Università degli Studi di Bologna A.A. 2014/2015 **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 9.1.2015

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica canonicamente associata ad A e la forma quadratica associata a b.

   a) Si stabilisca se b é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

   b) Si determini una base ortogonale di $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0$ rispetto a b e si completi ad una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a b.

   c) Si determini l'insieme dei vettori isotropi rispetto a b, stabilendo se é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

   d) Si determini la segnatura di q .

   Sia $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) + 2x + y - z - 1 = 0\}$.

   e) Si classifichi Q, scrivendone la forma canonica affine e le equazioni di un'affinitá di $\mathbb{R}^3$ che porta Q nella sua forma canonica affine.

   f) Si classifichi la conica

   $$C = Q \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2z\},$$

   scrivendone la forma canonica euclidea e
   stabilendo se é una conica a centro, nel qual caso se ne determinino centro e assi, o una parabola, nel qual caso se ne determinino vertice e asse.

   Si munisca $\mathbb{R}^3$ della topologia euclidea, Q e C della topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.

   g) Si stabilisca se Q e C sono connessi e compatti. nel caso non siano connessi se ne determinino le componenti connesse, nel caso non siano compatti se ne determini una compattificazione.

   h) Si determinino le componenti connesse di $Q \setminus \{(1, 0, 1), (1, 0, 2)\}$.

Esercizio 2. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, $m < n$, sono dotati della topologia euclidea, l'inclusione

$$i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad i(x_1, \cdots x_m) = (x_1, \cdots x_m, 0, \cdots 0)$$

é un'applicazione chiusa, ma non aperta, mentre la proiezione

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad p(x_1, \cdots x_m, x_{m+1}, \cdots x_n) = (x_1, \cdots x_m)$$

é un'applicazione aperta ma non chiusa.

b) Se (X, d) é uno spazio metrico, C_1, C_2 due chiusi disgiunti di X, allora esistono due aperti disgiunti A_1, A_2 di X tali che $C_1 \subset A_1, C_2 \subset A_2$.

c) In $\mathbb{R}$ la famiglia costituita dall'insieme vuoto, da $\mathbb{R}$ e da tutti gli insiemi $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ é base per una topologia, che non é confrontabile con la topologia euclidea.

Esercizio 3. Si consideri $X = \mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea e sia

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

un gruppo che agisce su X per moltiplicazione. Sia E la relazione di equivalenza su X definita dall'azione di G, ossia $(x, y, z)\, E\, (x', y', z')$ se esiste $A \in G$ tale che $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ e sia $Y = X/E$ con la topologia quoziente, $\pi : X \to Y$ la proiezione canonica.

a) Si determinino le orbite di X rispetto all'azione di G, stabilendo se sono chiuse, connesse, compatte.

b) Si stabilisca se la proiezione π é chiusa.

c) Si stabilisca se Y é uno spazio di Hausdorff.

d) Si stabilisca se esiste un sottoinsieme compatto $K \subset X$ tale che $\pi(K) = Y$.

Università degli Studi di Bologna   A.A. 2014/2015   **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II   Prova scritta   27.1.2015

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica canonicamente associata ad A e la forma quadratica associata a b.

   a) Si stabilisca se b é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

   b) Si determini una base ortogonale di $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y - 2z = 0$ rispetto a b e si completi ad una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a b.

   c) Si determini l'insieme dei vettori isotropi rispetto a b, stabilendo se é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

   d) Si determini la segnatura di q .

Esercizio 2.

Sia $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 4x - 12y - 2z + 14 = 0\}$.

a) Si classifichi Q, scrivendone la forma canonica euclidea e le equazioni di un isometria di $\mathbb{R}^3$ che porta Q nella sua forma canonica euclidea.

b) Si determinino l'eventuale centro, gli eventuali assi e piani di simmetria di Q, stabilendo se si tratta di una quadrica di rotazione.

c) Si determinino le isometrie di $\mathbb{R}^3$ che mandano Q in sé.

d) Si stabilisca se esistono fasci di piani che intersecano Q lungo delle parabole.

Si consideri su Q la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$ e sia E la relazione di equivalenza su X che identifica due punti $P = (x_P, y_P, z_p)$, $R = (x_R, y_R, z_R) \in Q$ se e solo se sono uguali oppure se $z_P = z_R$ e P e R sono allineati con il punto $(1, 2, z_P)$. Sia $T = Q/E$ con la topologia quoziente, $\pi : Q \to T$ la proiezione canonica.

e) Si stabilisca se π é un'applicazione aperta (rispettivamente chiusa).

f) Si stabilisca se lo spazio topologico T é di Hausdorff, quasi compatto, connesso.

g) Si scriva esplicitamente un intorno aperto di $\pi()$.

h) Si stabilisca se $\pi(Q \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\})$ é omeomorfo a $\mathbb{R}^3$

Esercizio 3. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se X é uno spazio topologico connesso, allora ogni suo sottospazio denso é connesso.

b) Se X é uno spazio topologico, G un gruppo che agisce su X tale che le orbite dei punti di X rispetto all'azione di G sono tutte compatte, allora lo spazio quoziente X/G é compatto.

c) Se $C \subset \mathbb{R}^3$ é una conica, allora C giace su un piano.

c') Se $C \subset \mathbb{R}^3$ é una conica e $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ é un piano per tre punti non allineati della conica, allora C é contenuta in α.

Esercizio 4. Si consideri $X = \mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea e sia

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

un gruppo che agisce su X per moltiplicazione. Sia E la relazione di equivalenza su X definita dall'azione di G, ossia $(x, y, z)\, E\, (x', y', z')$ se esiste $A \in G$ tale che $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ e sia $Y = X/E$ con la topologia quoziente, $\pi : X \to Y$ la proiezione canonica.

a) Si determinino le orbite di X rispetto all'azione di G, stabilendo se sono chiuse, connesse, compatte.

b) Si stabilisca se la proiezione π é chiusa.

c) Si stabilisca se Y é uno spazio di Hausdorff.

d) Si stabilisca se esiste un sottoinsieme compatto $K \subset X$ tale che $\pi(K) = Y$.

Università degli Studi di Bologna **A.A. 2014/2015** **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II **Prova scritta** **13.2.2015**

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ due matrici simmetriche reali, siano $q_1, q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ le forme quadratiche canonicamente associate ad A e B rispettivamente.

a) Si stabilisca se A e B possono essere le matrici associate ad una stessa forma bilineare $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispetto a due diverse basi di $\mathbb{R}^3$.

b) Si stabilisca se esiste un'isometria $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})$ tale che

$$q_2(x_1'x_2', x_3') = q_1(\phi(x_1x_2, x_3))$$

c) Si stabilisca se

$$Q_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid q_1(x_1, x_2, x_3) = 0\},$$

$$Q_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid q_2(x_1, x_2, x_3) = 0\},$$

sono quadriche a centro e se sono superfici di rotazione.

d) Si stabilisca se Q_1 e Q_2 con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$ sono spazi topologici omeomorfi.

e) Si stabilisca se

$$Q_1 \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 1 = 0\},$$

$$Q_2 \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 2x_2 = 0\}$$

sono coniche affinemente equivalenti e se, con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$, sono spazi topologici omeomorfi.

Esercizio 2.

In $\mathbb{R}^3$ munito della topologia euclidea sia S la superficie definita dalle equazioni parametriche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = u^2 + v^2,\ y = 2u^2v^2,\ z = u^2 - v^2,\ u, v \in \mathbb{R}\}.$$

a) Si classifichi S, determinandone la forma canonica euclidea, gli eventuali centro, assi e piani di simmetria e stabilendo se si tratta di una quadrica di rotazione.

b) Si stabilisca se esistono fasci di piani che intersecano S lungo delle parabole.

c) Si determinino le componenti connesse di S, di

$$T_1 = S \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z,\ y = 0\},\ \text{e di}$$

$$T_2 = S \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}.$$

d) Si stabilisca se

$$T_3 = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 2\},$$

$$T_4 = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

sono sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se X é uno spazio topologico e $Y \subset X$ é un suo sottospazio, allora $X \setminus Int\, Y \subset \overline{X \setminus Y}$ e l'inclusione puó essere stretta.

b) Per ogni $n \geq 1$ lo spazio topologico quoziente $\mathbb{R}^n/GL(n, \mathbb{R})$ non é uno spazio di Hausdorff.

c) Se X é uno spazio topologico, G un gruppo che agisce su X, $\pi : X \to X/G$ la proiezione canonica, $f : X/G \to Z$, un'applicazione da X/G a valori in uno spazio topologico Z, allora l'applicazione f é aperta (risp. chiusa) se e solo se l'applicazione $f \circ \pi$ é aperta (risp. chiusa).

Esercizio 4. Si consideri un insieme infinito X e un punto $x_0 \in X$.

a) Si provi che la famiglia $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid x_0 \in A\}$ é una topologia su X.

b) Si stabilisca se (X, τ) é uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, quasi compatto.

c) Si stabilisca se esistono punti di (X, τ) che ammettono intorni a chiusura quasi compatta.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2014/2015 **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 8.4.2015

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ una matrice simmetrica reale, sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare canonicamente associata ad A.

a) Si stabilisca se i vettori $u = (1,1,0)$, $v = (0,1,1)$ sono vettori isotropi rispetto a b, tra loro ortogonali rispetto a b.

b) Si stabilisca se esistono vettori isotropi rispetto a b tra loro linearmente indipendenti.

c) Si consideri la conica $C \subset \mathbb{R}^2$ di equazione

$$(x\,y\,1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Si classifichi C e, qualora si tratti di una conica a centro, se ne trovino il centro e gli assi, mentre se si tratta di una parabola se ne trovino l'asse e il vertice.

Esercizio 2.

In $\mathbb{R}^3$ munito della topologia euclidea si considerino le quadriche di equazioni

$$Q_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-z)(y+z) - (y-1)^2 = 0\},$$
$$Q_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4\},$$

a) Si stabilisca se Q_1 e Q_2 sono spazi topologici connessi e compatti e se sono tra loro omeomorfi.

c) Si stabilisca se Q_1 e Q_2 sono superficie di rotazione, nel qual caso si trovi l'asse di rotazione e una curva che, ruotando intorno all'asse, descrive la superficie di rotazione.

d) Si determinino le componenti connesse di

$$\tilde{Q}_1 := Q_1 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z, y = 1\}$$

e di

$$\tilde{Q}_2 := Q_2 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 1, z = 4\}.$$

e) Si determini un intorno compatto di $(2,3,1)$ in Q_1 e un intorno connesso di $(1,1,-1)$ in $\tilde{Q}_1$.

f) Si determini una compattificazione di Alexandroff per ognuno degli spazi Q_2 e $\tilde{Q}_2$.

g) Si consideri l'immersione $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definita da $i(x, y, z) = [(1, x, y, z)]$ e si denotino con Q_1', Q_2' i completamenti proiettivi di $i(Q_1)$ e $i(Q_2)$ rispettivamente con la topologia indotta dalla topologia standard di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Si stabilisca se Q'_1 e Q'_2 sono spazi tra loro omeomorfi e se sono compattificazioni di Alexandroff di Q_1 e Q_2 rispettivamente.

Esercizio 3.

In $\mathbb{R}^2$, munito della topologia euclidea, per ogni $n = 1, 2, \cdots$ sia

$$X_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ y/x = 2/n\} \qquad \text{e} \qquad X = \bigcup_n X_n.$$

a) Determinare la chiusura $\overline{X}$ di X in $\mathbb{R}^2$, stabilendo se è un connesso.

b) Determinare le componenti connesse di $X' = \overline{X} \setminus \{(0,0)\}$ e dire quali di queste sono aperte nella topologia indotta su X'.

c) Si definisca su X' la relazione di equivalenza $\sim$ per cui due punti sono equivalenti se sono contenuti nella stessa componente connessa. Si stabilisca se lo spazio topologico quoziente $X'/\sim$ ha la topologia discreta, se é di Hausdorff e se é quasi compatto.

Esercizio 4. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Per ogni $n \geq 1$ il gruppo $O(n)$ é un gruppo topologico non connesso che agisce su $\mathbb{R}^n$ e lo spazio topologico quoziente $\mathbb{R}^n/O(n)$ non é uno spazio di Hausdorff.

b) Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ é un gruppo topologico non compatto e non connesso.

c) Se X é uno spazio topologico, per ogni componente connessa per archi C' di X esiste un'unica componente connessa C di X tale che $C' \subset C$. Questo definisce una corrispondenza $C' \to C$ tra le componenti connesse per archi e le componenti connesse dello spazio X, suriettiva ma in generale non iniettiva.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2014/2015 **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 27.1.2015

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica canonicamente associata ad A e la forma quadratica associata a b.

   a) Si stabilisca se b é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

   b) Si determini una base ortogonale di $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y - 2z = 0$ rispetto a b e si completi ad una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a b.

   c) Si determini l'insieme dei vettori isotropi rispetto a b, stabilendo se é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

   d) Si determini la segnatura di q .

Esercizio 2.

Sia $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 4x - 12y - 2z + 14 = 0\}$.

a) Si classifichi Q, scrivendone la forma canonica euclidea e le equazioni di un isometria di $\mathbb{R}^3$ che porta Q nella sua forma canonica euclidea.

b) Si determinino l'eventuale centro, gli eventuali assi e piani di simmetria di Q, stabilendo se si tratta di una quadrica di rotazione.

c) Si determinino le isometrie di $\mathbb{R}^3$ che mandano Q in sé.

d) Si stabilisca se esistono fasci di piani che intersecano Q lungo delle parabole.

Si consideri su Q la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$ e sia E la relazione di equivalenza su X che identifica due punti $P = (x_P, y_P, z_p)$, $R = (x_R, y_R, z_R) \in Q$ se e solo se sono uguali oppure se $z_P = z_R$ e P e R sono allineati con il punto $(1, 2, z_P)$. Sia $T = Q/E$ con la topologia quoziente, $\pi : Q \to T$ la proiezione canonica.

e) Si stabilisca se π é un'applicazione aperta (rispettivamente chiusa).

f) Si stabilisca se lo spazio topologico T é di Hausdorff, quasi compatto, connesso.

g) Si scriva esplicitamente un intorno aperto di $\pi()$.

h) Si stabilisca se $\pi(Q \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\})$ é omeomorfo a $\mathbb{R}^3$

Esercizio 3. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se X é uno spazio topologico connesso, allora ogni suo sottospazio denso é connesso.

b) Se X é uno spazio topologico, G un gruppo che agisce su X tale che le orbite dei punti di X rispetto all'azione di G sono tutte compatte, allora lo spazio quoziente X/G é compatto.

c) Se $C \subset \mathbb{R}^3$ é una conica, allora C giace su un piano.

c') Se $C \subset \mathbb{R}^3$ é una conica e $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ é un piano per tre punti non allineati della conica, allora C é contenuta in α.

Esercizio 4. Si consideri $X = \mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea e sia

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

un gruppo che agisce su X per moltiplicazione. Sia E la relazione di equivalenza su X definita dall'azione di G, ossia $(x, y, z)\, E\, (x', y', z')$ se esiste $A \in G$ tale che $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ e sia $Y = X/E$ con la topologia quoziente, $\pi : X \to Y$ la proiezione canonica.

a) Si determinino le orbite di X rispetto all'azione di G, stabilendo se sono chiuse, connesse, compatte.

b) Si stabilisca se la proiezione π é chiusa.

c) Si stabilisca se Y é uno spazio di Hausdorff.

d) Si stabilisca se esiste un sottoinsieme compatto $K \subset X$ tale che $\pi(K) = Y$.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2014/2015 **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 24.6.2015

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice simmetrica reale, siano $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare e la forma quadratica canonicamente associate ad A.

a) Si determini il radicale e l'insieme dei vettori isotropi di b e la segnatura della forma quadratica q.

b) Si determini un sottospazio vettoriale di dimensione due di $\mathbb{R}^4$ costituito di soli vettori isostropi rispetto a b e si stabilisca se esiste un sottospazio vettoriale di dimensione tre di $\mathbb{R}^4$ costituito di soli vettori isostropi rispetto a b.

c) Si classifichi la quadrica $Q \subset \mathbb{R}^3$ di equazione

$$(x\, y\, z\, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

se ne scriva la forma canonica affine e si stabilisca se il piano di equazione $x = 0$ é un piano di simmetria per Q.

Esercizio 2.

In $\mathbb{R}^3$ munito della topologia euclidea si considerino i sottospazi

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4x^2 - y^2\},$$
$$Y_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x,\ z = 0\} \subset X,$$
$$Y_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ z = -y^2\} \subset X,$$
$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + (x-2)^2 + z^2 = 9\},$$

a) Si scriva un omeomorfismo tra X e $\mathbb{R}^2$ e si determini l'immagine di Y_1 e di Y_2 in tale omeomorfismo.

b) Si determinino l'interno, la chiusura, la frontiera di X in $\mathbb{R}^3$; l'interno, la chiusura, la frontiera di Y_1 in X.

c) Si stabilisca se $X \setminus Y_1$ e $X \cap Z$ sono spazi topologici connessi e compatti. Nel caso non siano compatti se ne determini una compattificazione.

Si consideri su X la relazione di equivalenza E che identifica tra loro due punti $(x, y, z), (x', y'z') \in X$ se e solo se

$$(x, y, z) = (x', y'z') \quad \text{oppure} \quad (x, y, z), (x', y', z') \in Y_1 \text{ e } x' = -x.$$

Sia $X' = X/E$ e sia $\pi : X \to X'$ la proiezione sul quoziente.

d) Si stabilisca se la proiezione π é aperta (rispett. chiusa).

e) Si stabilisca se lo spazio topologico quoziente X' é di Hausdorff e quasi compatto.

Esercizio 3.

Si considerino $\mathbb{Q}$ e $X = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea E di $\mathbb{R}$.

a) La topologia su $\mathbb{Q}$ e su X é quella discreta?

b) Si determinino le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ e di X

c) Si stabilisca se $\mathbb{Q}$ e X sono omeomorfi.

d) Si stabilisca se $\mathbb{Q}$ rimane sconnesso se si sostituisce la topologia euclidea con una topologia piú fine τ o con una topologia meno fine σ.

Esercizio 4. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Lo spazio $\mathbb{R}$ dei numeri reali, munito della topologia euclidea, é omeomorfo al suo sottospazio $(1, 2]$.

b) Sia $X := \{1, 2, 3, 4\}$ munito della topologia $\tau = \{\emptyset, X, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ e sia $Y := \{1, 2, 3\}$. Considerata la funzione $f : X \to Y$ definita da $f(1) = f(2) = 2$, $f(3) = f(4) = 1$, la topologia piú fine su Y tra quelle che rendono continua la funzione f é la topologia $\sigma = \{\emptyset, Y, \{1, 2\}\}$.

c) In $\mathbb{R}^2$, con la topologia euclidea, sia A un aperto e sia P un punto di A. Allora A é connesso se e solo se $A \setminus \{P\}$ é connesso.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2014/2015 **A**
C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 4.6.2015

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ una matrice simmetrica reale, sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare canonicamente associata ad A.

a) Si determini il radicale e l'insieme dei vettori isotropi di b, stabilendo se b é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$. Nel caso b non sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$, si determini (se esiste) un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due sul quale la restrizione di b é un prodotto scalare.

b) Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a b.

c) Si consideri la conica $C \subset \mathbb{R}^2$ di equazione

$$(x\, y\, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Si classifichi C e, qualora si tratti di una conica a centro, se ne trovino il centro e gli assi, mentre se si tratta di una parabola se ne trovino l'asse e il vertice.

Esercizio 2.

In $\mathbb{R}^3$ munito della topologia euclidea si considerino i sottospazi

$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ -3 \leq z \leq 3\},$$

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{9},\ -3 \leq z \leq 3\}, \quad X = X_1 \setminus X_2,$$

$$X_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < \frac{z^2}{9},\ -3 < z < 3\}, \quad Y = X_1 \setminus X_3.$$

Sia ϕ la riflessione rispetto al piano $x = 0$, sia $G_1 =< \phi >$ il sottogruppo del gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^3$ generato da ϕ, sia

$$G_2 = \{ \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

a) Si determinino l'interno, la chiusura, la frontiera di X.

b) Si stabilisca se X é uno spazio topologico connesso e compatto. Nel caso non sia compatto se ne determini una compattificazione.

c) Si stabilisca se é possibile definire un'azione del gruppo G_1 (rispett. del gruppo G_2) su X e, in caso positivo, si determinino le orbite del punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ rispetto a tali azioni.

d) Si stabilisca se i sottospazi X e Y sono tra loro omeomorfi.

Esercizio 3.

In $\mathbb{R}^2$, munito della topologia euclidea, sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 2\}.$$

Sia σ la reazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ cosí definita: (x,y) σ (x',y') se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $(x, y), (x', y') \in A$, sia $X = \mathbb{R}^2/\sigma$ lo spazio topologico quoziente e $\pi : \mathbb{R}^2 \to X$ la proiezione canonica.

a) Si stabilisca se X é quasi compatto.

b) Si stabilisca se X é di Hausdorff.

c) Si determini la chiusura di $\pi(D)$ con

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1\}.$$

d) Si stabilisca se la proiezione π é aperta (rispett. chiusa).

Esercizio 4. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se ogni punto di uno spazio topologico X ammette un intorno connesso, allora le componenti connesse di X sono contemporaneamente aperte e chiuse.

b) Il sottogruppo di delle matrici simmetriche é un sottospazio chiuso, con interno non vuoto, dello spazio topologico $M_n(\mathbb{R})$ dello spazio topologico delle matrici n per n a coefficienti reali.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2014/2015 **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 6.7.2015

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata canonicamente alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sia $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_4 = 0\}$

a) Si stabilisca se b é degenere o non degenere e se é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.

b) Si determini il sottospazio $W^\perp$ ortogonale di W rispetto a b e l'insieme $W^\perp \cap I(b)$ (dove $I(b)$ indica l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^4$ isotropi rispetto a b), stabilendo se é un sottospazio vettoriale di $W^\perp$.

c) Sia $Q \subset \mathbb{R}^3$ la quadrica di equazione

$$(x\, y\, z\, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

sia $H \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $z = 1$ e sia $C = Q \cap H$.
Si classifichi la conica C, se ne scriva la forma canonica euclidea e si determinino i suoi eventuali assi di simmetria.

Esercizio 2.

In $\mathbb{R}^3$ munito della topologia euclidea si consideri il sottospazio

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 = z^2\},$$

e siano ρ_1, ρ_2 le relazioni di equivalenza su X cosí definite:

$(x, y, z)\rho_1(x', y', z')$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $(x', y', z') = \lambda(x, y, z)$,

$$(x, y, z)\rho_2(x', y', z') \quad \text{se e solo se} \quad z = z',$$

siano $Y = X/\rho_1$, $Z = X/\rho_2$ i rispettivi spazi quoziente, $p_1 : X \to Y$, $p_2 : X \to Z$ le rispettive proiezioni canoniche.

a) Si descrivano $[(0,0,0)]_{\rho_1}, [(0,0,0)]_{\rho_2}, [(1,0,1)]_{\rho_1}, [(1,0,1)]_{\rho_2}$.

b) Si stabilisca se esistono aperti $A \subset X$ tali che $p_1{}^{-1}(p_1(A))$ contiene strettamente A.

c) Si stabilisca quali sono gli aperti di Y che contengono $[(0,0,0)]_{\rho_1}$.

d) Si stabilisca se Y é compatto e se esiste un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (con n opportuno) omeomorfo a Y.

e) Si stabilisca se Z é omeomorfo a $\mathbb{R}$ (munito della topologia euclidea).

Esercizio 3.

Si consideri l'insieme $X = M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali con la topologia euclidea di $\mathbb{R}^4$ e siano

$$X_1 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a > 0\},$$

$$X_2 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = 0\},$$

$$X_3 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\},$$

$$X_4 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}, \quad Y = X_2 \cap X_3, \quad Z = X_3 \cap X_4,$$

con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $M_2(\mathbb{R})$.

a) Si determinino l'interno, la chiusura, la frontiera di X_1, X_3, X_4 in $M_2(\mathbb{R})$, stabilendo anche se sono connessi e compatti.

b) Per $i = 1, 3, 4$ si stabilisca se $X \setminus X_i$ é connesso e compatto.

c) Si determinino due quadriche Q_1 e Q_2 di $\mathbb{R}^3$ omeomorfe rispettivamente a Y e Z.

Esercizio 4. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se X e Y sono sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$, munito della topologia euclidea, tali che $X \cap Y$ é una varietá topologica, allora X e Y sono necessariamente varietá topologiche.

b) La famiglia cosí definita:

$$\tau := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-a, a) \subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

é una topologia su $\mathbb{R}$ e $(\mathbb{R}, \tau)$ é uno spazio topologico di Hausdorff.

c) Non esiste alcuna funzione continua e iniettiva da $\mathbb{R}^2$ (munito della topologia euclidea) a $\mathbb{R}$ (munito della topologia euclidea).

Università degli Studi di Bologna A.A. 2014/2015 **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II Prova scritta 16.9.2015

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata canonicamente alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Sia $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0, x_2 = 0\}$

a) Si determinino il radicale di b, l'insieme $I(b)$ dei vettori di $\mathbb{R}^4$ isotropi rispetto a b e si stabilisca se b é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.

b) Si determini una base ortogonale di W rispetto a b e la si completi ad una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale rispetto a b.

c) Sia $Q \subset \mathbb{R}^3$ la quadrica di equazione

$$(x\, y\, z\, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Si classifichi Q e se ne scrivano la forma canonica euclidea e la forma canonica affine.

Esercizio 2.

Si consideri l'insieme $X = M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali con la topologia euclidea di $\mathbb{R}^4$ e siano

$$X_1 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\},$$

$$X_2 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\},$$

$$X_3 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\},$$

$X_4 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0,\, b = 1\}$, $\quad Y = X_1 \cap X_2$, $\quad T = X_1 \cap X_3$, $\quad Z = X_2 \cap X_4$,

con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $M_2(\mathbb{R})$.

a) Si determinino l'interno, la chiusura, la frontiera di X_4 in X_1, stabilendo anche se la chiusura di X_4 in X_1 é connessa e compatta.

b) Si stabilisca se Y e T sono omeomorfi.

c) Si determini una quadrica di $\mathbb{R}^3$ che sia omeomorfa a Y.

d) Esiste una conica di $\mathbb{R}^2$ omeomorfa a Z?

Esercizio 3.

Siano

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (2, 0)) \leq 1\},$$

dove d é la distanza euclidea e sia $X = X_1 \cup X_2$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Si consideri su X la seguente relazione di equivalenza:

$$(x, y)R(x', y') \text{ se e solo se } (x, y) = (x', y') \text{ oppure } (x, y), (x', y') \in X_1$$

e siano $Y = X/R$ con la topologia quoziente della topologia euclidea, $p : X \to Y$ la proiezione canonica.

a) Si stabilisca se la proiezione p é aperta (rispett. chiusa).

b) Si stabilisca se lo spazio topologico Y é connesso e quasi compatto.

c) Si stabilisca se esiste un omeomorfismo tra Y e $S^2 \setminus \{\text{punto}\}$, dove S^2 é la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se uno spazio topologico X gode della seguente proprietá P:
per ogni punto $x \in X$ e per ogni chiuso non vuoto $C \subset X$ non contenente x esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 0$ e $f(c) = 1$ per ogni $c \in C$,
allora ogni sottospazio di X gode della proprietá P.

b) Se X e Y sono due sottospazi topologici non vuoti di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ tali che $X \cup Y = \mathbb{R}^n$ e $X \cap Y = \emptyset$, allora se X é connesso, Y non lo é.

c) Se $C \subset \mathbb{R}^2$ é un sottoinsieme chiuso e non vuoto, allora lo spazio topologico quoziente $\mathbb{R}^2/C$ é di Hausdorff.