Università degli Studi di Bologna — A.A. 2011/2012

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Esercitazione scritta — 9. 11. 2011 — A

Esercizio 1.

a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + hx_4 = 1 \\ x_1 + (h+2)x_2 - x_3 + 2hx_4 = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h.

b) Fissato un valore di h per cui il sistema é risolubile, la somma di due diverse soluzioni del sistema é ancora una soluzione del sistema?

Esercizio 2.

a) Si determini l'insieme dei vettori $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori colonna v_1, v_2, v_3, v_4 della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Il vettore nullo $(0, 0, 0, 0)$ puó essere scritto come combinazione lineare dei vettori v_2, v_3, v_4 a coefficienti non tutti nulli?

Esercizio 3.

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino tutte le matrici $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che $M \cdot A = A \cdot {}^tM$. Tali matrici sono tutte invertibili?

Esercizio 4.

Siano $B = (b_1 \quad b_2 \cdots \quad b_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $C = (c_1 \quad c_2 \cdots \quad c_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$. Si provi che la matrice ${}^tB \cdot C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ha determinante nullo qualunque siano $B, C \in M_{1,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ di versori i, j, k, si considerino i vettori $u = 3i + 2j - k$, $v = 2i - j + k$, $w_a = ai + j - 2k$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che w_a sia ortogonale ai vettori u e v?

b) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che i vettori u, v, w_a siano complanari?

c) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che il vettore w_a sia parallelo al vettore $u \wedge (u - 2v)$?

Università degli Studi di Bologna A.A. 2012/2013
C.d.L. in Matematica Corso di GEOMETRIA I
Test di autoverifica 7. 11. 2012 A

Esercizio 1.
Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2(2-h)x_3 + 3x_4 = 3 + h \\ hx_1 + x_2 + (1+h^2)x_3 + (1+h^2)x_4 = 1 + 2h \end{cases}$$

con h parametro reale.

a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il sistema ammette soluzioni.

b) Per $h = 0$ si determinino le soluzioni del sistema.

Esercizio 2.
Sia $A \in M_4(\mathbb{R})$ la matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z, w che ha tra le sue soluzioni la quaterna $(1, 2, 1, 3)$.

a) Se la matrice A é ridotta per righe, qual é il massimo numero di righe non nulle di A?

b) Si dia un esempio di sistema lineare omogeneo in quattro incognite che ha tra le sue soluzioni $(1, 2, 1, 3)$ e $(1, 0, 1, 0)$.

Esercizio 3.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

tale che $(A + kI)M = B$ (dove I é la matrice identitá $n \times n$) e se per tali valori di k la matrice M é univocamente determinata.

b) Per $k = 1$ si determini esplicitamente M.

Esercizio 4.
Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Provare o confutare le seguenti affermazioni.

a) Se A é invertibile, allora A^i é invertibile per ogni intero $i > 0$.

b) Se $A^2 = B^2$, allora $A \neq 0$ se e solo se $B \neq 0$.

Esercizio 5.

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ di versori i, j, k, si considerino i vettori $u = j-k$, $v = i-j+2k$, $w_a = i+aj-2k$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinare l'insieme di tutti i vettori dello spazio ortogonali ad entrambi i vettori u e v.

b) Determinare due vettori v_1 e v_2 tali che $v = v_1 + v_2$, con v_1 parallelo a u e v_2 ortogonale a u.

c) Stabilire se esiste un valore del parametro reale a per il quale il vettore w_a sia ortogonale al vettore $u \wedge v$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2014/2015

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Test di autoverifica — 4. 11. 2014

Esercizio 1.

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2h(h+1)x_4 = 2h \\ 2x_2 + x_3 = h + 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2(h-1) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

con h parametro reale.

a) Si determini il rango della matrice A_h dei coefficienti del sistema e della matrice completa A'_h del sistema al variare di h.

b) Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il sistema ammette soluzioni.

c) Per $h = 0$ si determinino le soluzioni del sistema.

Esercizio 2.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -1 \\ k & k & -k & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$ la matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$.

a) Esistono valori del parametro reale k per i quali il sistema ha infinite soluzioni?

b) Esistono valori del parametro reale k per i quali il sistema ha infinite soluzioni, tutte multiple di uno stesso vettore non nullo $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$?

c) Esistono valori del parametro reale k per i quali il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri?

Esercizio 3.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

tale che $AM = B$ e $MA = C$ e se per tali valori di k la matrice M é univocamente determinata.

Esercizio 4.
Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Provare o confutare le seguenti affermazioni.

a) Le matrici A e B hanno lo stesso rango se e solo se $\det A = \det B$.

b) Se $A = (a_{i,j})$ e $B = (b_{i,j})$ sono matrici triangolari superiori, ossia matrici tali che $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ per ogni $i > j$, allora anche la matrice prodotto AB é triangolare superiore.

c) Se $A^3 = 0_n$ (dove 0_n é la matrice nulla di ordine n), allora la matrice $A - I_n$ é invertibile (dove I_n é la matrice identitá di ordine n) e $(A-I_n)^{-1} = A^2+A+I_n$.

Esercizio 5.

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ di versori i, j, k, si considerino i vettori $u_1 = i-j$, $u_2 = -i+2j+k$, $u_3 = 2i-2j$.

a) Si determinino

$$S = \{v \in \mathbb{R} \mid u_1 \wedge v = u_2\},$$
$$T = \{v \in \mathbb{R} \mid u_1 \wedge v = u_3\}.$$

b) Esistono due vettori distinti v_1 e v_2 tali che valga contemporaneamente

$$u_1.v_1 = u_1.v_2, \quad u_1 \wedge v_1 = u_1 \wedge v_2?$$

Università degli Studi di Bologna
C.d.L. in Matematica
Test di autovalutazione

A.A. 2015/2016
Corso di GEOMETRIA I
3. 11. 2015

Esercizio 1.

Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h-1 & 1 \\ 1 & h+1 & 2(h-1) & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di h.

b) Per $h = -1$ si determinino le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$, stabilendo se tra esse si possono trovare tre vettori linearmente indipendenti.

Esercizio 2.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e siano v_1, v_2, v_3, v_4 i vettori colonna di A.

a) Si riduca la matrice A per righe e se ne calcoli il rango.

b) Si determinino i sottoinsiemi massimali di $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ costituiti da vettori linearmente indipendenti.

c) Si determini l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A.

Esercizio 3.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in M_3((\mathbb{R})).$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k é possibile risolvere l'equazione matriciale

$$XA + kX = B$$

e se per tali valori di k la matrice X é univocamente determinata.

Esercizio 4.

Si provino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ risulta $(AB)^t = B^t A^t$ (dove A^t indica la matrice trasposta di A).

b) Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, i sistemi lineari omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$ sono equivalenti se e solo se le matrici A e B hanno lo stesso rango.

c) Dati due vettori u, v dello spazio tridimensionale applicati in un punto O e aventi direzioni diverse, tutti i vettori applicati in O e ortogonali contemporaneamente a u e v sono tra loro proporzionali.

Esercizio 5.

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ di versori i, j, k, si considerino i vettori $u_a = 2i + aj - k$, $v = i - j + 2k$, $w = i + j - 2k$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che u_a sia ortogonale ai vettori v e w?

b) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che i vettori $i, v, u_a \wedge w$ siano complanari?

Università degli Studi di Bologna
C.d.L. in Matematica
Test di autovalutazione

A.A. 2016/2017
Corso di GEOMETRIA I
10. 11. 2016

Esercizio 1.

a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + hx_3 + 2x_4 = (h+3)^2 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h.

b) Esistono valori di h per i quali il sistema omogeneo associato al sistema precedente ha infinite soluzioni tutte tra loro proporzionali?

Esercizio 2.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

si indichino con v_1, v_2, v_3 i suoi vettori colonna e siano rispettivamente U l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3 e V l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2.

a) Si determini esplicitamente l'insieme U, fornendone l'equazione cartesiana.

b) Si determini esplicitamente l'insieme V, stabilendo se coincide con U.

Esercizio 3.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & k & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale e sia $I \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice identitá.

Al variare del parametro k si determinino esplicitamente tutte le matrici $X \in M_3(\mathbb{R})$ tali che $X \cdot A = B + 2I$. Tali matrici sono tutte invertibili?

Esercizio 4.

Si provino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Data una qualunque matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice $B = A + A^t$ é simmetrica.

b) Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, tra le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ é possibile trovare due vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti se e solo se il rango di A é strettamente minore di n.

c) Aggiungendo un'equazione al sistema lineare $AX = B$ (con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$) l'insieme delle sue soluzioni diventa strettamente piú piccolo.