ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2016/2017*

Scuola di *Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali*

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica - Curriculum Didattico**

Insegnamento **Elementi di Algebra da un punto di vista superiore**

Docente titolare del corso prof. Mirella Manaresi

Altri docenti partecipanti (modulo)

Data inizio Lezioni *26 settembre 2016*

Data fine Lezioni *22 dicembre 2016*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***26 settembre 2016***

Introduzione al corso: obiettivi, modalita' d'esame, informazioni varie.
Scopi dell'Algebra: generalizzare, riconoscere somiglianze di struttura, formulare e risolvere equazioni. Ruolo delle lettere: costanti, variabili, indeterminate. Incognite e parametri nelle equazioni.
Richiami su funzioni, funzioni iniettive, suriettive, biunivoche e modi per assegnarle.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***28 settembre 2016***

Definizione di operazione binaria interna su un insieme e sue possibili proprietá; strutture algebriche. Esempi: i semigruppi e i monoidi. Elementi invertibili, potenze e loro proprietá, potenze di elementi invertibili. Esempi di monoidi. Gruppi.
Escursus storico sullo sviluppo della teoria dei gruppi e sulla nozione di gruppo astratto.
Il gruppo delle isometrie del piano euclideo.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***30 settembre 2016***

Il gruppo delle isometrie del piano euclideo é costituito da traslazioni, rotazioni intorno a un punto fisso, simmetrie rispetto a una retta, glissosimmetrie. Ricerca del periodo, dei punti fissi, delle rette mutate in sé dalle isometrie.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***3 ottobre 2016***

Il gruppo delle isometrie dello spazio euclideo tridimensionale e' costituito da traslazioni, simmetrie ortogonali rispetto a un piano, composizioni di una simmetria ortogonale rispetto a un piano e una traslazione parallela al piano, rotazioni intorno a una retta, composizione di una rotazioni intorno a una retta con una traslazione parallela alla retta (rototraslazioni), composizione di una simmetria rispetto ad un piano con una rotazione intorno ad una retta ortogonale al piano (rotosimmetrie).
Interpretazione delle trasformazioni ortogonali di R^2 come applicazioni R-lineari di C in sé e uso di tale interpretazione per provare che: la composizione di una riflessione rispetto a una retta L per l'origine con una rotazione di angolo θ in senso antiorario é la riflessione lungo la retta L' ottenuta ruotando L in senso antiorario di un angolo di $\frac{\theta}{2}$; la composizione di due riflessioni é una rotazione.
Il gruppo diedrale D_n.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***5 ottobre 2016***

Seminario della dott. Francesca Giosa su: tavola di moltiplicazione e sottogruppi del gruppo di D_4. Il gruppo D_4 come gruppo delle isometrie del quadrato; il gruppo delle isometrie del rettangolo e del rombo.
Il gruppo delle isometrie di una figura piana. Il gruppo delle isometrie del cerchio, della retta, del poligono regolare di n lati. Il gruppo D_n come sottogruppo di S_n.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***7 ottobre 2016***

Il gruppo Q dei quaternioni. Tutti i sottogruppi di Q sono normali; Q é un gruppo di ordine 8 non abeliano, ma noné isomorfo a D_4.
Richiami sugli anelli unitari. Esempi.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***10 ottobre 2016***

Elementi invertibili e zero divisori di un anello; esempi. Gruppo degli elmenti invertibili di un anello commutativo. Domini di integritá, corpi, campi; esempi. Elementi irriducibili ed elementi primi di un anello commutativo. Caratteristica di un anello. La caratteristica di un dominio d'integritá (in particolare di un campo) o é zero o é un numero primo. Ideali (ideali bilateri) di un anello; esempi. Ideale generato da un elemento; ideale generato da un numero finito di elementi; esempi. Anelli a ideli principali. Intersezione di ideali, somma di ideali; esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***12 ottobre 2016***

L'anello dei polinomi in una variabile a coefficienti in un campo é un anello a ideali principali. Esempi. Ideali primi e ideali massimali; esempi. Omomorfismi di anelli, isomorfismi. Proprietá che si conservano per isomorfismi. Esempi. Un isomorfismo tra anelli induce un isomorfismo tra i gruppi moltiplicativi degli elementi invertibili; applicazioni di questo risultato.
Anelli di funzioni; anelli ottenuti aggiungendo ad un anello la radice di un suo elemento. Somma e prodotto di elementi di $A[\sqrt{d}]$.
Seminario di Federica Mezzogori e Gloria Teggi di richiami di risultati sui gruppi.

Ore 3 (11-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***17 ottobre 2016***

Norma di un elemento di $A[\sqrt{d}]$. L'anello $A[\sqrt{d}]$ é un dominio se e solo se A é un dominio e non vi sono elementi non nulli con norma nulla. Se d é un intero che non é un quadrato, allora $Z[\sqrt{d}]$ é un dominio. Elementi invertibili di $A[\sqrt{d}]$. Se K é un campo, allora $K[\sqrt{d}]$ é un campo se e solo se d non é un quadrato in K. Quadrati e non quadrati in un campo finito.
Escursus storico sullo sviluppo della teoria degli anelli commutativi dai primi tentativi di dimostrazione della congettura di Fermat a Dedekind.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***19 ottobre 2016***

Escursus storico sullo sviluppo della teoria degli anelli commutativi da Dedekind a Lasker, Hilbert, Macaulay. Il contributo di Emmy Noether , di Krull, Atin, van der Waerden.
Lo studio degli anelli non commutativi (Hamilton, Cayley, Pierce, Wedderburn, Jacobson).
Esercizi sugli anelli.

Ore 3 (11-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***24 ottobre 2016***

Richiami sui domini euclidei e sulle loro proprietá: sono anelli a ideali principali, esiste il massimo comun divisore di due leementi ed é un generatore dell'ideale generato dai due elementi, ogni irriducibile é primo, ogni elemento non nullo e non invertibile é prodotto di irriducibili; decomposizione in irriducibili.
I domini $Z[i], Z[\sqrt{2}], Z[\sqrt{-2}]$ sono domini euclidei; i domini $Z[\sqrt{d}]$ con d dispari $d \leq -3$ non sono domini euclidei.
Divisibilitá nell'anello degli interi gaussiani.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***26 ottobre 2016***

Un primo di Z é irriducibile in $Z[i]$ se e solo se non é somma di quadrati in Z, se e solo é congruo a -1 modulo 4. Se un elemento di $Z[i]$ ha come norma un primo, allora é irriducibile. Per ogni elemento irriducibile α di $Z[i]$ esiste un unico primo di Z che é divisibile per α in $Z[i]$. Decomposizione in irriducibili di $Z[i]$. Esempi. Un intero é somma di due quadrati se e solo se nella sua decomposizione in irriducibili ogni primo congruop a -1 modulo 4 compare con esponente pari.
Conclusione del seminario di Gloria Teggi sui gruppi ed esercizi sui gruppi.

Ore 3 (10-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***2 novembre 2016***

Introduzione dei numeri naturali mediante gli assiomi di Peano. Il principio di induzione matematica. Definizione ricorsiva della somma tra numeri naturali e sue proprietá. Definizione ricorsiva della moltiplicazione tra numeri naturali e sue proprietá.
Ordinamento $\leq$ tra numeri naturali e sue proprietá. $(N, \leq)$ é un insieme totalmente ordinato. Differenza di due numeri naturali. Relazioni fra somma, prodotto e $\leq$. Minorante e minimo di un sottoinsieme di N. Principio del minimo. La relazione $\leq$ é un buon ordinamento su N.
Algoritmo euclideo in N. Nozione di divisibilitá tra due naturali. Ordine $|$ su N^* definito attraverso la divisibilitá. $(N^*, |)$ é un insieme parzialmente ordinato. Legami tra gli ordinamenti $\leq$ e $|$.

Ore 3 (11-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***7 novembre 2016***

Soluzione di un esercizio proposto sugli anelli di funzioni. Potenze e multipli di un numero naturale.
Breve cenno sui sistemi di numerazione. Teorema rappresentazione di ogni intero positivo in base a con a naturale maggiore o uguale a due. Criteri di divisibilitá per $2, 3, 4, 5, 11$.
I numeri naturali come cardinali finiti: equipotenza come relazione dequivalenza in ogni insieme dinsiemi; le classi come numeri cardinali. Addizione, moltiplicazione e confronto fra numeri cardinali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***9 novembre 2016***

Insiemi infiniti e insiemi finiti. I numeri naturali come insieme dei cardinali finiti. Gli insiemi euipotenti all'insieme dei numeri naturali si dicono numerabili.
I numeri interi relativi: costruzione di Z a partire dall'insieme dei numeri naturali, definizione di somma e prodotto e verifica delle loro proprietá, ordine su Z, estensione della funzione successivo a tutto Z. L'insieme dei numeri interi é numerabile.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***9 novembre 2016***

Presentazione di un laboratorio PLS di algebra dal titolo Giocare con i numeri, nel quale gli studenti debbono scoprire quali sono i numeri naturali che si scrivono come somme di due quadrati. Si tratta di un problema classico di teoria dei numeri, del quale gli studenti del corso hanno visto la soluzione. Gli studenti liceali, attraverso l'analisi di tabelle di numeri, debbono formulare congetture e cercare di dimostrarle. Le conoscenze loro richieste sono di fatto il solo algoritmo euclideo di divisione. I futuri insegnanti debbono guidare i ragazzi nell'attivita' di scoperta.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Marco Trozzo)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***14 novembre 2016***

I numeri razionali. Costruzione di Q come campo quoziente di Z. Il campo dei numeri razionali é il piú piccolo campo contenente Z come sottoanello.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***16 novembre 2016***

Numerabilitaá dell'insieme dei numeri razionali.
Esercizi su gruppi di isometrie, sottogruppi di Q e di R, algoritmo euclideo di divisione, identitá di Bezout, relazioni d'ordine sull'insieme dei numeri naturali.

Ore 3 (11-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***21 novembre 2016***

Ordine totale sul campo dei numeri razionali: Q con la relazione $\leq$ é un campo ordinato e l'omomorfismo di anelli iniettivo da Z a Q rispetta l'ordinamento. Proprietá di densitá di Q rispetto a $\leq$.
La notazione posizionale dei numeri razionali: i numeri razionali hanno tutti scrittura finita o scrittura periodica rispetto ad un intero $k \geq 2$; ogni scrittura finita o periodica su k cifre é la scrittura posizionale in base k di un numero razionale.
Motivazioni algebriche e geometriche per estendere il campo dei numeri razionali. Assiomi dei numeri reali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***23 novembre 2016***

Costruzione di R attraverso le sezioni di Dedekind di Q. Operazioni di somma e di motiplicazione, relazione d'ordine su R. L'insieme $(R, +, \dot{,} \leq)$ é un campo ordinato che contiene $(Q, +, \dot{,} \leq)$ come sottocampo ordinato.
Correzione di esercizi sulla decomposizione in irriducibili nell'anello degli interi gaussiani e sulla decomposizione in irriducibili in tale anello.

Ore 3 (11-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***28 novembre 2016***

R é un campo ordinato completo. R é un campo archimedeo.
Cenni alla costruzione di Cantor dei numeri reali: successioni convergenti in un campo ordinato K, successioni di Cauchy, campi ordinati Cauchy-completi. Costruzione del completamento secondo Cauchy $\tilde{K}$ di un campo ordinato K e sue proprietá. Se $K = Q$, il campo $\tilde{K}$ é archimedeo.
Un campo ordinato $(\tilde{K}, \leq)$ é comleto se e solo se é Cauchy-completo e archimedeo. Ogni campo archimedeo completo é isomorfo a R.
Scrittura posizionale dei numeri reali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***30 novembre 2016***

I numeri reali sono un'infinitá pič he numerabile. Numeri irrazionali. Numeri algebrici e numeri trascendenti. L'insieme dei polinomi a coefficienti interi ha cardinalitá numerabile. L'insieme A dei numeri reali algebrici é un sottoinsieme proprio di R di cardinalitá numerabile. Con le operazioni indotte da R l'insieme dei numeri reali algebrici A é un campo.
Il campo complesso come estensione di R con l'aggiunta della radice di -1.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***30 novembre 2016***

Introduzione dei numeri reali nella scuola secondaria: possibili presentazioni a seconda del tipo di scuola, problemi e criticitá.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Marco Trozzo)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***7 dicembre 2016***

Interpretazione geometrica della somma di numeri complessi. Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi. Teorema di De Moivre come riformulazione delle formule di addizione per seno e coseno. Interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi. Radici n-esime dell'unitá nel campo complesso. Radici n-esime di un numero complesso: ogni numero complesso non nullo ha esttamente n radici n-esime distinte. Formule per le radici quadrate di un numero complesso.
Non é possibile definire sul campo complesso una relazione d'ordine che lo renda un campo ordinato.
Campi algebricamente chiuso e loro definizioni equivalenti. Teorema fondamentale dell'algebra: il campo complesso é algebricamente chiuso. Radici complesse dei polinomi a coefficienti reali. Il numero delle radici reali di un polinomio a coefficienti reali ha la stessa paritá del suo grado. Numeri algebrici. L'insieme $\bar{Q} = A_C$ dei numeri algebrici é un campo algebricamente chiuso, che non ha dimensione finita su Q.

Ore 3 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***7 dicembre 2016***

Dimostrazione del teorema: ogni campo archimedeo ordinato é isomorfo a un sottocampo di R con un isomorfismo che conserva l'ordine, da cui discende come corollario che ogni campo archimedeo completo é isomorfo a R. Proprietá dell'estremo superiore del campo reale. Ogni campo ordinato che possiede la proprietá dell'estremo superiore é archimedeo ed é isomorfo al campo reale con un isomorfismo che preserva l'ordine.

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***14 dicembre 2016***

Correzione degli esercizi delle ultime due schede distribuite a lezione.

Ore 3 (9-12) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***19 dicembre 2016***

Esercitazione scritta

Ore 3 (9-12) ***Firma***

Luogo (Aula) ***Aula***

Data

Ore ***Firma (Mirella Manaresi)***