Università di Bologna C.d.L. in Matematica C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale A.A. 2002–03

Prova scritta di Algebra I – 7.1.03 – Compito B

Motivare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali ed E la relazione di equivalenza in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita, per ogni $(m,n),(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, da:

$$(m,n)\ E\ (r,s) \iff m + 3n = r + 3s$$

a) Provare che se $m_1 \neq m_2$ allora si ha $[(0,n_1)]_E \neq [(0,n_2)]_E$.

b) Elencare gli elementi di $[(4,4)]_E$.

Esercizio 2. Sia S_8 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,2,\ldots,8\}$ e $\sigma = (2\,5\,8\,3)\circ(1\,4\,2\,5)\circ(6\,7)$, $\tau = (7\,8)\circ(1\,2\,6)\circ(1\,2\,4\,5)$ siano due suoi elementi.

a) Calcolare il periodo di σ e τ.

b) È vero che τ è una permutazione pari ?

c) Trovare un morfismo $\phi : \mathbb{Z} \to S_8$ tale che $\mathrm{Im}(\phi) = \langle \sigma \rangle$.

d) Mostrare che risulta $\ker \phi = \langle 6 \rangle$.

Esercizio 3. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_8$ prodotto diretto degli anelli $\mathbb{Z}_{10}$ e $\mathbb{Z}_8$.

a) Elencare gli elementi dell'ideale I di A generato da $([5]_{10},[2]_8)$.

b) È vero che tutti gli elementi di I sono dei divisori di zero in A ?

c) Se μ è l'unico morfismo di anelli da $\mathbb{Z}$ ad A, mostrare che μ non è suriettivo.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali, siano $f = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$, $g = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$ due suoi elementi, e siano $I = (f)$, $J = (g)$ gli ideali di $\mathbb{Q}[x]$ generati rispettivamente dai polinomi f e g.

a) Trovare quoziente e resto della divisione di f per g.

b) Trovare un massimo comun divisore di f e g.

c) Determinare la molteplicità della radice -1 di f.

d) Determinare le decomposizioni di f e di g in polinomi irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

e) Determinare un generatore degli ideali $I + J$ e $I \cap J$.

f) L'ideale I è primo ? E' massimale ? Se non è massimale, si determini un ideale che lo contiene.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2002/2003
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale

Corso di ALGEBRA I Compito A 27. 1. 2003

1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme de naturali e $\mathcal{R}$ la relazione in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita, per ogni $(m,n),(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, da:

$$(m,n)\ \mathcal{R}\ (r,s) \iff [(m+n < r+s) \text{ oppure } (m+n = r+s \text{ e } n \geq s)]$$

   a) Dimostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine.

   b) Stabilire se $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine totale.

   c) Elencare gli elementi $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tali che $(0,1)\ \mathcal{R}\ (m,n)\ \mathcal{R}\ (1,2)$.

2. Sia S_8 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,2,\ldots,8\}$ e sia A_8 il suo spottogruppo costituito dalle permutazioni di segno pari.

   Si considerino $\alpha = (1\ 2\ 3)(2\ 1\ 4)(4\ 5\ 6) \in S_8$ e $\beta = (2,\ 7,\ 8) \in S_8$

   a) Scrivere α come prodotto di cicli disgiunti, e calcolarne il periodo.

   b) Stabilire se il sottogruppo $\langle\alpha\rangle$ generato da α è contenuto in A_8.

   c) Stabilire se il sottogruppo generato da $\{\alpha,\beta\}$ è ciclico.

   d) Stabilire se esiste un morfismo di gruppi $f : (\mathbb{Z}_{10},+) \to \langle\alpha\rangle$ tale che $\mathrm{Im}(f) = \langle\alpha\rangle$, e in caso affermativo determinarlo.

   e) Stabilire se esiste un morfismo di gruppi $g : (\mathbb{Z}_3,+) \to \langle\alpha^2\rangle$ tale che $\mathrm{Im}(g) = \langle\alpha\rangle$, e in caso affermativo determinarlo.

3. Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z}_2 \times Z$.

   a) Stabilire se l'elemento $([0]_2, 3)$ appartiene al sottogruppo S di A generato da $([1]_2, 3)$.

   b) Stabilire se l'ideale I generato da $([1]_2, 3)$ coincide con S.

   c) Stabilire se l'anello quoziente $\frac{A}{I}$ è finito o infinito.

   d) Stabilire se l'anello quoziente $\frac{A}{I}$ è un dominio.

4. In $\mathbb{Q}[x]$ si consideri l'ideale I generato dal polinomio x^3+x^2+x+1.

   a) Si stabilisca se I è un ideale primo.

   b) Si elenchino gli ideali dell'anello $A = \frac{\mathbb{Q}[x]}{I}$.

   c) Si stabilisca se $[x^2+x+1]$ è invertibile in A, e in caso affermativo se ne trovi l'inverso.

   d) Stabilire, motivando la risposta, se l'ideale $J = (x^2, x^3+x^2+x+1)$ di $\mathbb{Q}[x]$ contiene polinomi di grado 1.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2002/2003
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale

Corso di ALGEBRA I Compito B 27. 1. 2003

1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme de naturali e $\mathcal{R}$ la relazione in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita, per ogni $(m,n), (r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, da:

$$(m,n)\ \mathcal{R}\ (r,s) \iff [(m+n > r+s) \text{ oppure } (m+n = r+s \text{ e } n \leq s)]$$

   a) Dimostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine.
   b) Stabilire se $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine totale.
   c) Elencare gli elementi $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tali che $(1,2)\ \mathcal{R}\ (m,n)\ \mathcal{R}\ (0,1)$.

2. Sia S_8 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 8\}$ e sia A_8 il suo spottogruppo costituito dalle permutazioni di segno pari.
Si considerino $\alpha = (1\ 3\ 2)(3\ 1\ 4)(4\ 5\ 7) \in S_8$ e $\beta = (3,\ 6,\ 8) \in S_8$

   a) Scrivere α come prodotto di cicli disgiunti, e calcolarne il periodo.
   b) Stabilire se il sottogruppo $\langle\alpha\rangle$ generato da α è contenuto in A_8.
   c) Stabilire se il sottogruppo generato da $\{\alpha, \beta\}$ è ciclico.
   d) Stabilire se esiste un morfismo di gruppi $f : (\mathbb{Z}_{10}, +) \to \langle\alpha\rangle$ tale che $\mathrm{Im}(f) = \langle\alpha\rangle$, e in caso affermativo determinarlo.
   e) Stabilire se esiste un morfismo di gruppi $g : (\mathbb{Z}_3, +) \to \langle\alpha^2\rangle$ tale che $\mathrm{Im}(g) = \langle\alpha\rangle$, e in caso affermativo determinarlo.

3. Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z} \times Z_5$.

   a) Stabilire se l'elemento $(2, [0]_5))$ appartiene al sottogruppo S di A generato da $(2, [1]_5)$.
   b) Stabilire se l'ideale I generato da $(2, [1]_5)$ coincide con S.
   c) Stabilire se l'anello quoziente $\frac{A}{I}$ è finito o infinito.
   d) Stabilire se l'anello quoziente $\frac{A}{I}$ è un dominio.

4. In $\mathbb{Q}[x]$ si consideri l'ideale I generato dal polinomio $x^3 - 2x^2 + 2x$.

   a) Si stabilisca se I è un ideale primo.
   b) Si elenchino gli ideali dell'anello $A = \frac{\mathbb{Q}[x]}{I}$.
   c) Si stabilisca se $[x^2 - x + 1]$ è invertibile in A, e in caso affermativo se ne trovi l'inverso.
   d) Stabilire, motivando la risposta, se l'ideale $J = ((x-1)^2, x^3 - 2x^2 + 2x)$ di $\mathbb{Q}[x]$ contiene polinomi di grado 1.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2002/2003
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale
Corso di ALGEBRA I Compito A 10. 2. 2003

1. Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi e $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita, per ogni $(m,n),(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, da:

$$(m,n)\ \mathcal{R}\ (r,s) \Longleftrightarrow 3m^2 + |n| = 3r^2 + |s|$$

   a) Elencare gli elementi di $[(1,3)]_{\mathcal{R}}$.

   b) È vero che se $n \neq s$ allora $[(0,n)]_{\mathcal{R}} \neq [(0,s)]_{\mathcal{R}}$?

2. Sia S_6 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,2,\ldots,6\}$ ed H il suo sottogruppo generato dall'insieme $\{(2\,4),\,(1\,3\,5\,6)\}$.

   a) Elencare gli elementi di H.

   b) H è un sottogruppo ciclico di S_6 ?

   c) Trovare $H \cap A_6$ dove A_6 è il sottogruppo alterno di S_6 e stabilire se S è ciclico.

   d) Esiste un morfismo $\phi : \mathbb{Z} \to S_6$ con $\mathrm{Im}(\phi) = H \cap A_6$?

3. Sia $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$ l'anello prodotto diretto del campo $\mathbb{Z}_{11}$ per se stesso.

   a) Trovare la caratteristica di $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$.

   b) Quanti sono gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$?

   c) Mostrare che $\psi : \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11} \to \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$ tale che $\psi : ([x]_{11},[y]_{11}) \mapsto ([x]_{11},[x]_{11})$ è un morfismo di anelli.

   d) Esiste un sottoanello di $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$ che sia un campo ?

   e) Elencare gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$.

4. Siano, $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali, $f = (x^2+3)(x^3-2x+2)$, $g = x^4+x^3+x^2+3x-6$ due suoi elementi e $\mathbb{C}$ il campo complesso.

   a) Decomporre g nel prodotto di polinomi irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

   b) Trovare il massimo comun divisore tra f e g.

   c) Trovare le radici comuni di f e g in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{C}$.

   d) Nell'ideale $J = (f) + (g)$ di $\mathbb{Q}[x]$ ci sono polinomi di primo grado ?

   e) Mostrare che l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/J$ è un campo.

   f) $\mathbb{Q}[x]/J$ è isomorfo a $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x-2)$?

Università desli Studi di Bologna A.A. 2002/2003
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale
Corso di ALGEBRA I Compito B 10. 2. 2003

1. Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi e $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita, per ogni $(m,n),(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, da:

$$(m,n)\ \mathcal{R}\ (r,s) \iff |m| + 3n^2 = |r| + 3s^2$$

   a) Elencare gli elementi di $[(3,1)]_{\mathcal{R}}$.

   b) È vero che se $n \neq s$ allora $[(n,0)]_{\mathcal{R}} \neq [(s,0)]_{\mathcal{R}}$?

2. Sia S_6 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,2,\ldots,6\}$ ed H il suo sottogruppo generato dall'insieme $\{(3\,4),(1\,5\,2\,6)\}$.

   a) Elencare gli elementi di H.

   b) H è un sottogruppo ciclico di S_6 ?

   c) Trovare $H \cap A_6$ dove A_6 è il sottogruppo alterno di S_6 e stabilire se S è ciclico.

   d) Esiste un morfismo $\phi : \mathbb{Z} \to S_6$ con $\mathrm{Im}(\phi) = H \cap A_6$?

3. Sia $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13}$ l'anello prodotto diretto del campo $\mathbb{Z}_{13}$ per se stesso.

   a) Trovare la caratteristica di $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13}$.

   b) Quanti sono gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13}$?

   c) Mostrare che $\psi : \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13} \to \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13}$ tale che $\psi : ([x]_{13},[y]_{13}) \mapsto ([x]_{13},[x]_{13})$ è un morfismo di anelli.

   d) Esiste un sottoanello di $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13}$ che sia un campo ?

   e) Elencare gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13}$.

4. Siano, $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali, $f = (x^2+2)(x^3 - 2x+2)$, $g = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$ due suoi elementi e $\mathbb{C}$ il campo complesso.

   a) Decomporre g nel prodotto di polinomi irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

   b) Trovare il massimo comun divisore tra f e g.

   c) Trovare le radici comuni di f e g in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{C}$.

   d) Nell'ideale $J = (f) + (g)$ di $\mathbb{Q}[x]$ ci sono polinomi di primo grado ?

   e) Mostrare che l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/J$ è un campo.

   f) $\mathbb{Q}[x]/J$ è isomorfo a $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x-2)$?

Università degli Studi di Bologna **A.A. 2002–03**

C.d.L. in Matematica, C.d.L. in Matematica Informatico–Computazionale

Scritto di Algebra I **4.6.03**

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi e $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita, per ogni $(m, n), (r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, da:

$$(m, n)\ \mathcal{R}\ (r, s) \iff -m + n^2 = -r + s^2$$

a) Stabilire se l'insieme $[(1, 3)]_{\mathcal{R}}$ è finito o infinito.
b) È vero che se $n \neq s$ allora $[(-5, n)]_{\mathcal{R}} \neq [(-5, s)]_{\mathcal{R}}$?

Esercizio 2. Sia $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ il prodotto diretto dei gruppi delle classi resto modulo 8 e delle delle classi resto modulo 9. Sia $H = \{ ([2z]_4, [3w]_9) \mid z, w \in \mathbb{Z} \}$.
a) Elencare gli elementi di H e mostrare che H è un sottogruppo proprio di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$.
b) Stabilire se H è ciclico, e in caso affermativo trovarne un generatore.
c) Determinare, se esiste, un morfismo $\phi : \mathbb{Z} \to H$ tale che $\mathrm{Im}(\phi)$ abbia ordine 2.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei razionali ed A il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ di tutte le frazioni che si possono scrivere nella forma $z/10^n$ con $z, n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$.
a) Mostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.
b) Verificare che $\mathbb{Z} \subseteq A$.
c) È vero che 5 è un elemento invertibile di A ?
d) Mostrare che l'ideale J di A generato da 9 non è primo.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo dei razionali e siano $f = 6x^2 - x - 1$, $g = x^2 + x + a$ e $h = 12x^3 + 4x^2 - 3x + b$ tre suoi elementi.
a) Mostrare che l'ideale (f) non è massimale.
b) Trovare, se esiste, $b \in \mathbb{Q}$ per il quale f divida h.
c) Esiste $a \in \mathbb{Q}$ per cui g abbia una radice multipla ?
d) È vero che per $a = b = 1$ l'ideale $(g) + (h)$ è tutto l'anello $\mathbb{Q}[x]$?

Università desli Studi di Bologna A.A. 2002/2003
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di ALGEBRA I 9. 7. 2003

1. Sia $\mathbb{N}^+$ l'insieme dei numeri naturali positivi e $\mathcal{R}$ la relazione d'ordine in $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ definita, per ogni $(m,n),(r,s) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, da:
$$(m,n)\ \mathcal{R}\ (r,s) \Longleftrightarrow (m|r \quad \text{e} \quad m+n \leq r+s)$$
   a) Si elenchino gli elmenti di $A := \{(m,n) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ | (m,n)\mathcal{R}(4,1)\}$.
   b) Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine totale.

2. Sia S_6 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,2,\dots,6\}$ e sia $U := \{\sigma \in S_6 | \sigma(1) = 3 \text{ e } \sigma(3) = 1\}$.
   a) Si stabilisca quanti elementi ha l'insieme U.
   b) Si stabilisca se U è un sottogruppo di S_6.
   c) Si determinino due elementi α e β di U che non commutino tra loro.
   d) Si stabilisca se esistono un elemento $\gamma \in U$ di ordine 3 e un elemento $\tau \in U$ di ordine 6.

3. Si consideri l'anello $A := \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Q}$.
   a) Si stabilisca se l'elemento $([4]_6, 4)$ è invertibile in A.
   b) Si elenchino tutti gli ideali di A e si determini tra essi un ideale massimale.
   c) Si determini la caratteristica di A.
   d) Si stabilisca se esiste un morfismo suriettivo di anelli $\varphi : \mathbb{Z} \to A$.

4. Nell'anello $\mathbb{R}[x]$ si considerino i polinomi $f = x^2+2x-a$ e $g = x^3+4x^2+4x+3$.
   a) Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'anello $\frac{\mathbb{R}[x]}{(f)}$ è un campo.
   b) Posto $a = 3$, si determinino un generatore dell'ideale $I = (f) + (g)$ e un generatore dell'ideale $J = (f) \cap (g)$.
   c) Siano $a = 3$ e J come nel punto b). Si stabilisca se $[x^2 + x - 2]$ è un elemento invertibile in $\frac{\mathbb{R}[x]}{J}$.
   d) Si stabilisca se esiste un polinomio $h \neq g$ tale che $\frac{\mathbb{R}[x]}{(h,g)}$ non sia un campo.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2002/2003

C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di ALGEBRA I 8. 9. 2003

1. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi si consideri la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ definita, per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$, da:

$$m \,\mathcal{R}\, n \iff (2m \equiv 2n \mod 6 \quad \text{e} \quad m \equiv n \mod 5)$$

   a) Si stabilisca se la classe $[4]_{\mathcal{R}}$ è finita o infinita.

   b) Si stabilisca quanti elementi ha l'insieme quoziente $\mathbb{Z}_{/\mathcal{R}}$.

2. Si consideri il gruppo $G = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6$ e sia $H = \langle ([5]_{10}, [2]_6), ([2]_{10}, [0]_6) \rangle$ il sottogruppo generato dagli elementi $([5]_{10}, [2]_6)$ e $([2]_{10}, [0]_6)$.

   a) Si elenchino gli elementi di H.

   b) Si stabilisca se H è ciclico.

   c) Si determinino tutti gli elementi di G di periodo 6.

   d) Si trovino tutti i morfismi iniettivi $f : \mathbb{Z}_6 \to G$.

3. Si consideri l'anello $A := \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}$.

   a) Si stabilisca se in A esistono elementi nilpotenti e in caso affermativo li si determinino.

   b) Si stabilisca se l'elemento $([5]_{12}, 2)$ è invertibile in A.

   c) Si trovino, se esistono: – un ideale massimale di A; – un ideale primo di A che non sia massimale; – un ideale non banale di A che non sia primo.

   d) Si dimostri che ogni ideale non banale di A è principale.

4. Nell'anello $\mathbb{R}[x]$ si considerino i polinomi $f = x^3 - x^2 - x - 2$ e $g = x^4 + 2x^3 - x - 2$ e sia $A = \frac{\mathbb{R}[x]}{(f)}$ l'anello quoziente modulo l'ideale generato da f.

   a) Si determini un polinomio h di grado minore o uguale a 2 tale che in A si abbia $[h]_f = [x^4 - x^3 + 3]_f$.

   b) Si determinino, se esistono, un valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $[x^2 + ax + 1]_f$ sia invertibile in A e un valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $[x^2 + ax + 1]_f$ sia un divisore dello zero in A.

   c) Si determini un generatore dell'ideale $J = (f) + (g)$.

   d) Si stabilisca se $\frac{\mathbb{R}[x]}{J}$ è un dominio di integrità.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2002/2003
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale

Corso di ALGEBRA I 25. 9. 2003

1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $\mathcal{R}$ la relazione d'ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita, per ogni $(m, n), (r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, da:

$$(m, n)\ \mathcal{R}\ (r, s) \Longleftrightarrow (m \geq r \quad \text{e} \quad m^2 + n \leq r^2 + s)$$

   a) Si stabilisca se l'insieme $A := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | (m, n)\mathcal{R}(3, 10)\}$ è finito o infinito.

   b) Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine totale.

2. Si consideri il gruppo S_8 delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 8\}$ e sia $B := \{\sigma \in S_8 | \sigma^4 = id\}$, ove id è la permutazione identica.

   a) Si stabilisca se B è un sottogruppo di S_8.

   b) Si stabilisca se esistono due elementi di B di periodo 2 e 3 rispettivamente, e in caso affermativo li si determinino.

   c) Si stabilisca se esiste un elemento di B di segno pari, e in caso affermativo lo si determini.

3. Si consideri l'anello $A := \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{25}$.

   a) Si determini la caratteristica di A.

   b) Si stabilisca se l'insieme $U := \{([2r]_{10}, [5r]_{25}) | r \in \mathbb{Z}\}$ è un ideale di A.

   c) Si determinino tutti gli ideali primi di A.

   d) Si stabilisca se esiste un morfismo suriettivo di anelli $f : \mathbb{Z} \to A$.

4. Nell'anello $\mathbb{R}[x]$ si considerino i polinomi $f = x^3 + x^2 - 9x - 9$ e $g = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$ e sia $A = \frac{\mathbb{R}[x]}{(g)}$ l'anello quoziente modulo l'ideale generato da g.

   a) Si determini un generatore dell'ideale $J = (f) + (g)$ e si stabilisca se $\frac{\mathbb{R}[x]}{J}$ è un dominio di integrità.

   b) Si stabilisca se g ha radici multiple e se in A vi sono elementi nilpotenti.

   c) Si determinino tutti gli ideali di A, e si dica quali tra essi sono massimali.

Università di Bologna C.d.L. in Matematica C.d.L. in Matematica Informatico–Computazionale A.A. 2002–03

Scritto di Algebra I (M. Manaresi) – 18.12.03 –

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia, $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi, $\mathbb{Z}_9$ e $\mathbb{Z}_{16}$ gli insiemi delle classi di resti modulo 9 e 16 ed E la relazione di equivalenza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da; per ogni $(m,n),(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(m,n)\ E\ (r,s) \iff [\ m \equiv r \pmod 9\ \ \&\ \ n \equiv s \pmod{16}\ ]$$

a) Trovare $z \in \mathbb{Z}$ tale che si abbia $[(2,3)]_E = [(z,z)]_E$.

b) È vero che, per ogni $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, esiste $z \in \mathbb{Z}$ tale che $[(m,n)]_E = [(z,z)]_E$?

c) Esiste una biiezione tra il quoziente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/E$ e il prodotto cartesiano $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{16}$?

Esercizio 2. Sia S_6 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,2,\ldots,6\}$ e sia $\sigma = (2\,4\,5)^2 \circ (2\,3\,4\,6)$ un suo elemento.

a) Decomporre σ nel prodotto di cicli disgiunti di S_6.

b) Quanti elementi ha il sottogruppo di S_6 generato da σ ?

c) Trovare in S_6 due sottogruppi con 4 elementi che non siano isomorfi.

d) È vero che in S_6 tutti gli elementi di periodo 5 hanno lo stesso segno ?

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}_n$ l'anello delle classi di resti resti modulo l'intero positivo n.

a) Elencare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_8$.

b) Trovare, se esiste, $[x]_{35} \in \mathbb{Z}_{35}$ per cui si abbia $[22]_{35}[x]_{35} = [3]_{35}$.

c) Per quali n esiste un morfismo di anelli da $\mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_n$?

d) Se $n = p^2$ e p è un numero primo, mostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{Z}$, le classi $[a]_n$ e $[a+1]_n$ non possono essere entrambe divisori di zero in $\mathbb{Z}_n$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$ e siano $f = (x^2-4)(x^2+x-6)$ e $g = x^3 + (1-a)x^2 + (1-a)x - a$ due suoi elementi. Sia $A = \mathbb{R}[x]\,/(f)$.

a) Si determinino le radici di f in $\mathbb{R}$ con le relative molteplicità.

b) Si stabilisca per quali valori reali di a l'elemento $[g]_f$ è invertibile in A.

c) Si stabilisca se in A esistono elementi nilpotenti.

d) Posto $a = 3$ si stabilisca se l'ideale $I = (f) + (g)$ è primo e se il polinomio $h = x^2 + 2x - 3$ appartiene ad I.

Scritto di Algebra II (M. Manaresi) – 13.1.04

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei razionali.

a) Trovare $f \in \mathbb{Q}[x]$ per il quale 1 sia radice doppia e sia $f(0) = 1/2$ e $f(-1) = 1$. E' possibile trovare un tale f irriducibile ?

b) Sia $g \in \mathbb{Q}[x]$ con $\deg(g) < n$; mostrare che se esistono n numeri razionali distinti, $q_1, q_2, \ldots, q_n$, per cui $g(q_1) = g(q_2) = \ldots = g(q_n) = t$ allora g è il polinomio costante t.

c) Mostrare che il polinomio $f = x^4 - 5x^2 + 3$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

Esercizio 2. Siano, $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi, $\mathbb{Q}$ il campo dei razionali e $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss.

a) È vero che $\mathbb{Q}(i)$ è il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}[i]$? Motivare la risposta.

b) Siano $\alpha = 15+45\,i$ e $\beta = 7-21\,i$ due elementi di $\mathbb{Z}[i]$; determinare un generatore γ dell'ideale (α, β) di $\mathbb{Z}[i]$ da essi generato.

c) Mostrare che non esiste alcun morfismo di anelli $\psi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$.

d) È vero che gli unici morfismi di anelli da $\mathbb{Z}[i]$ a $\mathbb{Z}[i]$ stesso sono, l'identità e il coniugio ?

Esercizio 3. Siano $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ i campi dei razionali e dei reali e sia u il numero complesso $\sqrt{i}-i$ dove con $\sqrt{i}$ si indica quella tra le due radici quadrate di i che ha parte reale positiva.

a) Scrivere u nella forma canonica $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Trovare il polinomio minimo p_u di u in $\mathbb{Q}[x]$.

c) Decomporre p_u nel prodotto di irriducibili in $\mathbb{R}[x]$.

d) Mostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(u)$ e che $\mathbb{Q}(i) \subseteq \mathbb{Q}(u)$. Risulta $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(u)$?

e) Qual è il grado di $\mathbb{Q}(u)$ su $\mathbb{Q}(i)$?

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Z}_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_5$ ed f sia il polinomio $x^2 + x + [1]_5$. Poniamo poi $F = \mathbb{Z}_5[x]/(f)$ ed $\epsilon = [x]_f$ e identifichiamo ogni $a \in \mathbb{Z}_5$ con la classe $[a]_f$.

a) Mostrare che F è un campo e trovarne la cardinalità e la caratteristica.

b) Trovare $a_0, b_0, a_1, b_1 \in \mathbb{Z}_5$ tali che $\epsilon^2 = a_0 + b_0\epsilon$ e $([2]_5 + \epsilon)^{-1} = a_1 + b_1\epsilon$.

c) Il polinomio $y^2 + [2]_5$ di $F[y]$ ha radici in F ?

d) Trovare il campo di spezzamento K del polinomio $g = (x^2 + x + [1]_5)(x^2 + [2]_5) \in \mathbb{Z}_5[x]$ e calcolare $[K : \mathbb{Z}_5]$.

Università di Bologna C.d.L. in Matematica C.d.L. in Matematica
Informatico–Computazionale A.A. 2002–03

Scritto di Algebra I (M. Manaresi) – 10.2.04 –

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia, $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali e $\sqsubseteq$ la relazione d'ordine in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definita da; per ogni $(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$(m_1,n_1)\sqsubseteq(m_2,n_2)\Longleftrightarrow (\ m_1+n_1\leq m_2+n_2\ \&\ m_1-n_1\leq m_2-n_2\ )$$

a) Elencare gli $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tali che $(m,n)\sqsubseteq(2,2)$.
b) È vero che l'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid(x,y)\sqsubseteq(m,n)\}$ è finito, qualunque sia $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$?
c) Verificare che $\sqsubseteq$ non è un ordine totale.

Esercizio 2. Siano $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_8$ e $\mathbb{Z}_{16}$, rispettivamente, i gruppi degli interi e delle classi di resti resti modulo 8 e 16.
a) Elencare i morfismi di gruppi da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}_{16}$ che sono suriettivi.
b) Trovare un morfismo $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{16}$ per il quale si abbia $\mathrm{Im}(\phi)\cong\mathbb{Z}_8$.
c) È vero che esiste un solo morfismo $\psi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{16}$ con $\ker\psi=2\mathbb{Z}$?

Esercizio 2. Sia S il sottoinsieme del campo $\mathbb{Q}$ dei razionali definito da:

$$S=\{\frac{m}{6^n}\mid m,n\in\mathbb{Z}\ \&\ n\geq 0\}$$

a) Verificare che S è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.
b) S è un dominio di integrità ?
c) Mostrare che $1/3$ appartiene ad S ed è invertibile in S.
d) Trovare $a\in S$ che non sia invertibile in S.
e) Decidere se gli ideali (7) e (14) di S sono o no uguali.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali, J il suo ideale generato da $f=x^2+4x+3$ e $\pi:\mathbb{Q}[x]\to\mathbb{Q}[x]/J$ la proiezione canonica.
a) Mostrare che l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/J$ non è un dominio d'integrità.
b) Esiste in $\mathbb{Q}[x]/J$ un elemento non nullo il cui quadrato sia nullo ?
c) E' vero che gli ideali di $\mathbb{Q}[x]/J$ sono tutti principali ?
d) Trovare un g in $\mathbb{Q}[x]$ tale che $deg(g)=3$ e $\pi((g))=J$.

Università di Bologna **C.d.L. in Matematica** **A.A. 2004–05**

Compitino di Algebra I (M. Manaresi) – 16.12.04

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Siano $A = \{0,1,2\}$, $F = \{ f \mid f : A \to A \}$ e $\sim$ la relazione in F definita da; per ogni $f, g \in F$, $f \sim g \iff f(A) = g(A)$.

a) Mostrare che $\sim$ è una equivalenza.

b) È vero che se f è una funzione costante allora $[f]_\sim$ ha un solo elemento ?

c) Elencare gli elementi di $[\mathrm{id}_A]_\sim$.

d) Mostrare che l'insieme quoziente $F/\sim$ ha 7 elementi (cioè tanti quanti i sottoinsiemi non vuoti di A).

Esercizio 2. Siano $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi ed E la relazione nel prodotto cartesiano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definita da; per ogni $(r,s),(u,v) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $(r,s)\ E\ (u,v) \iff |r|+|s| = |u|+|v|$.

a) Mostrare che E è una equivalenza.

b) Verificare che se r ed s sono negativi allora $[(r,s)]_E = [(r-1, s+1)]_E$.

c) L'affermazione del punto b) è vera anche per r, s qualunque ?

d) Mostrare che, per ogni $(r,s) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, la $[(r,s)]_E$ è un insieme finito.

e) Da d) si può dedurre che l'insieme quoziente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/E$ è infinito ?

Esercizio 3. Sia S_7 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1,2,\dots,7\}$ e siano H, K i sottoinsiemi di S_7 definiti da; per ogni $\alpha \in S_7$,

$$\alpha \in H \iff \alpha(1) = 1\ \&\ \alpha(\{2,3\}) = \{2,3\}$$
$$\alpha \in K \iff \alpha(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$$

a) Mostrare che H e K sono sottogruppi di S_7.

b) Verificare che H è incluso propriamente in K.

c) Trovare $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ che abbiano periodo 4 e parità diverse.

d) H è un sottogruppo normale di K ?

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Z}_{72}$ il gruppo delle classi di resti modulo 72 e sia $g = [42]_{72}$ ed S il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{72}$ generato da g.

a) Calcolare il periodo di g in $\mathbb{Z}_{72}$.

b) Trovare in S, se esiste, un elemento di periodo 3,

c) Stabilire (senza calcolare il periodo di ogni elemento) quanti sono gli $h \in \mathbb{Z}_{72}$ tali che $|g| = |h|$.

d) Trovare due sottogruppi propri H e K di $\mathbb{Z}_{72}$ tali che $H \neq K$ e $H \cap K = S$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto dell'anello degli interi per se stesso ed X, Y siano i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$;

$$X = \{(z,z) \mid z \in \mathbb{Z}\} \qquad Y = \{(3z,3z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

a) Verificare che X e Y non sono ideali di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

b) Trovare l'ideale di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ generato da X.

Università di Bologna C.d.L. in Matematica C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale A.A. 2004–05

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 7.1.05 – Compito A

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia S_7 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$ e siano H, K i sottoinsiemi di S_7 definiti, per ogni $\alpha \in S_7$, da:

$$\alpha \in H \iff \alpha(1) = 1 \ \& \ \alpha(\{2,3\}) = \{2,3\}$$
$$\alpha \in K \iff \alpha(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$$

a) Mostrare che H e K sono sottogruppi di S_7, determinare l'ordine di ognuno di essi e verificare che H è incluso propriamente in K.

b) Trovare $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ che abbiano periodo 4 e parità diverse.

c) Scrivere esplicitamente tutti gli elementi di $G_1 := < \alpha_1 >$ e di $G_2 := < \alpha_2 >$ come prodotti di cicli disgiunti di S_7.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{Z}_{27}$ l'anello delle classi di resti modulo 27.

a) Trovare, se esiste, in $\mathbb{Z}_{27}$ un elemento $[a]_{27}$ tale che $[7]_{27} \cdot [a]_{27} = [2]_{27}$.

b) Stabilire se l'insieme degli zero-divisori di $\mathbb{Z}_{27}$ è un ideale di tale anello e, in caso affermativo, indicarne un generatore.

c) Esibire un ideale massimale di $\mathbb{Z}_{27}$.

d) Provare che il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_{27}$ è ciclico, indicandone un generatore.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo dei numeri razionali e siano $f = x^5 - 9x^3 + 4x^2 + 8x - 4$, $g = x^5 - x^4 - 10x^3 + 12x^2 + 12x - 8$ e $h = x^3 - 8x + 4$ tre suoi elementi.

a) Provare che il polinomio h è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ e che i polinomi f, g appartengono all'ideale $(h) \subseteq \mathbb{Q}[x]$.

b) Trovare un massimo comun divisore d di f e g e stabilire se il polinomio h appartiene all'ideale (f, g) di $\mathbb{Q}[x]$.

c) Elencare le radici di d in $\mathbb{Q}$ con le rispettive molteplicità.

d) Trovare tutti gli ideali primi J di $\mathbb{Q}[x]$ per i quali risulta $(d) \subseteq J$.

Esercizio 4. Siano $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali e sia E la relazione di equivaleza nel prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ definita, per ogni $(m, x), (n, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, da: $(m, x)\ E\ (n, y) \iff (-1)^m x = (-1)^n y$.

Elencare tutti gli elementi della classe di equivalenza $[(5, \sqrt{2})]_E$.

Università di Bologna C.d.L. in Matematica C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale A.A. 2004–05

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 14.6.05

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Date le congruenze

$$5(x+1) \equiv 2x \pmod 7$$

$$4x+2 \equiv 7 \pmod{21}$$

trovare le eventuali soluzioni comuni.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ il gruppo prodotto diretto dei gruppi delle classi di resti modulo, rispettivamente, 2 e 8 e sia S il sottogruppo di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ generato dall'insieme $\{([0]_2, [2]_8), ([1]_2, [4]_8)\}$.

a) Trovare l'ordine di S.
b) Mostrare che il periodo di ogni elemento di S è un divisore di 4.
c) Quante sono le classi dell'equivalenza indotta in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ dal sottogruppo S ?

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei razionali e K il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ di tutte le frazioni che si possono scrivere nella forma $w/12^m$ con $w, m \in \mathbb{Z}$ e $m \geq 0$.

a) Mostrare che K è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.
b) È vero che $\mathbb{Z}$ è sottoanello di K ?
c) Trovare, se esiste, l'inverso in K di $3/4$.
d) Mostrare che l'ideale di K generato da 25 non è primo.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali, siano $f = x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x - 2$ e $g = x + 1$ due suoi elementi e siano (f) e (g) gli ideali di $\mathbb{Q}[x]$ generati da f e g rispettivamente.

a) Verificare che f ha una radice in $\mathbb{Q}$.
b) Decomporre f nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.
c) Stabilire se esiste qualche relazione di inclusione tra gli ideali (f) e (g).
d) Determinare un generatore dell'ideale $L := (f) + (g)$.
e) Mostrare che la riduzione modulo 7 di f ha una radice multipla in $\mathbb{Z}_7$ e trovarne la molteplicità.

Università di Bologna C.d.L. in Matematica C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale A.A. 2004–05

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 6.7.05

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Siano date le equazioni,

$$9x + 12y = 6$$

$$4x + my = 2$$

nelle incognite x e y e con m intero.

a) Trovare le soluzioni intere della prima.
b) Esiste una soluzione intera (x_0, y_0) della prima con x_0 divisibile per 125 ?
c) Mostrare che se la seconda ha soluzioni intere allora m è dispari o il doppio di un dispari.
d) È vero che per $m = 5$ le due equazioni hanno delle soluzioni intere in comune ?

Esercizio 2. Sia S_6 il gruppo delle permutazioni su $\{1,2,3,4,5,6\}$ e siano, $\alpha = (1\,2\,4)\circ(2\,3\,5\,6)^2$ un suo elemento ed H il sottogruppo di S_6 generato dall'insieme $\{(1\,3\,5), (2\,4\,6)\}$.

a) Decomporre α nel prodotto di cicli disgiunti di S_6.
b) α appartiene ad A_6 ?
c) Elencare gli elementi di H.
d) H è ciclico ?

Esercizio 3. Sia $A = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$ l'anello prodotto diretto degli anelli delle classi di resti modulo, rispettivamente, 3, 3 e 9.

a) Quanti elementi $a \in A$ soddisfano la condizione $a^2 = 0$?
b) Trovare l'ordine del gruppo A^* degli elementi invertibili di A.
c) Verificare (possibilmente senza fare tutte le prove) che il periodo di ogni elemento di A^* è un divisore di 6.
d) Esistono dei sottogruppi del gruppo additivo di A che non sono ideali dell'anello ?

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Z}_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_5$ ed $f = x^5 + [3]_5x^4 + x^3 + [2]_5x^2 + [4]_5x + [1]_5$ e $g = x^3 + [2]_5x + [3]_5$ siano due suoi elementi.

a) Calcolare un massimo comun divisore d di f e g.
b) Elencare le radici, con relativa molteplicità, di g in $\mathbb{Z}_5$.

Università di Bologna **C.d.L. in Matematica** **C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale** **A.A. 2004–05**

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – **14.9.05**

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia S_7 il gruppo delle permutazioni su $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ e sia $\alpha = (5\,7\,1\,6)\circ(1\,6\,3\,2\,4)$ un suo elemento e $H = <\alpha>$ il sottogruppo di S_7 generato da α.

a) Determinare l'ordine di α.
b) Stabilire quali elementi di H sono permutazioni pari.
c) Trovare un sottogruppo G di H di ordine 4.
d) Esiste un sottogruppo G di H di ordine 4 che non sia ciclico?

Esercizio 2. Sia $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$ l'anello prodotto diretto degli anelli delle classi di resti modulo, rispettivamente, 2 e 9.

a) Quanti elementi $a \in A$ soddisfano la condizione $a^2 = 0$?
b) Elencare tutti i divisori dello zero di A.
c) Trovare l'ordine del gruppo A^* degli elementi invertibili di A.
d) Stabilire se per $m = 2, 9$ le equazioni $[3x]_m = [4]_m$ sono risolubili nell'anello $\mathbb{Z}_m$ e in caso affermativo trovare le soluzioni.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano $f = x^6 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 3$ e $g = x^6 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 3$ due suoi elementi.

a) Calcolare un massimo comun divisore d di f e g.
b) Stabilire se l'ideale (d) è massimale in $\mathbb{Q}[x]$.
c) Stabilire se il polinomio $h = x^3 + 6x + 3$ appartiene all'ideale (f, g) di $\mathbb{Q}[x]$.
d) Per p = 2 e p = 3 stabilire se il polinomio $[d(x)]_p$ di $\mathbb{Z}_p[x]$, riduzione modulo p del polinomio $d(x)$, è un massimo comun divisore di $[f(x)]_p$ e $[g(x)]_p$ in $\mathbb{Z}_p[x]$.

Esercizio 4. Dimostrare (per induzione su n) la seguente affermazione:

$$\text{per ogni } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{4n} k^3 \equiv 0 \pmod 4.$$

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 27.9.05

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia S_7 il gruppo delle permutazioni su $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, siano $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ due suoi elementi, siano $G = <\alpha>$ e $H = <\beta>$ i sottogruppi di S_7 generati rispettivamente da α e da β.

a) Determinare la scomposizione in cicli disgiunti, l'ordine, il segno e i punti fissi di α e di β.
b) Stabilire se α e β commutano.
c) Si determini l'ordine del gruppo $G \cap H$ e se ne elenchino gli elementi. Tale gruppo è ciclico?

Esercizio 2. Sia $A = \mathbb{Z}_{65}$ l'anello delle classi di resti modulo 65 e sia $\alpha = ([11]_{65})^{-1}$ un elemento di $(\mathbb{Z}_{65})^*$.

a) Elencare tutti i divisori dello zero di A.
b) Stabilire se esistono in A elementi il cui quadrato è zero.
c) Trovare un intero a tale che $\alpha = [a]_{65}$.
d) Usando il risultato precedente, risolvere la congruenza $11x \equiv 5 \pmod{65}$.
e) Trovare un intero b tale che $\alpha = [b]_{65}$ *e* $b \equiv 1 \pmod{12}$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano $f = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$ e $g = x^3 + 2x^2 - x - 2$ due suoi elementi.

a) Calcolare il quoziente e il resto della divisione di f per g.
b) Fattorizzare f in irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$ e di $\mathbb{R}[x]$.
c) Stabilire se f e g hanno radici comuni in $\mathbb{Q}$.
d) Se $[f(x)]_5$ denota il polinomio di $\mathbb{Z}_5[x]$, riduzione modulo 5 del polinomio $f(x)$, si trovi la fattorizzazione di $[f(x)]_5$ in irriducibili di $\mathbb{Z}_5[x]$.
e) Stabilire se l'ideale $I = (f, g)$ è massimale in $\mathbb{Q}[x]$.
f) Stabilire se il polinomio $h = x^2 + 3x - 5$ appartiene all'ideale I di $\mathbb{Q}[x]$.

Università di Bologna C.d.L. in Matematica C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale A.A. 2004–05

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 9.1.06

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia S_7 il gruppo delle permutazioni su $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, siano $\alpha = (1\,5\,6\,3\,7\,2)\circ(1\,2\,7\,4\,3\,5\,6)$ e $\beta = (1\,6\,5\,3\,7)\circ(1\,2\,7\,4\,3\,5\,6)$ due suoi elementi, $<\alpha>$ e $<\beta>$ i sottogruppi di S_7 generati rispettivamente da α e β.

a) Determinare le scomposizioni in cicli disgiunti, i punti fissi, il segno e l'ordine di α e di β.

b) Elencare tutti gli elementi di ordine 3 di $<\alpha>$ e di $<\beta>$.

c) Elencare tutti gli elementi pari di $<\alpha>$ e di $<\beta>$.

d) Trovare una permutazione di S_7 di ordine 3 che commuta sia con α che con β.

e) Quante sono le permutazioni di S_7 che commutano con la trasposizione $(1\,2)$?

Esercizio 2. Sia $A = \mathbb{Z}_{140}$ l'anello delle classi di resto modulo 140 e sia $G = (\mathbb{Z}_{140})^*$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili dell'anello A.

a) Nell'anello A esistono elementi nilpotenti?

b) Stabilire se gli elementi non invertibili di A sono tutti divisori dello zero di A.

c) Calcolare il numero degli elementi di G.

d) Trovare un intero a tale che $17a \equiv 43 \pmod{140}$.

e) Calcolare l'ordine di $[a]_{140}$ nel gruppo G.

f) Per $p = 2, 3$ determinare un elemento del gruppo G che abbia ordine p.

Esercizio 3. Considerate il polinomio intero $f(x) = x^8 - 2x^4 - 6$

a) Trovare le radici complesse di $f(x)$ e tracciarne la posizione nel piano complesso.

b) Scomporre il polinomio $f(x)$ in fattori irriducibili di $\mathbb{R}[x]$.

c) Scomporre il polinomio $f(x)$ in fattori irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

d) Stabilire se il polinomio $f(x)$ appartiene all'ideale (x^3+2) di $\mathbb{Q}[x]$.

e) Stabilire se l'ideale $(f(x), x^3+2)$ di $\mathbb{Q}[x]$ é proprio e determinarne un generatore.

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA I

9 GENNAIO 2006

PROF. LIBERO VERARDI
PROGRAMMA PROF. MIRELLA MANARESI

Segnate sul foglio il vostro nome e il vostro numero di matricola.
Le risposte vanno giustificate in modo completo.

Problema 1. Si trovino le soluzioni intere dell'equazione diofantea $12x + 9y = 30$.

Problema 2. Considerate le permutazioni

$$\alpha = (1\,2\,3\,4)(3\,4\,5\,6\,7) \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

in S_7.

(a) Trovate la scomposizione in cicli disgiunti, il segno e l'ordine di α e di β.

(b) Trovate una permutazione diversa dall'identità che commuta sia con a che con β.

(c) Esistono degli elementi di ordine 8 in S_7? Date un esempio oppure una dimostrazione della non esistenza.

Problema 3. Consideriamo i polinomi reali $f(x) = 4x^4 + x^2 - 3x + 1$ e $g(x) = 2x^4 - x^3 - 2x + 1$. Siano $I := (f)$ e $J := (g)$ gli ideali di $[x]$ generati da f e g rispettivamente.

(a) Fattorizzate $f(x)$ e $g(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ e in $\mathbb{C}[x]$.

(b) Trovate il quoziente e il resto della divisione di $f(x)$ per $g(x)$.

(c) Trovate un generatore per l'ideale $I + J$ e uno per l'ideale $I \cap J$.

(d) L'ideale I é massimale in $\mathbb{R}[x]$?

Problema 4. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$ e sia G il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di A.

(a) Si scrivano i divisori di zero dell'anello A.

(b) Si trovino due ideali non nulli di A che si intersecano nel nell'ideale nullo di A.

(c) Si determini l'ordine del gruppo G.

(d) Per ciascun divisore k dell'ordine di G, si decida se esiste un elemento di ordine k in G.

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA I

17 LUGLIO 2006

PROF. MIRELLA MANARESI

Segnate sul foglio il vostro nome e il vostro numero di matricola (per la lista dei voti).

Le risposte vanno giustificate in modo completo.

Problema 1.

(a) Trovate un intero a tale che $11a \equiv 5 \pmod{168}$.

(b) Trovate l'ordine della classe di a nel gruppo additivo $\mathbb{Z}_{168}$.

(c) Stabilire quanti sono gli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_{168}$.

(d) Trovate l'ordine della classe di a nel gruppo moltiplicativo $(\mathbb{Z}_{168})^*$ degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_{168}$.

Problema 2. Considerate la permutazione

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \in S_7.$$

(a) Trovate le orbite di α, la sua scomposizione come prodotto di cicli disgiunti, e il suo segno.

(b) Quanti cicli ci sono nel sottogrouppo $\langle \alpha \rangle \subseteq S_7$?

(c) Per ciascun divisore k dell'ordine di $\langle \alpha \rangle$ trovate un sottogruppo di $\langle \alpha \rangle$ di ordine k.

Problema 3. Considerate il polinomio intero

$$f(x) = x^4 - x^2 - 2x + 3.$$

(a) Scomponete $[f]_2$ e $[f]_3$ in $\mathbb{Z}_2[x]$ e $\mathbb{Z}_3[x]$ rispettivamente.

(b) Dimostrate che f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Esiste un primo p tale che $x - 1$ divida $[f(x)]_p$ in $\mathbb{Z}_p[x]$?

(d) Si consideri $p = 5$ e sia $g(x) = x^3 + x^2 + [2]_5 x + [2]_5 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Si stabilisca se l'ideale $I = ([f]_5, g) \subset \mathbb{Z}_5[x]$ è un ideale primo.

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA I

18 settembre 2006

Prof. Mirella Manaresi

Segnate sul foglio il vostro nome e il vostro numero di matricola (per la lista dei voti).

Le risposte vanno giustificate in modo completo.

Problema 1. Poniamo $\alpha = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)(3\,4\,5\,6) \in S_7$.

(a) Calcolate la scomposizione in cicli disgiunti di α, e trovate il suo ordine.

(b) Per ciascun divisore k dell'ordine di α trovate un sottogruppo di ordine k in $\langle \alpha \rangle$.

(c) Per quali interi k si ha che α^k è pari?

Problema 2.

(a) Calcolate il massimo comun divisore dei polinomi

$$x^7 - 2x^4 - 2x^3 + 4 \quad \text{e} \quad x^7 - 2x^4 + 2x^3 - 4$$

in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Trovate tutte le radici complesse di entrambi i polinomi, e disegnate la loro posizione nel campo complesso.

(c) Fattorizzate entrambi i polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{R}[x]$.

(d) Determinare un generatore dell'ideale

$$I = (x^7 - 2x^4 - 2x^3 + 4) \cap (x^7 - 2x^4 + 2x^3 - 4)$$

di $\mathbb{Q}[x]$.

Problema 3. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{15}$ e sia G is gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di A.

(a) Stabilire se l'insieme dei divisori di zero dell'anello A é un ideale di A.

(b) Determinare un ideale massimale dell'anello A.

(c) Qual è l'ordine di G?

(d) Per ciascun primo p che divide l'ordine di G, decidete se esiste un elemento di ordine p in G.

(e) Trovate due sottogruppi non banali di G che si intersecano nel sottogruppo banale $\{([1]_{14}, [1]_{15})\}$.