Università degli Studi di Bologna A.A. 2013/2014 **A**
C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 8.1.2014

Tutte le risposte debbono essere motivate

NOTA: Nel testo useremo le seguenti definizioni: uno spazio topologico si dice *quasi compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si puó estrare un sottoricoprimento finito; si dice *compatto* se é quasi-compatto e di Hausdorff. Uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se é di Hausdorff e ogni suo punto possiede almeno un intorno compatto.

Esercizio 1. Siano

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(z-3)^2+2(y+2)^2-x^2+4 = 0\}, \quad Y = \{(x, y, z) \in X \mid x > 1\}$$

con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$.

a) Si stabilisca se esistono chiusi (risp. aperti) di X che sono chiusi (risp. aperti) in $\mathbb{R}^3$.
b) Si stabilisca se esistono intorni di $P = (2, -2, 3)$ in X che sono intorni di P anche in $\mathbb{R}^3$.
c) Si stabilisca se X é un connesso e in caso non lo sia si determinino le sue componenti connesse.
d) E' possibile trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ che sia una compattificazione di Alexandroff di X?
e) Si stabilisca se Y é un chiuso (risp. un aperto) di X.
f) Si provi che $Y \setminus \{P\}$ é connesso.
g) Si consideri su X la relazione di equivalenza R cosí definita: due punti $(x, y, z), (x', y', z')$ di X sono in relazione se e solo se sono uguali oppure

$$z = z', y = y', x = -x', |x| < 3.$$

Si stabilisca se X/R con la topologia quoziente é connesso, quasi compatto, di Hausdorff e se la proiezione sul quoziente $\pi : X \to X/R$ é un'applicazione aperta.

Si consideri l'immersione $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definita da $i(x, y, z) = [(1, x, y, z)]$ e si denoti con X' il completamento proiettivo di $i(X)$ con la topologia indotta dalla topologia standard di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

h) Si scriva l'equazione di X', si stabilisca se è connesso, compatto e se è omeomorfo ad uno dei seguenti spazi topologici: i) $S^0 \times S^2$, ii) $S^1 \times S^1$, iii) S^2, iv) il quoziente di $S^1 \times S^1$ in cui una circonferenza $S^1 \times \{Q\}$ (con $Q \in S^1$) è contratta a un punto.
i) Si scriva un intorno del punto $i(P)$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

1) Si stabilisca se X' é una compattificazione di Alexandroff di X.

Esercizio 2. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti producendo un controesempio.

a) Se uno spazio topologico X é localmente connesso (risp. localmente compatto), anche ogni suo sottospazio é localmente connesso (risp. ogni suo sottospazio chiuso é localmente compatto).

b) Se X e Y sono spazi topologici e se $f : X \to Y$ é un'applicazione biunivoca, allora f é aperta se e solo se f é chiusa.

c) Su $\mathbb{R}$ la famiglia costituita dall'insieme vuoto e da tutti gli insiemi infiniti (cioé contenenti infiniti elementi) é base per una topologia.

Esercizio 3. Sia

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+4)(x+2)x(x-2)(x-4) = 0\}.$$

Determinare la chiusura di X, la frontiera di X e l'insieme dei punti di accumulazione di X nella topologia euclidea, nella topologia della semicontinuitá inferiore e nella topologia cofinita.

[Si ricorda che la topologia della semicontinuitá inferiore su $\mathbb{R}$ é la famiglia S costituita da $\mathbb{R}$, dall'insieme vuoto e da tutti gli intervalli $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$, mentre la topologia cofinita é la famiglia Z costituita da $\mathbb{R}$, dall'insieme vuoto e da tutti gli insiemi della forma $\mathbb{R} \setminus \{\text{numero finito di punti di } \mathbb{R}\}$.]

Università degli Studi di Bologna A.A. 2013/2014 **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 28.1.2014

Tutte le risposte debbono essere motivate.

NOTA: Nel testo useremo le seguenti definizioni: uno spazio topologico si dice *quasi compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si puó estrare un sottoricoprimento finito; si dice *compatto* se é quasi-compatto e di Hausdorff. Uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se é di Hausdorff e ogni suo punto possiede almeno un intorno compatto.

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$, munito della topologia euclidea, si consideri la seguente relazione di equivalenza: $(x,y)R(x',y')$ se e solo se $(x,y)=(x',y')$ oppure (x,y) e (x',y') stanno sulla retta $y=2x$ e sono simmetrici rispetto all'origine. Sia $X=\mathbb{R}^2/R$ con la topologia quoziente della topologia di $\mathbb{R}^2$ e sia $\pi:\mathbb{R}^2\to X$ la proiezione canonica.

a) Si stabilisca se l'applicazione π é aperta e se é chiusa.

b) Si scriva una base di aperti per la topologia di X e si stabilisca se X é a base numerabile.

c) Si determini un intorno per ciascuno dei punti $\pi(1,0)$ e $\pi(1,2)$ e si stabilisca se lo spazio topologico X soddisfa il primo assioma di numerabilitá.

d) Si stabilisca se X é uno spazio di Hausdorff.

e) Si stabilisca se lo spazio topologico $X\setminus\{\pi(0,0)\}$ é connesso per archi.

f) Si stabilisca se lo spazio topologico X é omeomorfo allo spazio topologico

$$Y=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2=9z^2\}$$

con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se X é uno spazio topologico, $g:\mathbb{R}\to X$ é un'applicazione continua, $\Gamma_g\subset\mathbb{R}\times X$ (con $\mathbb{R}\times X$ munito della topologia prodotto) il suo grafico e $p_1:\mathbb{R}\times X\to\mathbb{R}$, $p_2:\mathbb{R}\times X\to X$ le proiezioni sui due fattori, allora la restrizione di p_1 a Γ é un omeomorfismo, mentre la restrizione di p_2 a Γ é un'applicazione aperta.

b) Se $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sono due applicazioni continue della retta reale in sé e $f(q)=g(q)$ per ogni numero razionale q, allora $f=g$.

c) In $\mathbb{R}$, munito della topologia euclidea, presa una qualunque famiglia di sottoinsiemi connessi la loro intersezione é un connesso (eventualmente vuoto).

d) In uno spazio topologico X, ponendo $x_1 E x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ se esiste un sottoinsieme connesso che contiene x_1 e x_2, si ottiene una relazione di equivalenza le cui classi di equivalenza sono le componenti connesse di X.

Esercizio 3. Sia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-2)^2 + (y+1)^2 < 4\},$$

con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

a) Si provi che D non é quasi compatto, scrivendo esplicitamente un ricoprimento aperto di D che non ammette un sottoricoprimento finito.

b) Si determinino due spazi topologici connessi, compatti, tra loro non omeomorfi K_1 e K_2, ognuno dei quali contenga un sottospazio denso omeomorfo a D.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ munito della topologia euclidea si considerino i sottospazi

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1\},$$

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq z^2, \quad -1 \leq z \leq 1\}$$

e sia $\quad T = X \cup Y$.

a) Si determinino la chiusura e l'interno di X, Y come sottospazi di $\mathbb{R}^3$, la chiusura X e l'interno di Y come sottospazi di T.

b) Considerata l'immersione $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definita da $i(x,y,z) = [(1,x,y,z)]$, si stabilisca se il sottoinsieme $i(T)$ é un chiuso in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e, in caso contrario, se ne trovi la chiusura.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2013/2014 **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 17.2.2014

Tutte le risposte debbono essere motivate.

NOTA: Nel testo useremo le seguenti definizioni: uno spazio topologico si dice *quasi compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si puó estrare un sottoricoprimento finito; si dice *compatto* se é quasi-compatto e di Hausdorff. Uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se é di Hausdorff e ogni suo punto possiede almeno un intorno compatto.

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$, munito della topologia euclidea, si consideri la seguente relazione di equivalenza: $(x,y)R(x',y')$ se e solo se $(x,y)=(x',y')$ oppure (x,y) e (x',y') appartengono a $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$.
Sia $X=\mathbb{R}^2/R$ con la topologia quoziente della topologia di $\mathbb{R}^2$ e sia $\pi:\mathbb{R}^2\to X$ la proiezione canonica.

a) Si stabilisca se l'applicazione π é aperta e se é chiusa.

b) Si determini la chiusura di $\pi((0,0))$ in X.

c) Si stabilisca se lo spazio topologico X soddisfa il primo assioma di numerabilitá.

d) Si esibiscano (se esistono) due intorni disgiunti dei punti $\pi((0,0))$ e $\pi((1,0))$ in X.

e) Si stabilisca se X é uno spazio di Hausdorff, é quasi-compatto, é connesso per archi.

f) Si provi che ogni funzione continua $f:X\to\mathbb{R}$ é costante su $\pi(C)$, con $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$.

g) Si stabilisca se lo spazio topologico $X\setminus\overline{\{\pi((0,0))\}}$ é omeomorfo allo spazio topologico
$$Y=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=9\}$$
con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Esistono spazi topologici con topologia diversa dalla banale e dalla discreta, ma tale che ogni aperto sia anche chiuso.

b) Uno spazio topologico X con la topologia discreta é sempre compatto, localmente compatto, non connesso.

c) Se X e Y sono due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ (con la topologia euclidea) tra loro omeomorfi, allora sono omeomorfe anche le loro frontiere.

Esercizio 3. Sia $A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \cos x=\cos(1+y)\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

a) Si determinino l'interno di A, la chiusura di A e la frontiera di A.

b) Si stabilisca se A è compatto e se è connesso. Nel caso A non sia connesso se ne determinino le componenti connesse.

c) Considerata l'immersione $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita da $i(x, y) = [(1, x, y)]$, si determini la chiusura di $i(A)$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, stabilendo se e' una compattificazione di Alexandroff di $i(A)$.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ munito della topologia euclidea si considerino i sottospazi

$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + (y-2)^2 - 4(z+1)^2 = 1, \ |z| \leq 3\},$$

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + (y-2)^2 - 4(z+1)^2 = 0 \quad -3 \leq z \leq 3\},$$

X_3 la superficie ottenuta dalla rotazione del disco

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x-2)^2 + z^2 = 1, y = 0\}$$

intorno all'asse z, X_4 la superficie unione di X_3 con la sfera di centro il punto $(4, 0, 0)$ e raggio 1

a) Si suddivida l'insieme degli spazi topologici $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ in classi di omeomorfismo.

b) Considerata l'immersione $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definita da $i(x, y, z) = [(1, x, y, z)]$, e le chiusure di $i(X_1), i(X_2), i(X_3), i(X_4)$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si stabilisca se le classi di omeomorfismo restano le stesse.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2013/2014 **A**
C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 27.5.2014

Tutte le risposte debbono essere motivate.

NOTA: Nel testo useremo le seguenti definizioni: uno spazio topologico si dice *quasi compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si puó estrare un sottoricoprimento finito; si dice *compatto* se é quasi-compatto e di Hausdorff. Uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se é di Hausdorff e ogni suo punto possiede almeno un intorno compatto.

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ munito della topologia euclidea, siano

$$X = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = z - 2\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$Y = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 - y^2 = 2 - z\} \subset \mathbb{R}^3, \quad Z = X \cup Y.$$

a) Si stabilisca se X, Y, Z sono connessi per archi, compatti, localmente compatti.

b) Si stabilisca se X e Y sono omeomorfi e, in caso di risposta positiva, si espliciti un omeomorfismo tra i due sottospazi.

c) Si stabilisca se gli spazi X e Y ammettono una compattificazione di Alexandroff.

d) Si determini una compattificazione di Y che non sia una compattificazione di Alexandroff.

Esercizio 2. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e sia R la relazione su $\mathbb{R}$ definita da xRx' se $x = x'$ oppure se $x, x' \in \{0, 1\}$. Allora la proiezione canonica $\mathbb{R} \to X/R$ (con X/R munito della topologia quoziente) é contemporaneamente aperta e chiusa.

b) Sia X uno spazio topologico e sia Y un suo sottospazio. Allora Y é connesso se e solo se la frontiera di Y in X é connessa.

c) Le uniche applicazioni continue da $\mathbb{R}$ (munito della topologia euclidea) a $\mathbb{Q}$ (munito della topologia di sottospazio) sono le applicazioni costanti.

d) Considerato $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, il suo spazio delle orbite rispetto all'azione del gruppo ortogonale speciale $G = SO(2, \mathbb{R})$ definita da

$$\theta : G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \theta(A, x) = Ax$$

per ogni $A \in G$, $x \in \mathbb{R}^2$ é omeomorfo a $[0. +\infty)$ con la topologia euclidea.

Esercizio 3. Sia $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e sia τ la topologia su X i cui elementi sono X stesso, l'insieme $(0, +\infty)$, l'insieme vuoto e tutti i sottoinsiemi di X che non contengono 1. Nel seguito si consideri lo spazio topologico (X, τ).

a) Si stabilisca se $\{0\}$ e $\{1\}$ sono sottoinsiemi aperti (rispett. chiusi) di (X, τ).

b) Si stabilisca se X e $X \setminus \{1\}$ sono spazi topologici connessi.

c) Si dimostri che per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ l'applicazione $\gamma : [0,1] \to X \setminus \{0\}$ definita da $\gamma(t) = x$ per ogni $t \in [0, 1/2)$ e $\gamma(t) = 1$ per ogni $t \in [1/2, 1]$ é un arco continuo fra x e 1.

d) Si stabilisca se lo spazio topologico (X, τ) è uno spazio di Hausdorff e se é quasi compatto.

Esercizio 4. Sia $M = M_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali e sia $f : M \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione biunivoca definita da $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a, b, c, d)$ per ogni $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ e si munisca M della topologia immagine inversa della topologia euclidea di $\mathbb{R}^4$.

Si considerino seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$L_1 = \{A \in M \mid detA = 1\},$$

$$L_2 = \{A \in M \mid d = 1, |detA| > 1\},$$

$$L_3 = \{A \in M \mid |detA| \leq 1\}.$$

a) Si determini la chiusura e l'interno di L_1, L_2, L_3 in M.

b) Si stabilisca se L_2 é un intorno della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in M.

c) Si stabilisca se L_3 é omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.