Università degli Studi di Bologna A.A. 2013/2014
C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 17.6.2014

Tutte le risposte debbono essere motivate.

NOTA: Nel testo useremo le seguenti definizioni: uno spazio topologico si dice *quasi compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si puó estrare un sottoricoprimento finito; si dice *compatto* se é quasi-compatto e di Hausdorff. Uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se é di Hausdorff e ogni suo punto possiede almeno un intorno compatto.

Esercizio 1. Siano

$$X = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid x(y + z - 1) = 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$Y = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 1)(y + 2) = 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$Z = \{(x, y, z)) \in X \mid y + z = 1, x > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

muniti della topologia euclidea.

Si consideri l'immersione $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definita da $i(x, y, z) = [(1, x, y, z)]$ e si denotino con $i(X), i(Y)$ le immagini di X, Y con la topologia indotta dalla topologia standard di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

a) Si stabilisca se X e Y sono connessi per archi e compatti. Nel caso non siano compatti si determini una compattificazione di almeno uno di essi.

b) Si stabilisca se X e Y sono omeomorfi e, in caso di risposta positiva, si espliciti un omeomorfismo tra i due sottospazi.

c) Si stabilisca se Z é aperto in X e se é aperto in $\mathbb{R}^3$.

d) Si determinino le componenti connesse di

$$X \setminus \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y + z = 1\}.$$

e) Si determinino l'interno e la chiusura di $i(X)$ e $i(Y)$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, stabilendo se le chiusure sono compattificazioni di Alexandroff di X e Y.

Esercizio 2. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) In $\mathbb{R}^2$ munito della topologia euclidea esistono aperti con un'infinità numerabile di componenti connesse, ma non esistono aperti con un'infinità piú che numerabile di componenti connesse.

b) Considerato $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e il sottoinsieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ con la topologia di sottospazio, tutte le applicazioni $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sono continue e aperte.

c) In $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea, prese due rette distinte r, s e facendo ruotare una intorno all'altra si ottiene sempre uno spazio topologico omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea e sia

$$G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ab \neq 0\}$$

il gruppo delle matrici diagonali invertibili, che agisce su $\mathbb{R}^2$ per moltiplicazione. Sia E la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ definita dall'azione di G, ossia $(x,y)E(x',y')$ se esiste $A \in G$ tale che $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e sia $X = \mathbb{R}^2/E$ con la topologia quoziente, $\pi : \mathbb{R}^2 \to X$ la proiezione canonica.

a) Si determinino le classi di equivalenza dei punti $(0,0), (1,1), (1,0), (0,1)$ e si stabilisca se X é finito o infinito.

b) Si determini un intorno in X di ciascuno dei punti $\pi(0,0), \pi(1,1), \pi(1,0)$ e le chiusure dei sottospazi $\{\pi(0,0)\}, \{\pi(1,1)\}, \{\pi(1,0)\}$.

c) Si stabilisca se X é di Hausdorff e se é quasi compatto. Nel caso non sia di Hausdorff si determinino due punti distinti che non hanno intorni disgiunti.

d) Si consideri $V := \{\pi(x,y) \in X \mid y \neq 0\}$ e se ne determinino l'interno, la chiusura e le componenti connesse.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2013/2014
C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 15.7.2014

Tutte le risposte debbono essere motivate.

NOTA: Nel testo useremo le seguenti definizioni: uno spazio topologico si dice *quasi compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si puó estrare un sottoricoprimento finito; si dice *compatto* se é quasi-compatto e di Hausdorff. Uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se é di Hausdorff e ogni suo punto possiede almeno un intorno compatto.

Esercizio 1. Siano

$$X = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y + z + 2)^2 - 4 = 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$r_1 = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0, y = 0\} \subset X,$$
$$r_2 = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0, y = 4\} \subset X,$$
$$Y = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$$

muniti della topologia euclidea.

Si consideri l'immersione $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definita da $i(x, y, z) = [(1, x, y, z)]$ e si denotino con $i(X), i(r_1), i(r_2)$ le immagini di X, r_1, r_2 con la topologia indotta dalla topologia standard di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

a) Si determinino le componenti connesse di X, stabilendo se sono aperte in X e se sono aperte in $\mathbb{R}^3$.

b) Si provi che X é localmente compatto e non compatto e si determini un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ che sia una compattificazione di Alexandroff di X.

c) Si consideri $r_1 \cup r_2$ e si stabilisca se é omeomorfo a Y.

d) Si considerino le chiusure proiettive di $i(X)$ e di $i(r_1) \cup i(r_2)$ stabilendo se sono sottospazi connessi e compatti di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

e) Si consideri la relazione di equivalenza E su X che identifica ogni punto $(a, 0, -a) \in r_1 (a \in \mathbb{R})$ con il punto $(a, 4, -a) \in r_2$; sia $Z := X/E$ munito della topologia quoziente della topologia euclidea, $\pi : X \to Z$ la proiezione canonica.

   Si stabilisca se π é aperta (rispett. chiusa) e se Z é connesso e di Hausdorff.

Esercizio 2.

Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se $\mathbb{R}$ é munito dela topologia euclidea e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue e chiuse, l'applicazione $f \times g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definita da $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ (con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munito della topologia prodotto della topologia euclidea di $\mathbb{R}$) **non é** necessariamente chiusa.

b) Se $\mathbb{R}$ é munito dela topologia euclidea e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue e chiuse, l'applicazione $f \times g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definita da $(f \times g)(x,y) = (f(x), g(y))$ (con $[0,1] \times [0,1]$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muniti della topologia prodotto) **é** necessariamente chiusa.

c) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = e^t$ é continua quando $\mathbb{R}$ é munito della topologia cofinita sia come dominio, sia come codominio, di f.

Esercizio 3. Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea e siano:

$$G_1 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, a \neq 0\}$$

il gruppo delle matrici multiple non nulle della matrice identitá,

$$G_2 = GL_2(\mathbb{R})$$

il gruppo delle matrici 2×2 invertibili, che agiscono su $\mathbb{R}^2$ per moltiplicazione. Sia E_i la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ definita dall'azione di G_i, ossia $(x,y)E_i(x',y')$ se esiste $A \in G_i$ tale che $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e sia $X_i = \mathbb{R}^2 / G_i$ con la topologia quoziente, $\pi_i : \mathbb{R}^2 \to X_i$ la proiezione canonica.

a) Si stabilisca se X_1 e X_2 sono é finiti o infiniti.

b) Si determini la chiusura di ognuno dei punti di X_1 e un sottospazio denso proprio di X_1.

c) Si mostri che X_1 non é di Hausdorff, determinando due punti distinti che non hanno intorni disgiunti, ma che é quasi compatto.

d) Si stabilisca se in X_2 i punti sono aperti e/o chiusi e se la proiezione canonica $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to X_2$ é chiusa.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2013/2014
C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 17.9.2014

Tutte le risposte debbono essere motivate.

NOTA: Nel testo useremo le seguenti definizioni: uno spazio topologico si dice *quasi compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si puó estrare un sottoricoprimento finito; si dice *compatto* se é quasi-compatto e di Hausdorff. Uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se é di Hausdorff e ogni suo punto possiede almeno un intorno compatto.

Esercizio 1. Siano

$$X = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$Y = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 4y^2 + z - 2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$Z = X \cup Y \subset \mathbb{R}^3, \quad T = X \cap Y \subset \mathbb{R}^3$$

muniti della topologia euclidea.

Si consideri l'immersione $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definita da $i(x, y, z) = [(1, x, y, z)]$ e si denotino con $i(X), i(Y), i(Z), i(T)$ le immagini di X, Y, Z, T con la topologia indotta dalla topologia standard di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

a) Si stabilisca se X e Y sono omeomorfi e in caso affermativo si espliciti un omeomorfismo tra i due sottospazi.

b) Si determinino le chiusure e l'interno di $Z \setminus X$ rispettivamente in Z e in $\mathbb{R}^3$.

c) Si stabilisca se T é connesso e compatto.

d) Si determinino le componenti connesse di $Z \setminus T$.

e) Si determinino l'interno e la chiusura di $i(X)$, $i(Z)$ e $i(T)$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, stabilendo se le chiusure sono compattificazioni di Alexandroff di X, Z e T rispettivamente.

Esercizio 2. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Siano $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ muniti della topologia euclidea, sia $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proiezione sul primo fattore definita da $p(x, y) = x$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e sia

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y > 0\}$$

munito della topologia euclidea indotta da $\mathbb{R}^2$. Allora $p_{|S} : S \to \mathbb{R}$ é una mappa sia aperta sia chiusa.

b) Se un insieme X é finito allora é quasi-compatto per ogni topologia che si considera su X, viceversa se un insieme X é quasi-compatto per ogni possibile topologia su X, allora é costituito da un numero finito di punti.

c) Se X é uno spazio metrico che contiene un sottoinsieme numerabile denso S, allora X soddisfa il secondo assioma di numerabilitá.

Esercizio 3. Si consideri $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con la topologia euclidea e sia

$$G = \{\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

un gruppo che agisce su X per moltiplicazione. Sia E la relazione di equivalenza su X definita dall'azione di G, ossia $(x,y)E(x',y')$ se esiste $A \in G$ tale che $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e sia $Y = X/E$ con la topologia quoziente, $\pi : X \to Y$ la proiezione canonica.

a) Si determinino le classi di equivalenza dei punti $(1,1), (1,0), (3,1)$.

b) Si stabilisca se la proiezione π é aperta e se $\pi(T)$ é chiuso in Y, dove

$$T = \{(x,y) \in X \mid y = 0, 1 \leq x \leq 2\}.$$

c) Si stabilisca se Y é connesso per archi.

c) Si determini un sottoinsieme compatto $K \subset X$ tale che $\pi(K) = Y$.

d) Si stabilisca se Y é quasi-compatto.

e) E' possibile costruire un omeomorfismo tra Y e uno spazio noto?