Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2017/2018*

Scuola di *Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali*

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica - Curriculum Didattico**

Insegnamento **Elementi di Algebra da un punto di vista superiore**

Docente titolare del corso prof. Mirella Manaresi

Altri docenti partecipanti (modulo)

Data inizio Lezioni *26 settembre 2017*

Data fine Lezioni *20 dicembre 2017*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***26 settembre 2017***

Introduzione al corso: obiettivi, modalita' d'esame, informazioni varie.
Introduzione dei numeri naturali mediante gli assiomi di Peano. Il principio di induzione matematica. Definizione ricorsiva della somma tra numeri naturali e sue proprietá.
Definizione ricorsiva della moltiplicazione tra numeri naturali e sue proprietá.
Ordinamento $\leq$ *tra numeri naturali e sue proprietá.* $(N, \leq)$ *é un insieme totalmente ordinato. Differenza di due numeri naturali. Relazioni fra somma, prodotto e* $\leq$*. Minorante e minimo di un sottoinsieme di* N*.*

Ore 2 (9-11) **Firma** ***(Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***27 settembre 2017***

Principio del minimo. La relazione $\leq$ *é un buon ordinamento su* N*. Negli assiomi di Peano il principio di induzione puo' essere sostituita dalla richiesta dell'esistenza di un buon ordinamento nel quale ogni elemento sia minore o uguale del suo successivo. Successioni definite ricorsivamente.*
Algoritmo euclideo in N*. Nozione di divisibilitá tra due naturali. Ordine* $\mid$ *su* N^* *definito attraverso la divisibilitá.* $(N^*, \mid)$ *é un insieme parzialmente ordinato. Legami tra gli ordinamenti* $\leq$ *e* $\mid$*.*
Potenze e multipli di un numero naturale. Teorema rappresentazione di ogni naturale non nullo in base a *con* a *naturale maggiore o uguale a due.*
I numeri naturali come cardinali finiti: equipotenza come relazione dequivalenza in ogni insieme dinsiemi; le classi come numeri cardinali. Insiemi infiniti e insiemi finiti. I numeri naturali come insieme dei cardinali finiti. Gli insiemi equipotenti all'insieme dei numeri naturali si dicono numerabili.

Ore 2 (9-11) **Firma** ***(Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***28 settembre 2017***

Esercizi su rappresentazione in base a *dei naturali, divisibilitá, criteri di divisibilitá, relazioni d'ordine sui naturali.*

Ore 1 (12-13) **Firma** ***(Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***3 ottobre 2017***

Addizione, moltiplicazione e confronto fra numeri cardinali.
I numeri interi relativi: costruzione di Z *a partire dall'insieme dei numeri naturali, definizione di somma e prodotto e verifica delle loro proprietá, ordine su* Z*, estensione della funzione successivo a tutto* Z*.*
Richiami sugli anelli: dominio di integritá, elementi irriducibili ed elementi primi, elementi associati, divisibilitá.
Algoritmo euclideo della divisione.

Ore 2 (9-11) **Firma** ***(Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***5 ottobre 2017***

Divisibilitá tra interi. Numeri primi. Decomposizione di ogni intero ≥ 2 in potenze di prodotti di primi distinti. Massimo comun divisore di due interi e di un numero finito di interi. Interi relativamente primi. Identitá di Bezout e alcune sue conseguenze. I coefficienti di Bezout non sono univocamente determinati.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***10 ottobre 2017***

Unicitá della decomposizione di un intero in fattori primi. L'algoritmo euclideo permette di calcolare il massimo comun divisore tra due interi senza decomporli in potenze di primi. Calcolo dei coefficienti di Bezout. Esempi.
Equazioni diofantee: condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni. Congruenze. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***11 ottobre 2017***

L'insieme dei numeri interi é numerabile.
Invito agli studenti a riguardare i seguenti argomenti: classi di resto, elementi invertibili e zero divisori di Z_m, piccolo teorema di Fermat, funzione di Eulero, teorema di Eulero.
I numeri razionali. Costruzione di Q come campo quoziente di Z. Il campo dei numeri razionali é il piú piccolo campo contenente Z come sottoanello. Ordine totale sul campo dei numeri razionali: Q con la relazione $\leq$ é un campo ordinato e l'omomorfismo di anelli iniettivo da Z a Q rispetta l'ordinamento.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***12 ottobre 2017***

Proprietá di densitá di Q rispetto a $\leq$.
La notazione posizionale dei numeri razionali: i numeri razionali hanno tutti scrittura finita o scrittura periodica rispetto ad un intero $k \geq 2$. Esempi.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***17 ottobre 2017***

Un numero razionale a/b con $a, b \in Z, a, b > 0, (a, b) = 1$ ha scrittura finita in base k se e so o se ogni fattore primo di b divide k. Ogni scrittura finita o periodica su k cifre é la scrittura posizionale in base k di un numero razionale.
Esercizi sul campo dei numeri razionali.
Risultati preliminari alla dimostrazione che il campo dei numeri razionali é numerabile.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***18 ottobre 2017***

Il campo dei numeri razionali é numerabile.
Motivazioni algebriche e geometriche per estendere il campo dei numeri razionali. Assiomi dei numeri reali. Costruzione dei numeri reali attraverso le sezioni di Dedekind di Q. Operazioni di somma e di motiplicazione, relazione d'ordine su R. Verifica che la somma é associativa e commutativa ed esistenza dell'elemento neutro.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***19 ottobre 2017***

L'insieme $(R, +, \dot{;}\ \leq)$ é un campo ordinato che contiene $(Q, +, \dot{;} \leq)$ come sottocampo ordinato. Q é denso nel campo dei numeri reali. R é un campo archimedeo. Ogni sottocampo ordinato di R é archiemedeo.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***23 ottobre 2017***

R é un campo ordinato completo.
Cenni alla costruzione di Cantor dei numeri reali. Successioni convergenti in un campo ordinato K, successioni di Cauchy, campi ordinati Cauchy-completi. Costruzione del completamento secondo Cauchy $\tilde{K}$ di un campo ordinato K e sue proprietá. Se $K = Q$, il campo $\tilde{K}$ é archimedeo.
Un campo ordinato $(\tilde{K}, \leq)$ é completo se e solo se é Cauchy-completo e archimedeo. I reali costruiti con le sezioni di Dedekind e i reali costruiti con la costruzione di Cantor sono campi ordinati isomorfi.
Ogni campo ordinato archimedeo é isomorfo a un sottocampo di R con un isomorfismo che conserva l'ordine.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***24 ottobre 2017***

Ogni campo ordinato archimedeo completo é isomorfo a R. Proprietá dell'estremo superiore. Il campo reale ha la proprietá dell'estremo superiore. Ogni campo ordinato con la proprietádell'estremo superiore é isomorfo a R con un isomorfismo che preserva l'ordine.
Scrittura posizionale dei numeri reali. Numeri irrazionali. I numeri reali sono un'infinitá pič̌he numerabile.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***31 ottobre 2017***

Anelli ottenuti aggiungendo ad un anello la radice di un suo elemento. Somma e prodotto di elementi di $A[\sqrt{d}]$. Norma di un elemento di $A[\sqrt{d}]$.
L'anello $A[\sqrt{d}]$ é un dominio se e solo se A é un dominio e non vi sono elementi non nulli con norma nulla. Se d é un intero che non é un quadrato, allora $Z[\sqrt{d}]$ é un dominio. Elementi invertibili di $A[\sqrt{d}]$. Se K é un campo, allora $K[\sqrt{d}]$ é un campo se e solo se d non é un quadrato in K. Quadrati e non quadrati in un campo finito.
Il campo complesso come estensione di R con l'aggiunta della radice di -1. Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi. Enunciato del Teorema di De Moivre.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***2 novembre 2017***

Formule di addizione per seno e coseno. Dimostrazione del Teorema di De Moivre come riformulazione delle formule di addizione per seno e coseno. Interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi.
Radici n-esime dell'unitá nel campo complesso. Radici n-esime di un numero complesso: ogni numero complesso non nullo ha esttamente n radici n-esime distinte. Formule per le radici quadrate di un numero complesso.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***6 novembre 2017***

Seminario del prof. Marco Trozzo sull'introduzione dei numeri reali nella scuola secondaria.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***7 novembre 2017***

Non é possibile definire sul campo complesso una relazione d'ordine totale che lo renda un campo ordinato.
Numeri algebrici e numeri trascendenti. Se $u \in C$ é trascendente, allora $Q[u]$ é isomorfo a $Q[x]$, se u é algebrico, allora $Q(u) = Q[u]$ é isomorfo a $Q[x]/(p_u)$ dove p_u é il polinomio minimo di u. Esempi ed esercizi.
L'insieme $Z[x]$ dei polinomi a coefficienti interi é numerabile. L'insieme A_R dei numeri reali algebrici é numerabile. L'insieme dei numeri trascendenti é piú che numerabile.
L'opposto e l'inverso di un elemento non nullo $u \in A_R$ sono algebrici.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***9 novembre 2017***

L'insieme A_R dei numeri reali algebrici é un Q-sottospazio vettoriale di R di dimensione non finita su Q.
Campi algebricamente chiusi e loro caratterizzazioni. Un campo algebricamente chiuso é infinito.
Prima parte della dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra: Il campo dei numeri complessi é algebricamente chiuso.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***13 novembre 2017***

Seconda parte della dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. Richiami sulla molteplicitá delle radici di unpolinmio a coefficienti in un campo. Conseguenze del teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio a coefficienti complessi si decompone in un prodotto di fattori lineari, un polinomio f a coefficienti complessi ammette esattamente $\deg f$ radici se contate con molteplicitá.
L'insieme A_C dei numeri algebrici é un campo algebricamente chiuso che contiene il campo Q e non é finitamente generato su Q. A_C si chiama chiusura algebrica di Q.
Se un polinomio a coefficienti reali f ha una radice complessa α di molteplicitá n allora ha anche il coniugato di α é radice di f di molteplicitá n. Il numero delle radici reali di un polinomio reale ha la stessa paritá del grado di f. Un polinomio a coefficienti reali di grado positivo si decompone nel prodotto di fattori lineari e di fattori quadratici con discriminante negativo. Esempio: decomposizione in irriducibili di $R[x]$ del polinomio $x^4 + 1$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***14 novembre 2017***

Esercizi su numeri complessi, numeri algebrici, estensioni del campo dei numeri razionali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***16 novembre 2017***

Derivata di un polinomio e sue proprietá. Derivata di un polinomio e radici multiple. Formula di Taylor per un polinomio.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***21 novembre 2017***

Metodo di Newton per la determinazione delle radici dei polinomi reali. Teorema di Fourier Budan. Esempi. Teorema di Rolle per i polinomi reali. Regola dei segni di Cartesio. Esempi. Successione di Sturm per un polinomio reale. Teorema di Sturm. Esempi e confronto tra le informazioni ottenibili dal teorema di Fourier-Budan, dalla regola di Cartesio e dal teorema di Sturm.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***22 novembre 2017***

Richiami sui domini euclidei e sulle loro proprietá: sono anelli a ideali principali, esiste il massimo comun divisore di due elementi ed é un generatore dell'ideale generato dai due elementi, ogni elemento non nullo e non invertibile é prodotto di irriducibili; decomposizione in irriducibili.
I domini $Z[i], Z[\sqrt{2}], Z[\sqrt{-2}]$ sono domini euclidei; i domini $Z[\sqrt{d}]$ con d dispari $d \leq -3$ non sono domini euclidei.
Divisibilitá nell'anello degli interi gaussiani. Se un elemento di $Z[i]$ ha come norma un primo, allora é irriducibile.
Un primo di Z é irriducibile in $Z[i]$ se e solo se non é somma di quadrati in Z, se e solo é congruo a -1 modulo 4.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***23 novembre 2017***

Il prodotto di tutti gli elementi di un campo finito é uguale a -1. Un campo finito K di ordine q con q dispari contiene una radice quadrata di -1 se e solo se q é congruo a 1 modulo 4. Un primo dispari p é congruo a 1 modulo 4 se e solo se esiste un intero n tale che p divide n^2+1. Un primo di Z é irriducibile in $Z[i]$ se e solo se é congruo a -1 modulo 4. Per un primo p congruo a 1 modulo 4 esiste una e una sola coppia di interi positivi $0 < b < a$ tali che $p = a^2 + b^2$.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***28 novembre 2017***

Per ogni elemento irriducibile α di $Z[i]$ esiste un unico primo di Z che é divisibile per α in $Z[i]$. Decomposizione in irriducibili di $Z[i]$. Esempi. Un intero é somma di due quadrati se e solo se nella sua decomposizione in irriducibili ogni primo congruop a -1 modulo 4 compare con esponente pari. Esempi ed esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***29 novembre 2017***

Esercizi sugli interi gaussiani, l'algoritmo euclideo in $Z[i]$, la decomposizione in irriducibili.
Elementi primi ed elementi irriducibili di un dominio. In un dominio ogni elemento primo é irriducibile, ma non vale il viceversa. Domini a fattorizzazione unica (UFD), domini a ideali principali (PID), domini euclidei. Esempi.
I domini $Z[x]$ e $K[x_1, \cdots, x_n]$ sono UFD ma non PID.
In un UFD ogni irriducibile é primo. Esempi

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***30 novembre 2017***

Se A é un dominio in cui ogni irrducibile é primo e ogni elemento non invertibile é prodotto di irriducibili, allora A é un UFD. Massimo comun divisore di due elementi in un UFD e in un PID. Ideali massimali e ideali primi in un PID e in un UFD.
Ripasso sulle trasformazioni ortogonali di R^2.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***5 dicembre 2017***

Interpretazione delle trasformazioni ortogonali di R^2 come applicazioni R-lineari di C in sé e uso di tale interpretazione per provare che: la composizione di una riflessione rispetto a una retta L per l'origine con una rotazione di angolo θ in senso antiorario é la riflessione lungo la retta L' ottenuta ruotando L in senso antiorario di un angolo di $\frac{\theta}{2}$; la composizione di due riflessioni é una rotazione.
Gruppo delle isometrie di una figura piana.
Il gruppo diedrale D_n. Tavola di moltiplicazione del gruppo di D_4. Il gruppo D_4 come gruppo delle isometrie del quadrato.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***6 dicembre 2017***

Il gruppo D_n come sottogruppo del gruppo simmetrico S_n. Sottogruppi di $D-n$.
Il gruppo delle isometrie del piano euclideo é costituito da traslazioni, rotazioni intorno a un punto fisso, simmetrie rispetto a una retta, glissosimmetrie. Ricerca dei punti fissi, delle rette mutate in sé dalle isometrie.
Richiami sulle trasformazioni ortogonali di R^3. Isometrie dello spazio euclideo tridimensionale. Punti fissi ed elementi uniti di un'isometria dello spazio.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***7 dicembre 2017***

Il gruppo delle isometrie dello spazio euclideo tridimensionale e' costituito da traslazioni, simmetrie ortogonali rispetto a un piano, composizioni di una simmetria ortogonale rispetto a un piano e una traslazione parallela al piano, rotazioni intorno a una retta, composizione di una rotazioni intorno a una retta con una traslazione parallela alla retta (rototraslazioni), composizione di una simmetria rispetto ad un piano con una rotazione intorno ad una retta ortogonale al piano (rotosimmetrie).
Esercizi sulle isometrie del piano e sul gruppo D_4.

Ore 1 (9-10) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***12 dicembre 2017***

Esercizi sulle isometrie dello spazio.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***13 dicembre 2017***

Il gruppo Q dei quaternioni. Tutti i sottogruppi di Q sono normali; Q é un gruppo di ordine 8 non abeliano, ma noné isomorfo a D_4. Classificazione dei gruppi finiti di odine minore o uguale a 8. Un gruppo finito di ordine otto é isomorfo ad uno e uno solo dei seguenti gruppi: $Z_8, Z_4 \times Z_2, Z_2 \times Z_2 \times Z_2, D_4 Q$.
Correzione di esercizi delle prove di esame e dei fogli distribuiti agli studenti.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***14 dicembre 2017***

Correzione di esercizi delle prove di esame e dei fogli distribuiti agli studenti.
Richiami sui campi finiti.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***18 dicembre 2017***

Seminario del prof. Marco Trozzo sul Laboratorio PLS: Giocare con i numeri..

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***