Università di Bologna **C.d.L. in Matematica A.A. 2009–10**

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 11.01.10 – A

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1.

Sia considerino le equazioni

$$ax + 6y = 3$$

$$4x + 3y = 2,$$

dove a é un intero e x, y sono incognite.

a) Si provi che la prima equazione ha soluzioni intere se e solo se a é dispari.

b) Si determinino tutte le soluzione intere (x_0, y_0) della seconda equazione.

c) Per $a = 9$ si determinino le soluzioni intere comuni alle due equazioni.

Esercizio 2. Siano $G_1 = \mathbb{Z}_4$, $G_2 = \mathbb{Z}_6$ i gruppi additivi delle classi di resto modulo 4 e 6 rispettivamente, siano $G_3 = (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)^*$, $G_4 = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9)^*$ i gruppi moltiplicativi degli elementi invertibili degli anelli $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$, sia S_4 il gruppo delle permutazioni su 4 lettere.

a) Si stabilisca se i gruppi G_3 e G_4 sono ciclici e in caso positivo se ne determini un generatore.

b) Si scrivano gli isomorfismi di gruppi $G_2 \to G_4$.

c) Si stabilisca se esiste un omomorfismo di gruppi $\phi : G_1 \to S_4$ tale che risulti $\mathrm{Im}(\phi) = < \{(12), (34)\} >$.

Esercizio 3.

Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali, sia A il sottoanello di $\mathbb{Q}$ costituito da tutti i numeri razionali che scritti in forma ridotta hanno il denominatore primo con 9.

a) Si determinino tutti gli elementi invertibili e tutti gli zero divisori dell'anello A.

b) Si stabilisca se esiste un isomorfismo tra l'anello A e l'anello degli interi.

c) Si determini (se esiste) un ideale massimale I dell'anello A che contiene tutti gli elementi non invertibili di A.

Esercizio 4.

Siano $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$, $g(x) = (x^2 + 3x + 2)(x^3 + x^2 - 2x - 2) \in \mathbb{Z}[x]$.

a) Si determinino le radici razionali dei polinomi f e g con le relative molteplicitá e si decompongano i polinomi in irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

b) Si determini un generatore dell'ideale $I = (f, g) \subset \mathbb{Q}[x]$ e un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x]$ che contiene I.

c) Si stabilisca se l'ideale $J = (f) \cap (g) \subset \mathbb{Q}[x]$ contiene polinomi di grado quattro.

d) Si consideri l'omomorfismo di anelli $\sigma : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}$ definito da $\sigma(h(x)) = h(-1)$ e sia $\mathbb{R}_\sigma$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{Q}[x]$ associata a σ. Si provi che presi due polinomi $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ si ha che $p \mathbb{R}_\sigma q$ se e solo se $p - q \in (x + 1) \subset \mathbb{Q}[x]$.

Università di Bologna C.d.L. in Matematica A.A. 2009–10

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 8.02.10 – B

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da

$$f(x, y) = 975x + 624y.$$

a) Si stabilisca se l'applicazione f é suriettiva e, nel caso non lo sia, si determini $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists x, y \in \mathbb{Z} \;\; t.c. \;\; f(x, y) = a\}$.

b) Si stabilisca se l'applicazione f é iniettiva.

c) Si determinino $f^{-1}(26)$ e $f^{-1}(39)$.

Esercizio 2. Sia S_6 il gruppo delle permutazioni su 6 lettere e sia $X \subset S_6$ il sottoinsieme delle permutazioni di ordine 5.

a) Si stabilisca se X é un sottoinsieme del gruppo alterno A_6 e se é un sottogruppo di S_6.

b) Si stabilisca se esiste un morfismo iniettivo di gruppi $\phi : \mathbb{Z}_5 \to A_6$. In caso di risposta positiva, se ne determini uno.

c) Si consideri la relazione in S_6 definita come segue: per ogni $\alpha, \beta \in S_6$, $\alpha \simeq \beta$ se e solo se $\alpha\beta^{-1} \in A_6$. Si stabilisca se $\simeq$ é una relazione di equivalenza e se é compatibile con il prodotto di S_6.

Esercizio 3.

Sia $A = \mathbb{Z}_{56}$ l'anello degli interi modulo 56.

a) Si determinino tutti gli elementi invertibili dell'anello A e tutti gli elementi non nulli di A una cui potenza é uguale a zero.

b) Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione $[28]_{56}x = [28]_{56}$ in A.

c) Si determinino due ideali I e J dell'anello A tali che l'ideale somma $I + J$ sia l'ideale generato da $[7]_{56}$ e l'ideale $I \cap J$ sia contenuto propriamente sia in I sia in J.

d) Si stabilisca se esiste un omomorfismo di anelli ϕ da A nell'anello prodotto diretto $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{28}$ tale che $\mathrm{Ker}\,\phi = ([7]_{56})$.

Esercizio 4.

Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo dei numeri razionali e siano $a(x) = (x-1)^3(x-2)$, $\quad b(x) = x^2 + x - 2$, $\quad c(x) = x^2 - 4x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Si stabilisca se esiste un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ di grado ≤ 3 avente -1 come radice di molteplicitá 2 e tale che $f(0) = -2$. Tale polinomio é unico?

b) Si determinino tutti i polinomi $f \in \mathbb{Q}[x]$ aventi -1 come radice di molteplicitá 2 e tali che $f(0) = -2$.

c) Si stabilisca se esistono, e in caso affermativo si determinino, due polinomi $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ tali che valga la relazione $\quad a(x)f(x) + b(x)g(x) = c(x)$.

Università di Bologna **C.d.L. in Matematica A.A. 2009–10**

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 7.06.10

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1.

Si determinino tutti gli interi x che soddisfano contemporaneamente le seguenti equazioni:

$$[5x]_{12} = [7]_{12}$$

$$[2x]_8 = [6]_8.$$

Esercizio 2. Sia S_7 il gruppo simmetrico su $\{1, 2, \dots, 7\}$ e si consideri il suo sottoinsieme

$$X := \{\sigma \in S_7 \,/\, \sigma(i) = i \ \ \forall i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Sia poi A_7 il gruppo alterno su $\{1, 2, \dots, 7\}$.

a) Si stabilisca se X é un sottogruppo di S_7 e se i suoi elementi commutano con gli elementi di S_7.

b) Si elenchino gli elementi di $X \cap A_7$ e si dica se $X \cap A_7$ è un sottogruppo di S_7.

c) Si stabilisca se esiste un omomorfismo di gruppi $\phi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow S_7$ tale che $Im\, \phi = X$.

d) Si consideri la relazione in S_7 definita come segue:

$$\forall \alpha, \beta \in S_7, \qquad \alpha \cong \beta \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1}(5) = 5$$

Si stabilisca se $\cong$ é una relazione di equivalenza.

e) Si determinino le permutazioni $\beta \in S_7$ tali che $(1\,2) \cong \beta$?

Esercizio 3. Siano $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_6$ l'anello degli interi e l'anello delle classi di resto modulo 6 rispettivamente. Siano $\alpha = [a]_6$ e $\beta = [b]_6$ due elementi di $\mathbb{Z}_6$, sia $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ l'applicazione definita da $\phi(x, y) = x\alpha + y\beta$.

a) Si stabilisca per quali coppie $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ l'applicazione ϕ é un omomorfismo suriettivo tra i gruppi additivi $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Z}_6, +)$.

b) Si scrivano tutte le coppie $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ per le quali ϕ é un omomorfismo di anelli, indicando per quali di queste coppie l'omomorfismo é suriettivo.

c) Si stabilisca se esistono coppie $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ per le quali ϕ é un omomorfismo di anelli avente come nucleo un ideale primo.

Esercizio 4.

Sia $\mathbb{Z}_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo delle classi di resto modulo 5, sia $a \in \mathbb{Z}$, siano $f(x) = (x^2 + [3]_5)(x^3 - [2]_5x^2 + 1)$, $g(x) = x^4 - [3]_5x^3 + [2]_5x^2 + x + [4]_5$, $h(x) = x^2 + x + [a]_5 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

a) Si decompongano i polinomi f e g in prodotto di fattori irriducibili dell'anello $\mathbb{Z}_5[x]$.

b) Si determinino tutte le radici dei polinomi f e g con le relative molteplicitá.

c) Si stabilisca se $I = (f, g)$ é un ideale massimale dell'anello $\mathbb{Z}_5[x]$.

d) Si stabilisca se esistono $a \in \mathbb{Z}$ per i quali $h \in I$.

Università di Bologna **C.d.L. in Matematica A.A. 2009–10**

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 22.06.10

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1.

a) Si determinino tutti gli elementi $[x]_{154} \in \mathbb{Z}_{154}$ tali che:

$$[x+2]_{154} = 7[x]_{154},$$

per ciascuno di essi si calcoli il periodo nel gruppo additivo $(\mathbb{Z}_{154}, +)$ e si stabilisca se é un elemento invertibile dell'anello $(\mathbb{Z}_{154}, +, \cdot)$.

b) Si calcoli il numero degli zero-divisori dell'anello $\mathbb{Z}_{154}$.

c) Si stabilisca se la somma e il prodotto di elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_{154}$ sono elementi invertibili dell'anello stesso.

d) Si stabilisca se esiste un elemento non nullo $[x]_{154}$ dell'anello $\mathbb{Z}_{154}$ tale che $[x]_{154}^3 = 0$.

e) Si determinino tutti gli ideali massimali dell'anello $\mathbb{Z}_{154}$.

Esercizio 2. Nel gruppo simmetrico S_8 consideriamo gli elementi $\alpha = (3824)(538)$ e $\beta = (48)(12)(58)(32)$ ed i sottogruppi $H = <\alpha>$ e $K = <\beta>$.

a) Decomporre α e β come prodotto di cicli disgiunti e calcolare il loro periodo.

b) Stabilire quanti elementi ci sono in $A_8 \cap H$ e in $A_8 \cap K$.

c) È vero che $H \cap K = \{1_{S_8}\}$?

d) Trovare, se esiste, un omomorfismo di gruppi suriettivo $f : H \to K$.

e) É possibile definire un omomorfismo di gruppi, diverso dall'omomorfismo banale, $g : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to S_8$ tale che $\text{Im } g \cap H = \text{Im } g \cap K = \{1_{S_8}\}$?

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo dei numeri razionali, siano $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$, $g(x) = x^4 - x^3 - 18x^2 + 52x - 40$ due suoi elementi, sia $I = (f, g)$ l'ideale di $\mathbb{Q}[x]$ da essi generato.

a) Si determinino tutte le radici razionali dei polinomi f e g con le relative molteplicitá.

b) Si stabilisca se l'ideale I contiene polinomi che hanno solo radici semplici.

c) Si stabilisca se esistono $a \in \mathbb{Q}$ per i quali il polinomio $h(x) = x^3 + ax + 4$ appartiene all'ideale I.

d) Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}$ l'omomorfismo di anelli definito da

$$\phi(p(x)) = p(2)$$

per ogni $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Si determini l'ideale $J = I \cap \ker \phi$.

?

Università di Bologna **C.d.L. in Matematica A.A. 2009–10**

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 13.07.10

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1.

a) Si determinino tutti gli elementi $[x]_{165} \in \mathbb{Z}_{165}$ tali che $10[x]_{165} = [5]_{165}$, per ciascuno di essi si calcoli il periodo nel gruppo additivo $(\mathbb{Z}_{165}, +)$, si stabilisca se $[x]_{165}$ é un elemento invertibile dell'anello $(\mathbb{Z}_{165}, +, \cdot)$.

b) Si stabilisca se esiste un elemento non nullo $[y]_{165} \neq [1]_{165}$ dell'anello $\mathbb{Z}_{165}$ tale che $[y]_{165}^2 = [y]_{165}$.

c) Si stabilisca se esiste un omomorfismo di gruppi non banale $\mathbb{Z}_{165}^* \to \mathbb{Z}_{21}$, dove $\mathbb{Z}_{165}^*$ denota il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_{165}$.

Esercizio 2. Siano $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{\, f \mid f : X \to X \,\}$ e $\sim$ la relazione in F definita nel modo seguente: per ogni $f, g \in F$, $f \sim g \iff f(5) = g(5)$.

a) Mostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e stabilire quante funzioni costanti vi sono in una fissata classe di equivalenza.

a) Quanti elementi ha l'insieme quoziente $F/\sim$?

b) È vero che $S_5 \subset X$? Quanti elementi di S_5 ci sono in $[\mathrm{id}_X]_\sim$?

c) Si determinino due elementi $\alpha, \beta \in S_5$ di periodo 6 tali che $[\alpha]_\sim \neq [\beta]_\sim$.

d) Si determinino due elementi $\alpha, \beta \in S_5$ di parità diversa tali che $[\alpha]_\sim = [\beta]_\sim$.

Esercizio 3. Siano $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{Z}_6$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi e l'anello delle classi di resto modulo 6 rispettivamente; sia $A = \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}_6$ l'anello prodotto diretto.

a) Si determini la caratteristica dell'anello A e il suo sottoanello fondamentale A_0.

b) Si stabilisca se esiste un omomorfismo di anelli suriettivo $f : \mathbb{Z}[x] \to A$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo dei numeri razionali, siano $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$, $g(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$, $h(x) = x^2 - 2x - 3$ tre suoi elementi.

a) Si determinino tutte le radici razionali comuni dei polinomi f, g, h.

b) Si stabilisca se esiste un ideale proprio $I \subset \mathbb{Q}[x]$ che contiene gli ideali $J_1 = (f, g)$, $J_2 = (f, h)$, $J_3 = (g, h)$ di $\mathbb{Q}[x]$.

c) Si stabilisca se esistono tre polinomi non nulli $a(x), b(x), c(x)$ nell'anello $\mathbb{Q}[x]$ tali che valga la relazione $a(x)f(x) + b(x)g(x) + c(x)h(x) = 0$.

Università di Bologna **C.d.L. in Matematica A.A. 2009–10**

Prova scritta di Algebra I (M. Manaresi) – 21.09.10 – A

Giustificare sempre le risposte!

Esercizio 1.

Siano $\mathbb{Z}_{12}$ e $\mathbb{Z}_{15}$ gli insiemi delle classi di resto modulo 12 e modulo 15 rispettivamente, siano $f, g : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, $h : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{15}$ le applicazioni cosí definite:

$$f([x]_{12}) = [5x+2]_{12}, \quad g([x]_{12}) = [9x]_{12}, \quad h([x]_{12}) = [ax+3b]_{15},$$

con $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Si stabilisca se l'applicazione f é ben definita ed é biunivoca. In caso sia biunivoca se ne calcoli l'inversa.

b) Si stabilisca se l'applicazione g é un omomorfismo di gruppi di $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ in sé. In caso di risposta positiva se ne determinino il nucleo e l'immagine.

c) Si stabilisca per quali $a, b \in \mathbb{Z}$ l'applicazione h é ben definita e per quali $a, b \in \mathbb{Z}$ l'applicazione h é un omomorfismo di gruppi tra il gruppo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ e il gruppo $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

Esercizio 2. Sia S_4 il gruppo delle permutazioni su 4 lettere e sia G il suo sottogruppo

$$G := \{id, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\} \subset S_4.$$

a) Si stabilisca se G é ciclico e in caso positivo se ne determini un generatore.

b) Si stabilisca se esiste un isomorfismo di gruppi tra G e il gruppo prodotto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

c) Si determinino due sottogruppi di G entrambi con quattro elementi ma non isomorfi tra loro.

Esercizio 3.

Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali, sia A il sottoanello di $\mathbb{Q}$ costituito da tutti i numeri razionali che scritti in forma ridotta hanno il denominatore primo con 3 e con 4.

a) Si determinino tutti gli elementi invertibili e tutti gli zero divisori dell'anello A.

c) Si determini (se esiste) un ideale proprio I dell'anello A che contiene tutti gli elementi non invertibili di A.

Esercizio 4.

Siano $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9$, $g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 \in \mathbb{Z}[x]$, sia $h(x) = af + bg$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Si determinino le radici razionali dei polinomi f e g con le relative molteplicitá e si decompongano i due polinomi in prodotto di polinomi in irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$.

b) Si stabilisca se esistono valori di $a, b \in \mathbb{Z}$ per i quali il polinomio h si spezza in fattori lineari di $\mathbb{Q}[x]$.

c) Si determini un generatore dell'ideale $I = (f) \cap (g) \subset \mathbb{Q}[x]$ e un ideale primo di $\mathbb{Q}[x]$ che contiene I. Si stabilisca anche se l'ideale I contiene polinomi di grado sei.