ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico *2009/2010*

Facoltà *Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali*

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica**

Insegnamento **Algebra Computazionale**

Docente titolare del corso prof. Mirella Manaresi

Altri docenti partecipanti (modulo) **Dr. Davide Aliffi**

Data inizio Lezioni 13 ottobre 2009

Data fine Lezioni 17 dicembre 2009

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***13 ottobre 2009***

Introduzione al corso: obiettivi, modalitá d'esame, informazioni varie.
Algoritmo della divisione in $K[x]$ con K campo. $K[x]$ é un dominio a ideali pricipali. Massimo comun divisore di due polinomi in $K[x]$. Il massimo comun divisore di due polinomi f, g é un generatore dell'ideale (f, g). Algoritmo euclideo per la determinazione del massimo comun divisore. L'anello $K[x_1, \cdots, x_n]$. Ordinamenti di monomi. Buoni ordinamenti e loro caratterizzazione.

Ore 2 (16-18) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***14 ottobre 2009***

Ordini monomiali: ordine lessicografico, lessicografico graduato, lessicografico graduato inverso. Algoritmo della divisione in $K[x_1, \cdots x_n]$.

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***15 ottobre 2009***

Ideali monomiali. Lemma di Dickson. Ideale monomiale generato dai termini principali dei polinomi di un ideale. Teorema della base di Hilbert.

Ore 2 (16-18) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***20 ottobre 2009***

Base di Gröbner di un ideale polinomiale rispetto ad un ordine monomiale. Esempi. In $K[x_1, \cdots, x_n]$ ogni catena ascendente di ideali é stazionaria. Ogni ideale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ ammette una base di Gröbner rispetto ad un fissato ordine monomiale. Unicitá del resto rispetto ad una base di Gröbner. S-polinomio di due polinomi dati rispetto ad un ordine monomiale. Teorema di Buchberger. Algoritmo per la determinazione di una base di Gröbner .

Ore 2 (16-18) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***20 ottobre 2009***

Introduzione a COCOA

Ore 1 (18-19) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula Tonelli***

Data ***21 ottobre 2009***

Basi di Gröbner minimali e basi di Gröbner ridotte. Unicita' della base di Gröbner ridotta rispetto ad un qualunque ordine monomiale. Esempi. Confronto fra ideali; algoritmo per decidere l'appartenenza o meno di un polinomio a un ideale. Ideali eliminazione. Determinazione di una base di Gröbner di un ideale eliminazione.

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***27 ottobre 2009***

Sistemi di equazioni polinomiali. Sistemi equivalenti e ideali di $K[x_1, \cdots, x_n]$.

Ore 1 (16-17) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***27 ottobre 2009***

Introduzione a SINGULAR.
Esercizi su algoritmo della divisione in $K[x_1, \cdots, x_n]$, *ideali, ordini monomiali, basi di Gröbner.*

Ore 2 (17-19) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***VII piano***

Data ***28 ottobre 2009***

Ideale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ costituito dai polinomi che si annullano su un sottoinsieme di K^n; ideale di definizione di un insieme algebrico affine.
Applicazione del teorema di eliminazione alla soluzione di sistemi di equazioni polinomiali. Esempi.
Teorema di estenzione. Esempi. Interpretazione geometrica del teorema di eliminazione e del teorema di estensione.
Teorema di chiusura.

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***29 ottobre 2009***

Esercizi su eliminazione e soluzione di sistemi di equazioni polinomiali.
Teorema di implicitizzazione polinomiale. Esempi: la superficie delle rette tangenti a una cubica gobba.

Ore 2 (15-17) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***3 novembre 2009***

Determinazione delle equazioni cartesiane della piú piccola varieta' affine contenente una data parametrizzazione polinomiale (ombrello di Whitney, superficie di Nepero, ecc.).

Ore 1 (16-17) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***3 novembre 2009***

Esercizi su basi di Gröbner e sistemi di equazioni polinomiali.

Ore 2 (17-19) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***VII Piano***

Data ***4 novembre 2009***

Dimostrazione del teorema di implicitizzazione polinomiale. Teorema di implicitizzazione razionale. Esempi.
Polinomi irriducibili di $K[x_1, \cdots, x_n]$, decomposizione in irriducibili. Se un polinomio irriducibile f divide un prodotto deve dividere uno dei fattori.

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***5 novembre 2009***

Due polinomi $f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$ di grado positivo in x_1 hanno un fattore comune di grado positivo in x_1 se e solo se hanno un fattore comune in $K(x_2, \cdots, x_n)[x_1]$. Esistenza e unicitá della decomposizione in irriducibili per polinomi in piú variabili.
Esercizi sulla implicitizzazione razionale.

Ore 2 (15-17) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***10 novembre 2009***

Matrice di Sylvester e risultante di due polinomi in una variabile. Proprietá del risultante. Esempi. Espressione del risultante come combinazione dei due polinomi dati.

Ore 1(15-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***10 novembre 2009***

Esercizi su sistemi di equazioni polinomiali e implicitizzazione polinomiale.

Ore 2 (17-19) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII Piano***

Data ***11 novembre 2009***

Risultante di due polinomi di $K[x_1, \cdots, x_n]$ rispetto a x_1. Tale risultante é combinazione dei due polinomi dati e dipende solo dalle variabili $x_2, \cdots, x_n$, inoltre e' identicamente nullo se e solo se i due polinomi dati hanno un fattore comune di grado positivo in x_1. Dimostrazione del teorema di estensione nel caso di due soli polinomi. Risultanti generalizzati di s polinomi $f_1, \cdots, f_s \in K[x_1, \cdots, x_n]$. Esempi. Dimostrazione del teorema di estensione nel caso generale. La corrispondenza ideali-varieta'. Esempi e considerazioni generali.

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***17 novembre 2009***

Esercizi sul risultante con COCOA.
Teorema degli zeri di Hilbert in forma debole. Algoritmo per stabilire se un sistema di equazioni polinomiali non ha soluzioni. Teorema degli zeri di Hilbert. Corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi algebrici affini di K^n (con K algebricamente chiuso e ideali radicali di $K[x_1, \cdots, x_n]$. Algoritmo per stabilire se un polinomio $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ appartiene al radicale di un ideale $I = (f_1, \cdots, f_n) \subset K[x_1, \cdots, x_n]$. Esempi con COCOA.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***17 novembre 2009***

Radicale di un ideale principale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ e algoritmo per la sua determinazione. Somma di ideali e intersezione di varietá; prodotto di ideali e unione di varietá. Intersezione di ideali e unione di varietá. Algoritmo per l'ntersezione di ideali. Algoritmo per il calcolo del minimo comune multiplo di due polinomi. Esercizi.

Ore 2 (16-18) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII Piano***

Data ***18 novembre 2009***

Quoziente di ideali. Esempi. Chiusura di Zariski di un sottoinsieme di K^n. Dimostrazione del teorema di chiusura. Chiusura di Zariski della differenza di due varietá e ideale quoziente degli ideali delle due varietá.

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio multimediale***

Data ***24 novembre 2009***

Proprietá del quoziente di ideali. Algoritmo per il calcolo di una base dell'ideale quoziente.
Varietá irriducibili e varietá riducibili. Corrispondenza tra varietá irriducibili e ideali primi. Le varietá definite attraverso parametrizzazioni polinomiali sono irriducibili.

Ore 1 (16-17) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio multimediale***

Data ***24 novembre 2009***

Esercizi su implicitizzazione razionale, eliminazione e risultanti.

Ore 2 (17-19) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII Piano***

Data ***25 novembre 2009***

Robot planari con giunti di rotazione e giunti telescopici: spazio dei giunti e spazio delle configurazioni. Problemi cinematici della robotica: problema cinematico diretto e problema cinematico inverso. Formula esplicita che fornisce la posizione della mano in funzione della posizione dei giunti nel caso di un robot con giunti di rotazione e nel caso di un robot con giunti di rotazione e giunti telescopici. Problema cinematico inverso e sistemi di equazioni polinomiali.

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***26 novembre 2009***

Le varietá definite attraverso parametrizzazioni razionali sono irriducibili.
Se K é algebricamente chiuso c'e' una corrispondenza biunivoca tra punti di K^n e ideali massimali di $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Decomposizione di una varietá in un'unione finita di varietá irriducibili. Calcolo della decomposizione in irriducibili di una varietá data (contenente una retta) utilizzando il calcolo di un ideale quoziente.
Decomposizione minimale di una varietá in componenti irriducibili e sua unicitá. Se K é algebricamente chiuso, ogni ideale radicale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ puo' essere scritto in modo unico come intersezione minimale di ideali primi.

Ore 2 (15-17) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***1 dicembre 2009***

Ideali primi che intervengono nella decomposizione primaria di un ideale radicale.
Applicazioni polinomiali tra varietá. Anello delle funzioni polinomiali su una varietá e suo isomorfismo con l'anello quoziente di $K[x_1, \cdots, x_n]$ *rispetto all'ideale di definizione della varieta'. Studio dell'anello quoziente* $K[x_1, \cdots, x_n]/I$ *(con I ideale polinomiale) come* K*-spazio vettoriale. Condizioni necessarie e sufficienti affinche'* $V(I)$ *sia costituito da un numero finito di punti.*

Ore 2 (16-18) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***1 dicembre 2009***

Esercizi su eliminazione e implicitizzazione razionale.

Ore 1 (18-19) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII Piano***

Data ***2 dicembre 2009***

Completamento della dimostrazione del teorema che caratterizza gli ideali il cui luogo degli zeri é un numero finito di punti. Stima sul numero di punti nel caso di un campo algebricamente chiuso. Esempi.
Singolaritá cinematiche di un robot planare. Calcolo delle singolaritá nel caso di un robot con $n \geq 3$ *giunti di rotazione. Cammini nello spazio delle configurazioni e cammini nello spazio delle fasi; legame tra le velocitá di tali cammini e problemi che si presentano nelle singolaritá cinematiche.*

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***9 dicembre 2009***

Sistemi polinomiali con parametri: esempi. Ideali dell'anello $k(t_1, \cdots, t_m)[x_1, \cdots, x_n]$ *e specializzazioni. Specializzazioni e basi di Gröbner. Condizioni sufficienti affinché una base di Gröbner di un ideale* $I \subset k(t_1, \cdots, t_m)[x_1, \cdots, x_n]$ *rimanga una base di Gröbner di una specializzazione. Algoritmo per il calcolo dei denominatori. Calcolo esplicito di alcuni esempi provenienti dalla robotica.*

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***10 dicembre 2009***

Risultati che consentono di calcolare una base di Gröbner di un ideale di $k(t_1, \cdots, t_m)[x_1, \cdots, x_n]$ lavorando nell'anello $k[t_1, \cdots, t_m, x_1, \cdots, x_n]$ quando il sistema di computer algebra utilizzato non consente ai coefficienti di appartenere a un campo di funzioni. Calcolo esplicito nel caso di un problema cinematico inverso per un robot con tre giunti di rotazione.

Ore 1 (15-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***15 dicembre 2009***

Esercitazione di laboratorio su problemi cinematici della robotica per robot planari e robot spaziali.

Ore 3 (16-19) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***17 dicembre 2009***

Esercitazione di laboratorio su problemi cinematici della robotica e sistemi con parametri.

Ore 2 (15-17) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula)

Data

Ore ( ) ***Firma***