Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2017/2018*

Scuola di ***di Scienze***

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica**

Insegnamento **Complementi di Algebra e Geometria per le Applicazioni**

Docente titolare del corso **prof. Mirella Manaresi**

Altri docenti partecipanti (modulo) **prof. Ruediger Achilles**

Data inizio Lezioni *20 febbraio 2018*

Data fine Lezioni *10 aprile 2018*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***20 febbraio 2018***

Introduzione al corso: obiettivi, modalitá d'esame, informazioni varie. Breve presentazione dei contenuti del corso.

Ore 1 (9-10) ***Firma (Ruediger Achilles e Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***20 febbraio 2018***

L'anello dei polinomi in una variabile a coefficienti in un campo: algoritmo della divisione in $K[x]$ con K campo e suoi corollari; $K[x]$ é un dominio a ideali principali. Massimo comun divisore di due polinomi in $K[x]$. Il massimo comun divisore di due polinomi f, g é un generatore dell'ideale (f, g). Algoritmo euclideo per la determinazione del massimo comun divisore; coefficienti di Bezout. Massimo comun divisore di un numero finito di polinomi. L'anello $K[x_1, \cdots, x_n]$: monomi, termini, polinomi e funzioni polinomiali associate. Enunciato del teorema della base di Hilbert.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***21 febbraio 2018***

Dimostrazione del Teorema deella base di Hilbert. Ordinamenti di monomi. Buoni ordinamenti e loro caratterizzazione. Ordini monomiali: ordine lessicografico, lessicografico graduato, lessicografico graduato inverso. Esempi.
Algoritmo della divisione in $K[x_1, \cdots x_n]$ e discussione di alcuni esempi. Discussione di un esempio che mostra che il resto della divisione in $K[x_1, \cdots x_n]$ non é unico.
Definizione di ideale monomiale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***27 febbraio 2018***

Proprietá degli ideali monomiali. Esempi. Lemma di Dickson. Esempi.
Ideale monomiale generato dai termini principali dei polinomi di un ideale. Esempi. Dimostrazione del teorema della base di Hilbert che utilizza il lemma di Dickson.
Base di Gröbner di un ideale polinomiale rispetto ad un ordine monomiale. Unicitá del resto rispetto ad una base di Gröbner.
S-polinomio di due polinomi dati rispetto ad un ordine monomiale. Esempi. Criterio di Buchberger.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***28 febbraio 2018***

Cenno alla dimostrazione del teorema di Buchberger sugli S-polinomi. In $K[x_1, \cdots, x_n]$ ogni catena ascendente di ideali é stazionaria. Ogni ideale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ ammette una base di Gröbner rispetto ad un fissato ordine monomiale. Algoritmo di Buchberger per la determinazione di una base di Gröbner . Esempi.
Basi di Gröbner minimali e basi di Gröbner ridotte. Esempi. Unicita' della base di Gröbner ridotta rispetto ad un qualunque ordine monomiale. Esempi.
Confronto fra ideali; algoritmo per decidere l'appartenenza o meno di un polinomio a un ideale.
Ideali eliminazione di un ideale $I \subset K[x_1, \cdots x_n]$. Basi di Gröbner degli ideali eliminazione (Teorema di Eliminazione).

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***6 marzo 2018***

Insiemi algebrici affini: definizione e prime proprietá. Esempi. Ideale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ costituito dai polinomi che si annullano su un sottoinsieme di K^n; ideale di definizione di un insieme algebrico affine e sue proprietá. L'ideale di definizione di una varietá é un ideale radicale. Esempi.
Sistemi di equazioni polinomiali. Sistemi equivalenti e ideali di $K[x_1, \cdots, x_n]$. Applicazione del teorema di eliminazione alla soluzione di sistemi di equazioni polinomiali. Esempi. Teorema di estensione. Esempi

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***13 marzo 2018***

Interpretazione geometrica dei teoremi di eliminazione e di estensione.Esempi. Teorema di chiusura. Esempi ed esercizi.
Applicazione dell'eliminazione alla soluzione del problema dell implicitizzazione polinomiale. Dimostrazione del teorema di implicitizzazione polinomiale. Esempi: la superficie delle rette tangenti a una cubica gobba.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***14 marzo 2018***

Determinazione delle equazioni cartesiane della piú piccola varieta' affine contenente una data parametrizzazione polinomiale (ombrello di Whitney, superficie di Enneper, ecc., si veda foglio distribuito a lezione).
Teorema di implicitizzazione razionale. Discussione di un esempio.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***15 marzo 2018***

Polinomi irriducibili di $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Se un polinomio irriducibile $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ *divide un prodotto deve dividere uno dei fattori. Due polinomi* $f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$ *di grado positivo in* x_1 *hanno un fattore comune di grado positivo in* x_1 *se e solo se hanno un fattore comune in* $K(x_2, \cdots, x_n)[x_1]$.
Esistenza e unicitá della decomposizione in irriducibili per polinomi in piú variabili.
Matrice di Sylvester e risultante di due polinomi in una variabile. Proprietá del risultante. Esempi. Espressione del risultante come combinazione dei due polinomi dati.
Risultante di due polinomi f *e* g *di* $K[x, y]$ *rispetto a* x.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***21 marzo 2018***

Risultante di due polinomi f *e* g *di* $K[x_1, \cdots, x_n]$ *rispetto a* x_1. *Tale risultante é combinazione dei due polinomi dati e dipende solo dalle variabili* $x_2, \cdots, x_n$ *(quindi appartiene al primo ideale eliminazione dell'ideale* (f, g)*), inoltre e' identicamente nullo se e solo se i due polinomi dati hanno un fattore comune di grado positivo in* x_1. *Esempi.*
Dimostrazione del teorema di estensione nel caso di due soli polinomi.
Risultanti generalizzati di s *polinomi* $f_1, \cdots, f_s \in K[x_1, \cdots, x_n]$. *Esempio. I risultanti generlizzati rispetto a* x_1 *appartengono al primo ideale eliminazione dell'ideale* $(f_1, \cdots, f_s)$ *(solo enunciato e cenno alla dimostrazione del teorema di estensione nel caso generale, usando i risultanti generalizzati.*
La corrispondenza ideali-varieta'. Esempi e considerazioni generali. Nullstellensatz debole di Hilbert. Algoritmo per stabilire se un sistema di equazioni polinomiali non ha soluzioni.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***22 marzo 2018***

Teorema degli zeri di Hilbert e sue conseguenze.
Corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi algebrici affini di K^n *(con* K *algebricamente chiuso) e ideali radicali di* $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Algoritmo per stabilire se un polinomio $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ *appartiene al radicale di un ideale* $I = (f_1, \cdots, f_n) \subset K[x_1, \cdots, x_n]$. *Radicale di un ideale principale di* $K[x_1, \cdots, x_n]$. *Esempi ed esercizi.*
Somma di ideali e intersezione di varietá; prodotto di ideali e unione di varietá.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***27 marzo 2018***

Intersezione di ideali e unione di varietá. Il prodotto e l'intersezione di due ideali hanno lo stesso radicale. Il radicale dell'intersezioe é l'intersezione dei radicali, ma il radicale del prodotto non é il prodotto dei due radicali. Esempi e esercizi. Nel caso di ideali principali, l'ideale intersezione é generato dal minimo comune multiplo dei due generatori.
Algoritmo per l'intersezione di ideali.
Chiusura di Zariski di un sottoinsieme di K^n. *Dimostrazione del teorema di chiusura.*
Chiusura di Zariski della differenza di due varietá. Quoziente di ideali. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***5 aprile 2018***

Proprietá del quoziente di ideali; chiusura di Zariski della differenza di due varietá e ideale quoziente degli ideali delle due varietá. Esempi. Algoritmo per il calcolo del quoziente di due ideali.
Varietá irriducibili e varietá riducibili. Corrispondenza tra varietá irriducibili e ideali primi. Le varietá definite attraverso parametrizzazioni polinomiali o parametrizzazioni razionali sono irriducibili.
Cenni alla decomposizione di una varietá in un'unione finita di varietá irriducibili.
Se K é algebricamente chiuso c'e' una corrispondenza biunivoca tra punti di K^n e ideali massimali di $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Applicazioni polinomiali tra varietá. Anello delle funzioni polinomiali su una varietá e suo isomorfismo con l'anello quoziente di $K[x_1, \cdots, x_n]/I(V)$ (con $I(V)$ ideale di definizione della varietá).

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***AulaArzelá***

Data ***10 aprile 2018***

Studio dell'anello quoziente $K[x_1, \cdots, x_n]/I$ (con I ideale polinomiale) come K-spazio vettoriale. Esempi.
Condizioni necessarie e sufficienti affinché una varietá $V(I)$ sia costituita da un numero finito di punti. Stima sul numero di punti nel caso di un campo algebricamente chiuso.
Discussione di alcuni esempi.
Rilevazione didattica.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***