Università di Bologna - Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di GEOMETRIA 3 A.A. 2019/20 - N2

1. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica con p autovalori positivi e q autovalori negativi, con $p \geq 1, q \geq 1, p+q=3$. Si provi che $X = \{x \in R^3 \mid {}^t x A x = 1\}$ é diffeomorfa a $S^{p-1} \times R^q \subset R^3$ (dove $S^{p-1} = \{x \in R^p \mid ||x|| = 1\}$).

2. Si considerino le quadriche

$$Q_1 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid 6xz+8yz-5x = 0\},\ Q_2 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid 6xz+8yz-5 = 0\}.$$

   a) Si scriva la forma canonica euclidea di Q_1 e Q_2 e si stabilisca se esiste un'isometria che porta una quadrica nell'altra.
   b) Si scriva un'isometria che porta Q_2 nella sua forma canonica euclidea.
   c) Si stabilisca se Q_1 e Q_2 sono superfici di rotazione e/o superfici rigate.

3. Sia $(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (u, v, uv)$ una parametrizzazione del paraboloide iperbolico $S = \{(x,y,z) \in R^3 \mid z = xy\}$ e sia $\gamma(t) = (t,t,t^2)$ una curva di S.

   a) Si determini la lunghezza dell'arco di γ per $0 \leq t \leq 1$.
   b) Si determini l'angolo formato dalla curva γ con la curva $\alpha(t) = (-2t, t, -2t^2)$.
   c) Si calcoli l'area della regione

$$R = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S \mid u > 0,\ v > 0,\ u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

4. Sia $S = \{(x,y,z) \in R^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2}\}$ e sia $\alpha(t) = (t\cos t, t\,sen\,t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   a) Si calcoli la lunghezza di $\alpha(t)$.
   b) Si calcoli l'area della regione di S con $1 \leq z \leq 2$.
   c) Si stabilisca se le curve coordinate della parametrizzazione di S definita da $(x,y,z) = (u\cos v, u\,sen v, u)$ con $u > 0$, $0 < v < 2\pi$, sono tra loro ortogonali in ogni punto.

5. Si calcoli la prima forma fondamentale del cono di vertice l'origine e che interseca il piano $z=1$ nell'ellisse di equazioni $\begin{cases} z = 1 \\ (x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 1 \end{cases}$.

6. Si determini la prima forma fondamentale della sfera unitaria di R^3 nella parametrizzazione ottenuta grazie alla proiezione stereografica dal polo nord.

7. Sia $\gamma : R \to R^3$ definita da $\gamma(v) = (\cosh v, 0, v)$ una parametrizzazione della *catenaria* e sia S la *catenoide* ottenuta facendo ruotare la catenaria intorno all'asse z.

   a) Si parametrizzi γ secondo la lunghezza d'arco.

b) Si scriva una parametrizzazione σ della catenoide e se ne calcoli la prima forma fondamentale.

c) Fissato $r \in R$, si consideri la curva $\alpha = \sigma(t, rt)$ e si calcoli la lunghezza di α tra $t = 0$ e t.

8. Sia $S \subset R^3$ una superficie regolare con parametrizzazione locale $\sigma(u, v)$ i cui coefficienti metrici soddisfino $E = G = 1$ e $F = 0$ in tutti i punti. Si mostri che le v-curve coordinate tagliano su ogni u-curva coordinata segmenti di uguale lunghezza.

9. Si determini la prima forma fondamentale del piano xy privato dell'origine, parametrizzato secondo le coordinate polari.

10. Siano
$$S_1 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ 0 < z < 1\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0\},$$
sia $h : (0, 1) \to R_{>0}$ un'applicazione differenziabile strettamente crescente, sia $\Phi : S_1 \to S_2$ l'applicazione definita da
$$\Phi(x, y, z) = h(z)\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, 1\right).$$

a) Provare che Φ é un'applicazione differenziabile.

b) Si stabilisca se é possibile determinare h in modo che l'applicazione Φ trasformi i meridiani di S_1 in curve di lunghezza finita di S_2

c) Si stabilisca se é possibile scegliere h in modo che Φ sia un'isometria locale.

11. Siano $\alpha, \beta : R \to R^3$ le traiettorie, parametrizzate secondo la lunghezza d'arco, di due punti che si muovono soggetti alle seguenti condizioni:

i) α parte da $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ e si muove lungo l'asse x nel verso positivo,

ii) β parte da $\beta(0) = (0, a, 0)$ con $a \neq 0$ e si muove parallelamente al verso positivo dell'asse z.

Si indichi con $S \subset R^3$ l'unione, al variare di $t \in R$, delle rette passanti per $\alpha(t)$ e $\beta(t)$.

a) Si mostri che S é una superficie regolare.

b) per ogni punto $P \in S$ si determini $T_P S$.

c) Si dimostri che S é una superficie orientabile.