare il polinomio minimo, p_u, di u in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Mostrare che anche $u_1 = 1 - \sqrt{\sqrt{6} - 1}$ è radice di p_u.

iii) Trovare $f \in \mathbb{R}[x]$ tale che $\deg(f) = 2$ e $f \mid p_u$.

iv) Esiste un campo K diverso da $\mathbb{Q}$ e da $\mathbb{Q}(u)$ per cui risulti $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(u)$?

Università degli Studi di Bologna — C.d.L in Matematica

Prova scritta di Algebra 24.2.2000 A

I Sia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto dell'anello degli interi per se stesso e $\alpha = (z, 3)$, $\beta = (w, 6)$ siano due suoi elementi. Si chiede:

i) Trovare $z, w \in \mathbb{Z}$ per i quali l'ideale (β) sia contenuto nell'ideale (α).

ii) Esiste $w \in \mathbb{Z}$ tale che l'anello quoziente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(\beta)$ sia un campo ?

iii) Mostrare che se $\mathrm{MCD}(z, w) = 1$ allora l'ideale $(\{\alpha, \beta\})$ è massimale.

II Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali ed $f = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 18x - 10$ e $g = x^3 - x^2 - 6x + 11$ siano due suoi elementi. Si chiede:

i) Sapendo che $f(2 + i) = 0$, decomporre f nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

ii) I polinomi f e g hanno nel campo complesso delle radici comuni ?

iii) Decomporre la riduzione modulo 3 di f, che indicheremo con $\bar{f}$, nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}_3[x]$.

iv) È vero che se K è un campo estensione di $\mathbb{Z}_3$ ed ha 9 elementi, allora $\bar{f}$ si spezza in $K[x]$ nel prodotto di fattori lineari ?

III Sia $\mathbb{Z}_{16}^*$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_{16}$ e $\mathbb{Z}_2$ sia il gruppo additivo delle classi di resti modulo 2. Si chiede:

i) Esistono in $\mathbb{Z}_{16}^*$ degli elementi di periodo 8 ?

ii) Trovare tutti i morfismi di gruppi da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_{16}^*$.

iii) Mostrare che $\langle\{[3]_{16}, [5]_{16}\}\rangle = \mathbb{Z}_{16}^*$.

IV Siano, $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi, $u = \sqrt{3}/(\sqrt{3} + i)$ e $\sigma_u : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C}$ il relativo morfismo sostituzione. Si chiede:

i) Mostrare che u non appartiene a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

ii) Trovare il polinomio minimo, p_u, di u in $\mathbb{Q}[x]$.

iii) Per quali $a, b \in \mathbb{Q}$ il polinimio $ax^2 + b$ appartiene a $\ker \sigma_u$?

iv) Mostrare che gli elementi di $\mathrm{Im}(\sigma_u)$ sono del tipo $q_1 + q_2 u$ con $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$.

Università di Bologna A.A. 2003/2004 C.d.L. in Matematica
Prova scritta di ALGEBRA (Vecchio ordinamento) 10. 6. 2004

1. Siano, Z, $\mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_{24}$ i gruppi, rispettivamente, degli interi e delle classi di resti modulo 6 e 24.

   a) Elencare i morfismi da $\mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_{24}$.

   b) Trovare un morfismo $\phi : \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_6$ tale che $\ker \phi = \langle [3]_{24} \rangle$.

   c) Nel gruppo prodotto diretto $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{24}$ trovare un sottogruppo con 9 elementi.

   d) Esiste un morfismo suriettivo da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{24}$?

2. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ siano $a = 3i + 9$ e $b = 6i - 2$.

   a) Si fattorizzino a e b in prodotto di irriducibili.

   b) Si determini un generatore c dell'ideale $J = (a) + (b)$.

   c) Si stabilisca se l'anello $\mathbb{Z}[i]/J$ è un campo.

   d) Si stabilisca se la caratteristica dell'anello $\mathbb{Z}[i]/J$ è 10.

3. Sia $u = \epsilon \sqrt[5]{3}$, ove $\epsilon \neq 1$ è una radice quinta primitiva complessa di 1 (cioè $\epsilon^5 = 1$).

   a) Si provi che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e si calcoli il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$.

   b) Si provi che $\epsilon \notin \mathbb{Q}[u]$. (Sugg: si mostri che il grado di ϵ su $\mathbb{Q}$ è minore o uguale di 4)

   c) Utilizzando b) si provi che $\mathbb{Q}[u]$ non è un campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$.

4. Sia $\mathbb{Z}_5$ il campo con 5 elementi.

   a) Si determinino due polinomi irriducibili monici di grado 2 f e g in $Z_5[x]$ tali che $f \neq g$.

   b) Sia ϵ una radice di f. Si stabilisca se $Z_5[\epsilon]$ è il campo di spezzamento per f su Z_5.

   c) Si stabilisca se il polinomio g ha radici in $Z_5[\epsilon]$.

Università di Bologna C.d.L. in Matematica A.A. 2003–04

Scritto di Algebra (vecchio ordinamento) – 13.7.04

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e $\alpha = 2 + 11i$, $\beta = 7 + 6i$ due suoi elementi.

a) Decomporre α nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}[i]$.

b) Trovare tutti i $\gamma, \varrho \in \mathbb{Z}[i]$ per cui si ha $\alpha = \beta\gamma + \varrho$ con $|\varrho| < |\beta|$.

c) Nell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\beta)$ esiste l'inverso dell'elemento $(\beta) + 1 + 2i$?

Esercizio 2. Sia $\mathbb{Z}_3[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ e siano, $f_0 = x^2 + [2]_3 x$, $f_1 = x^2 + [2]_3 x + [1]_3$ e $f_2 = x^2 + [2]_3 x + [2]_3$ tre suoi elementi.

a) Mostrare che gli anelli $\mathbb{Z}_3[x]/(f_0)$ e $\mathbb{Z}_3[x]/(f_1)$ non sono campi.

b) Mostrare che l'anello quoziente $F_2 = \mathbb{Z}_3[x]/(f_2)$ è un campo.

c) Trovare un generatore del gruppo moltiplicativo di F_2.

d) Trovare il campo di spezzamento su F_2 del polinomio $y^2 - [x+1]_{f_2} \in F_2[y]$.

Esercizio 3. Siano $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ i campi dei razionali e dei reali ed u sia il numero complesso tale che $u^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ e $\operatorname{Re} u > 0$.

a) Scrivere u nella forma canonica $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Trovare il polinomio minimo, p_u, di u in $\mathbb{Q}[x]$.

c) Mostrare che $i \in \mathbb{Q}(u)$.

d) Trovare un campo K tale che $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(u)$. (Inclusioni strette)

Esercizio 4. Siano, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_{24}$ i gruppi, rispettivamente, degli interi e delle classi di resti modulo 6 e 24.

a) Elencare i morfismi da $\mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_{24}$.

b) Trovare un morfismo $\phi : \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_6$ tale che $\ker\phi = \langle [3]_{24} \rangle$.

c) Nel gruppo prodotto diretto $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{24}$ trovare un sottogruppo con 9 elementi.

d) Esiste un morfismo suriettivo da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{24}$?

Università di Bologna C.d.L. in Matematica A.A. 2003–04

Scritto di Algebra (Vecchio ordinamento) (M. Manaresi) – 9.9.04

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss ed $\alpha = 5$, $\beta = -7 + 24i$ due suoi elementi.

a) Decomporre β nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}[i]$.
b) Trovare un generatore dell'ideale $(\alpha) \cap (\beta)$.
c) Trovare in $\mathbb{Z}[i]/(\beta)$ un elemento nilpotente non nullo.

Esercizio 2. Siano, $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali, $\mathbb{C}$ il campo dei complessi, $f_{a,b} = x^3 + ax + b$ un elemento di $\mathbb{Q}[x]$ ed $u \in \mathbb{C}$ una radice di $f_{a,b}$.
a) Per $a = 2$ e $b = 2$ trovare $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$.
b) Esistono $a, b \in \mathbb{Q}$ per i quali $1/3$ risulti radice doppia di $f_{a,b}$?
c) Trovare $a, b \in \mathbb{Q}$ in modo che $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sia il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di $f_{a,b}$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}_3[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ ed $f = x^5 + x^2 - x + [1]_3$ e $g = x^4 + x^3 - x^2 + x + [1]_3$ due suoi elementi.
a) Fattorizzare g nel prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_3[x]$.
b) Trovare un generatore dell'ideale $J = (f) + (g)$.
c) L'anello quoziente $K = \mathbb{Z}_3[x]/J$ è un campo ?
d) Mostrare che ogni elemento di K è radice del polinomio $y^9 - y \in K[y]$.

Esercizio 4. Siano $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, rispettivamente, i campi dei razionali, dei reali e dei complessi e sia $u = \sqrt[3]{5}$.
a) Trovare il polinomio minimo p_u di u in $\mathbb{Q}[x]$.
b) Individuare le altre due radici che p_u ha in $\mathbb{C}$.
c) Decomporre p_u nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{R}[x]$.
d) È vero che se $v \in \mathbb{Q}(u)$ allora $v \in \mathbb{Q}$ oppure $\mathbb{Q}(v) = \mathbb{Q}(u)$?

Esercizio 5. Sia $\mathbb{Z}_8$ il gruppo delle classi di resti modulo 8 e sia M l'insieme dei morfismi di gruppi $\phi : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$.
a) Trovare quanti elementi ha M.
b) Elencare gli elementi del sottoinsieme M_1 dei $\phi \in M$ che sono isomorfismi.
c) Mostrare che M_1 con l'operazione $\circ$ di composizione di funzioni è un gruppo.
d) Tale gruppo è abeliano ?

Università di Bologna C.d.L. in Matematica A.A. 2003–04

Scritto di Algebra - Vecchio ordinamento (M. Manaresi) – 24.9.04

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss, $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia α_n l'elemento di $\mathbb{Z}[i]$ definito da, $\alpha_n = n + (n+2)i$.

a) Decomporre α_3 nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Z}[i]$.

b) Trovare un generatore dell'ideale $(\alpha_0) + (\alpha_1)$.

c) L'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\alpha_0)$ ha caratteristica 2 ?

Esercizio 2. Siano, $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali, $\mathbb{C}$ il campo dei complessi, $f = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ed $u \in \mathbb{C}$ sia una radice di f.

a) Calcolare il quoziente della divisione di f per $x - u$.

b) Trovare le altre due radici che f ha in $\mathbb{C}$.

c) Verificare che $1/u = -u^2 + 1$.

Esercizio 3. Siano $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, rispettivamente, i campi dei razionali e dei reali e sia $u = \sqrt{5 - \sqrt{7}}$.

a) Trovare il polinomio minimo p_u di u su $\mathbb{Q}$.

b) Decomporre p_u nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Z}_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_5$ ed $f = x^5 + [3]_5x^4 + [2]_5x^2 + x + [2]_5$ e $g = x^4 - x^2 - [1]_5$ due suoi elementi e J l'ideale di $\mathbb{Z}_5[x]$ generato da $\{f, g\}$.

a) Esistono in J polinomi di primo grado ?

b) Mostrare che l'anello quoziente $K = \mathbb{Z}_5[x]/J$ è un campo.

c) Trovare il campo di spezzamento di g su $\mathbb{Z}_5$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{Z}_8$ il gruppo delle classi di resti modulo 8 e sia M l'insieme dei morfismi di gruppi $\phi : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$.

a) Trovare quanti elementi ha M.

b) Elencare gli elementi del sottoinsieme M_1 dei $\phi \in M$ che sono isomorfismi.

c) Mostrare che M_1 con l'operazione $\circ$ di composizione di funzioni è un gruppo.

d) Tale gruppo è abeliano ?