Università degli Studi di Bologna
C.d.L. in Matematica
Test di autovalutazione

A.A. 2016/2017
Corso di GEOMETRIA I
10. 11. 2016

Esercizio 1.

a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + hx_3 + 2x_4 = (h+3)^2 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h.

b) Esistono valori di h per i quali il sistema omogeneo associato al sistema precedente ha infinite soluzioni tutte tra loro proporzionali?

Esercizio 2.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

si indichino con v_1, v_2, v_3 i suoi vettori colonna e siano rispettivamente U l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3 e V l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2.

a) Si determini esplicitamente l'insieme U, fornendone l'equazione cartesiana.

b) Si determini esplicitamente l'insieme V, stabilendo se coincide con U.

Esercizio 3.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & k & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale e sia $I \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice identitá.

Al variare del parametro k si determinino esplicitamente tutte le matrici $X \in M_3(\mathbb{R})$ tali che $X \cdot A = B + 2I$. Tali matrici sono tutte invertibili?

Esercizio 4.

Si provino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Data una qualunque matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice $B = A + A^t$ é simmetrica.

b) Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, tra le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ é possibile trovare due vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti se e solo se il rango di A é strettamente minore di n.

c) Aggiungendo un'equazione al sistema lineare $AX = B$ (con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$) l'insieme delle sue soluzioni diventa strettamente piú piccolo.