Università degli Studi di Bologna A.A. 2011/2012
C.d.L. Magistrale in Matematica
Corso di ALGEBRA SUPERIORE FOGLIO II (M.Manaresi)

Esercizio 1. Sia A un anello locale noetheriano e $\mathfrak{m}$ il suo ideale massimale. Allora $\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{m}^i = (0)$.

Esercizio 2. Si consideri l'anello $A := k[u, v, w]/(uv, uw, w - v^2)$ e il suo ideale $I = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. Si calcoli l'altezza di I.

Esercizio 3. Si provi che se A é un anello locale regolare con $\mathfrak{m}$ ideale massimale e se $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, allora $A/(x)$ é un anello locale regolare. Si mostri anche che se $x \in \mathfrak{m}^2$ il risultato é falso.

Esercizio 4. Sia $A := k[x, y]_{(x,y)}$ e siano $B := A/(xy)$, $C := A/(x-y^2)$. Si stabilisca se gli anelli A, B, C sono anelli locali regolari.

Esercizio 5. Sia $A := k[x, y, z]_{(x,y,z)}$ e siano $B := A/(x - y^2 - z^2)$, $C := A/(x^2 - y^2 - z^2)$. Si stabilisca se gli anelli A, B, C sono anelli locali regolari.

Esercizio 6. Determinare l'altezza $ht(J)$ e il numero minimo di generatori $\mu(J)$ dell'ideale $J = (xz - y^2, x^3 - yz, z^2 - x^2y) \subset k[x, y, z]$, stabilendo se $ht(J) = \mu(J)$.

Esercizio 7. Sia $I = (f_1, f_2, f_3, f_4) \subset k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ dove $f_1 = x_0x_3 - x_1x_2$, $f_2 = {x_0}^2x_2 - {x_1}^3$, $f_3 = x_1{x_3}^2 - {x_2}^3$, $f_4 = x_0{x_2}^2 - {x_1}^2x_3$. Provare che I é il radicale dell'ideale (f_1, f_2, f_3).

Esercizio 8. Si stabilisca se gli anelli $A = k[x, y]/(2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3)$ e $B = k[x, y]/(x^2 - xy + x, xy - y^2 + y)$ sono artiniani.

Esercizio 9. Mostrare che se $A \subset B$ sono due anelli, tali che B é intero su A, $\mathfrak{q} \subset B$ é un ideale primo di B e $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$, allora $\mathfrak{q}$ é massimale se e solo se lo é $\mathfrak{p}$.

Esercizio 10. Siano $A \subset B$ due anelli. Mostrare che in generale possono esistere due ideali primi distinti $I \subset J$ di B tali che $I \cap A = J \cap A$, ma ció non puó avvenire se B é intero su A.