Università degli Studi di Bologna A.A. 2011/2012
C.d.L. Magistrale in Matematica
Corso di ALGEBRA SUPERIORE FOGLIO I (M.Manaresi)

Esercizio 1. Sia $I \subset A$ un ideale radicale di un anello A. Si provi che se I ha una decomposizione primaria, non ha primi immersi.

Esercizio 2. Sia A un anello non nullo. Provare che un ideale $I \subset A$ é radicale se e solo se I é intersezione di ideali primi.

Esercizio 3. Sia A un anello, R il suo nilradicale (ossia l'insieme di tutti gli elementi nilpotenti di A). Si provi che A ha solo un ideale primo se e solo se l'anello quoziente A/R é un campo.

Esercizio 4. Sia A un anello. Mostrare che, se per ogni ideale primo p di A l'anello locale A_p non ha nilpotenti non nulli, l'anello A non ha nilpotenti non nulli. Se ogni A_p é un dominio d'integritá, A é necessariamente un dominio d'integritá?

Esercizio 5. Sia A un anello non nullo e sia Σ l'insieme di tutti i sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi S di A tali che $0 \in S$. Mostrare che Σ ha elementi massimali e che $S \in \Sigma$ é massimale se e solo se $A \setminus S$ é un ideale primo minimale di A.

Esercizio 6. Sia A un anello e sia S_0 l'insieme di tutti i non-zero divisori di A. $S_0^{-1}A$ é detto anello totale delle frazioni di A. Provare che: i) S_0 é il piú grande sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A per il quale l'omomorfismo di anelli $A \to S_0^{-1}A$ é iniettivo; ii) ogni elemento di $S_0^{-1}A$ o é uno zero-divisore o é invertibile; iii) ogni anello in cui ogni elemento non invertibile é uno zero-divisore é isomorfo al suo anello totale delle frazioni, cioé l'omomorfismo $A \to S_0^{-1}A$ é biunivoco.

Esercizio 7. Si determinino due diverse decomposizioni primarie dell'ideale $I = (x^2y, xy^2) \subset \mathbb{C}[x, y]$, indicando quali sono i primi isolati.

Esercizio 8. Si stabilisca se gli ideali $I = (y - x^2, x - y) \subset \mathbb{C}[x, y]$ e $I = (x, z, x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ sono ideali radicali. Nel caso non siano primi se ne trovi una decomposizione primaria, stabilendo se é unica.

Esercizio 9. Si determinino due diverse decomposizioni primarie dell'ideale $I = (xyz^2, xy^2) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$, indicando quali sono i primi isolati.

Esercizio 10. Si stabilisca se gli anelli $(k[x, y]/(x^2y, xy^2))_{(x)}$ e $k[y]$ sono isomorfi.