Università degli Studi di Bologna — A.A. 2011/2012

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Esercitazione scritta — 9. 11. 2011 — A

Esercizio 1.[6 + 2 punti]

a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + hx_4 = 1 \\ x_1 + (h+2)x_2 - x_3 + 2hx_4 = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h.

b) Fissato un valore di h per cui il sistema é risolubile, la somma di due diverse soluzioni del sistema é ancora una soluzione del sistema?

Esercizio 2.[4 + 3 punti]

a) Si determini l'insieme dei vettori $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori colonna v_1, v_2, v_3, v_4 della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Il vettore nullo $(0, 0, 0, 0)$ puó essere scritto come combinazione lineare dei vettori v_2, v_3, v_4 a coefficienti non tutti nulli?

Esercizio 3.[3 punti]

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino tutte le matrici $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che $M \cdot A = A \cdot {}^tM$. Tali matrici sono tutte invertibili?

Esercizio 4.[4 punti]

Siano $B = (\, b_1 \quad b_2 \cdots \quad b_n \,) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $C = (\, c_1 \quad c_2 \cdots \quad c_n \,) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$. Si provi che se $n > 1$ la matrice ${}^tB \cdot C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ha determinante nullo qualunque siano $B, C \in M_{1,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ di versori i, j, k, si considerino i vettori $u = 3i + 2j - k$, $v = 2i - j + k$, $w_a = ai + j - 2k$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che w_a sia ortogonale ai vettori u e v?

b) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che i vettori u, v, w_a siano complanari?

c) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che il vettore w_a sia parallelo al vettore $u \wedge (u - 2v)$?

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2011/2012

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Esercitazione scritta — 9. 11. 2011 — B

Esercizio 1.[6 + 2 punti]

a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + (h+2)x_2 + x_3 + 2hx_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + hx_4 = -1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h.

b) Fissato un valore di h per cui il sistema é risolubile, la somma di due diverse soluzioni del sistema é ancora una soluzione del sistema?

Esercizio 2.[4 + 3 punti]

a) Si determini l'insieme dei vettori $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori colonna v_1, v_2, v_3, v_4 della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Il vettore nullo $(0, 0, 0, 0)$ puó essere scritto come combinazione lineare dei vettori v_2, v_3, v_4 a coefficienti non tutti nulli?

Esercizio 3.[3 punti]

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino tutte le matrici $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che $M \cdot A = A \cdot {}^tM$. Tali matrici sono tutte invertibili?

Esercizio 4.[4 punti]

Siano $B = (\, b_1 \quad b_2 \cdots \quad b_n \,) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $C = (\, c_1 \quad c_2 \cdots \quad c_n \,) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$. Si provi che se $n > 1$ la matrice ${}^tB \cdot C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ha determinante nullo qualunque siano $B, C \in M_{1,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.[3 + 2 + 3 punti]

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ di versori i, j, k, si considerino i vettori $u = 2i + 3j - k$, $v = -i + 2j + k$, $w_a = i + aj - 2k$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che w_a sia ortogonale ai vettori u e v?

b) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che i vettori u, v, w_a siano complanari?

c) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che il vettore w_a sia parallelo al vettore $u \wedge (u + 2v)$?