Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2014/2015*

Facoltà ***di Scienze***

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica**

Insegnamento **Complementi di Algebra e Geometria per le Applicazioni**

Docente titolare del corso **prof. Mirella Manaresi**

Altri docenti partecipanti (modulo) **prof. Ruediger Achilles e prof. Francesca Cagliari**

Data inizio Lezioni *24 febbraio 2015*

Data fine Lezioni *13 maggio 2015*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***24 febbraio 2015***

Introduzione al corso: obiettivi, modalitá d'esame, informazioni varie. Breve presentazione dei contenuti del corso.

Ore 1 (9-10) ***Firma (Ruediger Achilles, Francesca Cagliari e Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Vitali***

Data ***25 febbraio 2014***

Algoritmo della divisione in $K[x]$ con K campo. $K[x]$ é un dominio a ideali principali. Massimo comun divisore di due polinomi in $K[x]$. Il massimo comun divisore di due polinomi f, g é un generatore dell'ideale (f, g). Algoritmo euclideo per la determinazione del massimo comun divisore. L'anello $K[x_1, \cdots, x_n]$. Ordinamenti di monomi. Buoni ordinamenti e loro caratterizzazione.
Ordini monomiali: ordine lessicografico, lessicografico graduato, lessicografico graduato inverso. Algoritmo della divisione in $K[x_1, \cdots x_n]$: discussione di alcuni esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***3 marzo 2015***

Algoritmo della divisione in $K[x_1, \cdots x_n]$. Teorema della base di Hilbert.
Ideali monomiali. Lemma di Dickson. Esempi. Ideale monomiale generato dai termini principali dei polinomi di un ideale. Esempi.
Base di Gröbner di un ideale polinomiale rispetto ad un ordine monomiale.
In $K[x_1, \cdots, x_n]$ ogni catena ascendente di ideali é stazionaria.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***11 marzo 2015***

Unicitá del resto rispetto ad una base di Gröbner. S-polinomio di due polinomi dati rispetto ad un ordine monomiale. Teorema di Buchberger. Ogni ideale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ ammette una base di Gröbner rispetto ad un fissato ordine monomiale. Algoritmo per la determinazione di una base di Gröbner .
Basi di Gröbner minimali e basi di Gröbner ridotte. Unicita' della base di Gröbner ridotta rispetto ad un qualunque ordine monomiale. Esempi. Confronto fra ideali; algoritmo per decidere l'appartenenza o meno di un polinomio a un ideale.
Enunciato del Teorema di eliminazione.

Ore 2 (8.30-10.30) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***18 marzo 2015***

Dimostrazione del Teorema di eliminazione. Determinazione di una base di Gröbner di un ideale eliminazione. Esempi.
Insiemi algebrici affini: definizione e prime proprietá. Ideale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ costituito dai polinomi che si annullano su un sottoinsieme di K^n; ideale di definizione di un insieme algebrico affine e sue proprietá.
Sistemi di equazioni polinomiali. Sistemi equivalenti e ideali di $K[x_1, \cdots, x_n]$. Applicazione del teorema di eliminazione alla soluzione di sistemi di equazioni polinomiali e sua interpretazione geometrica. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***25 marzo 2015***

Teorema di estensione e sua interpretazione geometrica.
Teorema di chiusura.
Applicazione dell'eliminazione alla soluzione del problema dell implicitizzazione polinomiale. Dimostrazione del teorema di implicitizzazione polinomiale. Esempi: la superficie delle rette tangenti a una cubica gobba.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***1 aprile 2015***

Determinazione delle equazioni cartesiane della piú piccola varieta' affine contenente una data parametrizzazione polinomiale (ombrello di Whitney, superficie di Enneper, ecc., si veda foglio distribuito a lezione). Teorema di implicitizzazione razionale. Discussione di alcuni esempi. Esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Laboratorio Multimediale***

Data ***15 aprile 2015***

Polinomi irriducibili di $K[x_1, \cdots, x_n]$, decomposizione in irriducibili. Se un polinomio irriducibile f divide un prodotto deve dividere uno dei fattori. Due polinomi $f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$ di grado positivo in x_1 hanno un fattore comune di grado positivo in x_1 se e solo se hanno un fattore comune in $K(x_2, \cdots, x_n)[x_1]$. Esistenza e unicitá della decomposizione in irriducibili per polinomi in piú variabili. Matrice di Sylvester e risultante di due polinomi in una variabile. Proprietá del risultante. Esempi. Espressione del risultante come combinazione dei due polinomi dati.
Risultante di due polinomi f e g di $K[x_1, \cdots, x_n]$ rispetto a x_1. Tale risultante é combinazione dei due polinomi dati e dipende solo dalle variabili $x_2, \cdots, x_n$ (quindi appartiene al primo ideale eliminazione dell'ideale (f, g)), inoltre e' identicamente nullo se e solo se i due polinomi dati hanno un fattore comune di grado positivo in x_1.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***22 aprile 2015***

Dimostrazione del teorema di estensione nel caso di due soli polinomi. Risultanti generalizzati di s polinomi $f_1, \cdots, f_s \in K[x_1, \cdots, x_n]$. *Esempi. Cenni sulla dimostrazione del teorema di estensione nel caso generale.*
Dimostrazione del teorema di estensione nel caso di due soli polinomi. Risultanti generalizzati di s polinomi $f_1, \cdots, f_s \in K[x_1, \cdots, x_n]$. *Esempi. Cenni sulla dimostrazione del teorema di estensione nel caso generale.*
La corrispondenza ideali-varieta'. Esempi e considerazioni generali. Teorema degli zeri di Hilbert in forma debole. Algoritmo per stabilire se un sistema di equazioni polinomiali non ha soluzioni. Teorema degli zeri di Hilbert.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***29 aprile 2015***

Corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi algebrici affini di K^n *(con* K *algebricamente chiuso) e ideali radicali di* $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Algoritmo per stabilire se un polinomio $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ *appartiene al radicale di un ideale* $I = (f_1, \cdots, f_n) \subset K[x_1, \cdots, x_n]$. *Esempi. Radicale di un ideale principale di* $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Somma di ideali e intersezione di varietá; prodotto di ideali e unione di varietá.
Intersezione di ideali e unione di varietá.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Seminario II***

Data ***6 maggio 2015***

Algoritmo per l'intersezione di ideali.
Robot planari con giunti di rotazione e giunti telescopici: spazio dei giunti e spazio delle configurazioni. Problemi cinematici della robotica: problema cinematico diretto e problema cinematico inverso. Formula esplicita che fornisce la posizione della mano in funzione della posizione dei giunti nel caso di un robot con giunti di rotazione e nel caso di un robot con giunti di rotazione e giunti telescopici. Problema cinematico inverso e sistemi di equazioni polinomiali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Seminario II***

Data ***8 maggio 2015***

Il prodotto e l'intersezione di due ideali hanno lo stesso radicale. Il radicale dell'intersezioe é l'intersezione dei radicali, ma il radicale del prodotto non é il prodotto dei due radicali.
Quoziente di ideali e sue proprietá. Chiusura di Zariski della differenza di due varietá e ideale quoziente degli ideali delle due varietá. Esempi.
Algoritmo per il calcolo dell'ideale quoziente di due ideali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Seminario II***

Data ***13 maggio 2015***

Varietá irriducibili e varietá riducibili. Corrispondenza tra varietá irriducibili e ideali primi.
Cenni ai seguenti fatti: le varietá definite attraverso parametrizzazioni polinomiali o parametrizzazioni razionali sono irriducibili; decomposizione di una varietá in un'unione finita di varietá irriducibili.
Se K *é algebricamente chiuso c'e' una corrispondenza biunivoca tra punti di* K^n *e ideali massimali di* $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Applicazioni polinomiali tra varietá. Anello delle funzioni polinomiali su una varietá e suo isomorfismo con l'anello quoziente di $K[x_1, \cdots, x_n]/I(V)$ *(con* $I(V)$ *ideale di definizione della varietá).*
Studio dell'anello quoziente $K[x_1, \cdots, x_n]/I$ *(con I ideale polinomiale) come* K*-spazio vettoriale.*
Solo enunciati: Condizioni necessarie e sufficienti affinché una varietá $V(I)$ *sia costituita da un numero finito di punti. Stima sul numero di punti nel caso di un campo algebricamente chiuso. Esempi.*

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***