Università degli Studi di Bologna   C.d.L. Triennale in Matematica
Corso di COMPLEMENTI di ALGEBRA   (Modulo di M.Manaresi)
A.A. 2009/2010

Esercizio 1. Trovare una base di $\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{3}})$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale.
Esercizio 2. Si stabilisca se $i\sqrt[3]{5}$ genera $\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{5})$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 3. Si stabilisca se $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono estensioni semplici di $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Q}(u)$ un sottocampo di $\mathbb{R}$ estensione semplice di $\mathbb{Q}$. E' vero che $\mathbb{Q}(u)$ contiene tutti e soli i numeri reali che si possono scrivere nella forma $a + bu$ con $a, b \in \mathbb{Q}$?
Esercizio 5. Calcolare il grado di trascendenza di $\mathbb{Q}(t, u, v, w)$ su $\mathbb{Q}$, sapendo che $t^2 = 2$, u é trascendente su $\mathbb{Q}(t)$, $v^3 = t + 5$, w é trascendente su $\mathbb{Q}(t, u, v)$.
Esercizio 6. Determinare i gruppi di Galois delle seguenti estensioni, stabilendo se sono ciclici: i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(u)$, con $u = e^{2\pi i/3}$; ii) $\mathbb{Q} \subset L$ dove L é il campo di spezzamento del polinomio $f = x^4 - 3x^2 + 4$; iii) $\mathbb{Q} \subset L$ con L campo di spezzamento del polinomio $f = x^4 - 14x^2 + 9 \in Q[x]$.
Esercizio 7. Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio cubico irriducibile con una sola radice reale e sia u una delle radici non reali. Determinare il gruppo $Gal(\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q})$.
Esercizio 8. i) Scrivere il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^6 - 5$.

ii) Determinare l'ordine del gruppo $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5})/\mathbb{Q})$ e tutte le possibili immagini degli omomorfismi di anelli $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}) \to \overline{\mathbb{Q}}$, dove $\overline{\mathbb{Q}}$ é l'insieme dei numeri algebrici.
Esercizio 9. Determinare i gruppi di Galois dei polinomi $f(x) = x^8 - i$ e $g(x) = x^8 + x^4 + 1$ su $\mathbb{Q}(i)$.
Esercizio 10. Sia $f \in F[x]$ con F campo. Per ciascuno dei polinomi f e dei campi F indicati trovare il campo di spezzamento E di f su F, il gruppo $Gal(E/F)$ ed elencare i campi intermedi $F \subset K \subset E$: a) $x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$; b) $x^3 - 5 \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})[x]$; c) $x^4 - t \in \mathbb{C}(t)[x]$; c) $x^4 - t \in \mathbb{R}(t)[x]$.