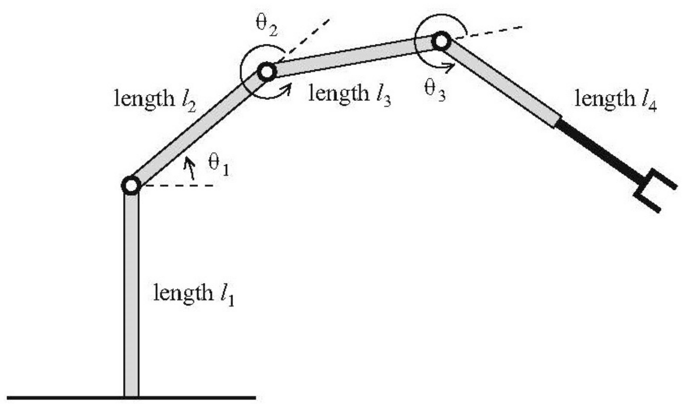
Università di Bologna - Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA PER LE APPLICAZIONI A.A. 2015/16 - N3

1. **Un robot planare** (D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.* Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2007, pag. 274, Example 2, Exercise 12, pag. 290). Si consideri il seguente robot planare con tre giunti di rotazione e un giunto prismatico:



Siano (a, b) le coordinate (nel sistema fissato con l'origine nel giunto 1 con l'asse x_1 orizzontale a destra e l'asse y_1 verticale in alto) del punto in cui si trova la mano. L'orientamento della mano sia dato dall'angolo α (che si misura come θ_1 in senso antiorario partendo dall'asse x_1).

Inoltre siano $l_2 = l_3 = 1$, $1 \leq l_4 \leq 2$.

(a) Dare una formula esplicita per la mappa $f\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ($\mathcal{J}$ = spazio dei giunti, $\mathcal{C}$ = spazio delle configurazioni del robot), che descrive il posizionamento della mano (a, b, α) in funzione di θ_1, θ_2, θ_3, l_4.

(b) Convertire la funzione f in una mappa polinomiale utilizzando in $\mathcal{J}$ le nuove coordinate $c_1 := \cos\theta_1$, $s_1 := \operatorname{sen}\theta_1$, $c_2 := \cos\theta_2$, $s_2 := \operatorname{sen}\theta_2$, $c := \cos\alpha$, $s := \operatorname{sen}\alpha$ e l_4.

(c) Data una posizione $(a, b, \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ della mano, trovare un sistema di equazioni le cui soluzioni diano le possibili configurazioni dei giunti per le quali si ottiene tale posizione della mano.

(d) Risolvere il sistema di (c) calcolando con un sistema di computer algebra una base di Gröbner (non necessariamente ridotta) per l'ideale generato dalle equazioni di (c) nell'anello

$$\mathbb{Q}(a, b, c, s, l_4)[s_1, s_2, c_1, c_2]$$

rispetto a un ordine lessicografico adeguato.

Nota bene: Un po' di sperimentazione può essere necessario per trovare un ordine ragionevole. L'ordine "sbagliato" può portare ad un problema completamente intrattabile in questo esempio. Provate con Singular (`option(noredSB)`) l'ordine $s_1 > s_2 > c_1 > c_2$.

(e) Quali sono le possibili posizioni e orientamenti della mano? In che modo l'insieme dei possibili orientamenti della mano varia con la posizione?

(f) Con quanti posizionamenti dei giunti può essere realizzata una configurazione (a, b, α) della mano in generale? Ci sono casi particolari?

(g) Calcolare le singolarità cinematiche del robot e descriverle geometricamente facendo riferimento alla domanda precedente.

(h) L'orientamento della mano sia fissato in direzione del semiasse delle x_1 positive. Decidere (senza o con l'uso del computer), se si può posizionare la mano nei seguenti punti:

$$(0.5,\, 1), \quad (0, 0), \quad (0,\, \sqrt{3}), \quad (4, 0), \quad (4, 1)\,.$$

In caso affermativo dire con quanti posizionamenti dei giunti il punto è raggiungibile. Per ogni possibile coppia (θ_1, θ_2) specificare l'intervallo per l_4.

2. **Il codice $[7, 3]$ di Reed-Solomon.**

(a) Dimostrare che il polinomio $x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ è irriducibile e primitivo.

(b) Utilizzare la classe $\alpha := [x] \in \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ per costruire il campo

$$\mathbb{F}_8 \cong \mathbb{F}_2(\alpha) \cong \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1) \cong {\mathbb{F}_2}^3,$$

quindi scrivere gli elementi di $\mathbb{F}_8$ come terne di elementi di $\mathbb{F}_2$ o come polinomi di grado ≤ 2 in $\mathbb{F}_2(\alpha)$ e costruire una tabella di moltiplicazione per gli elementi di $\mathbb{F}_8$.

Suggerimento: Esprimere α^j mediante un polinomio in α di grado al massimo 2.

(c) Quanti sono i caratteri dell'alfabeto e quante sono le parole del codice $[7, 3]$ di Reed-Solomon su $\mathbb{F}_8$? Quale è la sua distanza minima, quanti errori possono essere rilevati e quanti possono essere corretti?

(d) Scrivere il polinomio generatore g, la matrice generatrice G in forma standard e la matrice di controllo H del codice Reed-Solomon $[7, 3]$. Quante sindromi ci sono?

(e) Codificare la parola

$$w(x) = (\alpha + 1)x^6 + (\alpha^2 + \alpha + 1)x^5 + x^4$$

utilizzando: (1) il resto della divisione per g, (2) la moltiplicazione per la matrice generatrice G.

(f) Supponiamo che la trasmissione introduca non più di 4 errori. Rilevate e, se è possibile, correggete gli errori delle due parole ricevute:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^6 + x^5 + x^4 + (\alpha + 1)x^3 + (\alpha^2 + 1)x^2 + (\alpha^2 + 1)x + (\alpha^2 + \alpha + 1), \\ z(x) &= x^6 + x^5 + x^4 + (\alpha + 1)x^3 + (\alpha^2 + 1)x^2 + (\alpha^2 + 1)x + 1. \end{aligned}$$

Assumiamo che i coefficienti corrotti di z sono quelli di x^0, x^5, x^6. Si ricordi che le parole codice sono della forma $f(\alpha^6)x^6 + \cdots + f(\alpha)x + f(1)$ per qualche polinomio $f \in \mathbb{F}_8[x]$ di grado ≤ 2. Calcolate con 3 punti non corrotti un polinomio f di interpolazione di Lagrange di grado al massimo 2 e utilizzatelo per correggere z.