Corso di Laurea Triennale in Matematica   Corso di ALGEBRA I A.A. 2009/10

Foglio I

Esercizi da: A. Vistoli – NOTE DI ALGEBRA, Bologna 2003/04

1) Dimostrare per induzione le seguenti affermazioni:

a) Se a è un numero reale positivo e n è un intero più grande di 1, allora $(1+a)^n > 1+na$.

b) Se n è un intero positivo, allora

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\dots+\frac{n}{2^n} = 2-\frac{n+2}{2^n}.$$

c) La somma dei quadrati dei primi n numeri naturali dispari è uguale a

$$\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

d) Se q è un numero reale diverso da 1, allora

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = 1+2q+3q^2+\dots+nq^{n-1} = \frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}.$$

e) Se n è un intero positivo, allora

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

In ciascun caso, cercate anche di trovare una dimostrazione più illuminante, che spieghi *perché* la formula vale.

2) Risolvere l'esercizio 1a) di nuovo, usando i coefficienti binomiali invece dell'induzione.

3) Se a, b e c sono interi diversi da 0, allora esistono due interi s e t in $\mathbb{Z}$ tali che $sa+tb = c$ se e solo se (a,b) divide c.

4) Siano a e b sono interi non nulli, e sia $d = (a,b)$. Se s e t in $\mathbb{Z}$ sono tali che $sa + tb = d$, allora $(s,t) = 1$.

5) Siano a e b due interi non nulli, e sia $d = (a,b)$. Far vedere che $(a/d,b/d) = 1$.