

Università di Bologna - Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di GEOMETRIA 3    A.A. 2019/20 - N 4

1. Siano  $X$  e  $Y$  due campi di vettori paralleli lungo una curva  $\alpha : I \rightarrow S$ . Allora  $\langle X, Y \rangle$  é costante. In particolare  $|X|$  e  $|Y|$  sono costanti e l'angolo fra  $X(t)$  e  $Y(t)$  é costante.
2. Sia  $T$  il toro generato dalla rotazione della circonferenza  $(x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0$ , con  $0 < r < R$  intorno all'asse  $z$ . I paralleli generati dai punti  $(R + r, 0), (R - r, 0), (R, r)$  sono detti parallelo massimo, minimo, superiore rispettivamente. Si stabilisca quali di questi paralleli é
  - a) una geodetica,
  - b) una linea di curvatura.
  - c) Si calcoli la curvatura geodetica del parallelo superiore.
3. Sia  $S$  una superficie regolare,  $C$  una curva di  $S$ .
  - a) Si provi che se  $C$  é sia una linea di curvatura sia una geodetica, allora  $C$  é una curva piana.
  - b) Si provi che se una geodetica che non é una retta é una curva piana, allora é una linea di curvatura.
  - c) Si dia un esempio di linea di curvatura che é una curva piana e non é una geodetica.
4. Si provi che una curva regolare  $C \subset S$  é contemporaneamente una curva asintotica e una geodetica se e solo se é un segmento di retta.
5. Sia  $S$  la superficie di equazione  $z = xy$ . Si scrivano le equazioni di una geodetica per il punto  $P = (1, 1, 1)$ .
6. Si determinino i simboli di Christoffel del piano con le coordinate polari.
7. Si provi che l'applicazione  $H \rightarrow H$  che a  $(u, v)$  associa  $(-\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2})$  é un'isometria del semipiano iperbolico.
8. Si provi che le geodetiche del semipiano iperbolico sono tutte e sole le rette verticali e le semicirconferenze con centro sull'asse delle ascisse.