Università degli Studi di Bologna **A.A. 2011/2012**
C.d.L. in Matematica **Corso di GEOMETRIA I**
Prova intermedia **17. 2. 2012** **A**

1. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 3 \\ 0 & 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$, dove k é un parametro reale. Sia $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_k \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

   a) Si determini il rango di A_k al variare di k in $\mathbb{R}$.
   b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f_k non é un isomorfismo, si determini una base e un sistema di equazioni cartesiane di $Ker f_k$ e di $Im f_k$.
   c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f_k non é un isomorfismo, si determini un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$ tale che risulti $V \bigoplus Ker f_k = \mathbb{R}^4$.
   d) Nel caso $k = 3$ si determinino le soluzioni del sistema lineare

$$A_3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

   e) Nel caso $k = 3$ si determinino le equazioni cartesiane del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dalle righe della matrice A_3.

2. Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ siano α, β, γ i piani di equazioni

$$\alpha: \quad x - 2y + 3z = 0,$$

$$\beta: \quad x - z + 1 = 0,$$

$$\gamma: \quad hx + y + (h-3)z + 2h = 0,$$

con h parametro reale, siano r, s le rette: $r = \alpha \cap \beta, \quad s_h = \gamma \cap \{z = 0\}$.

   a) Si stabilisca se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali i tre piani formano fascio.
   b) Si determini la retta per $P = (1, 2, 0)$ e parallela alla retta r.
   c) Si stabilisca se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali la retta r é parallela al piano γ.

d) Si stabilisca se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali le rette r ed s_h sono sgembe.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, sia

$$V := \{M \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \quad | \quad A \cdot M = M \cdot A\}.$$

a) Si calcoli la dimensione dello spazio vettoriale V e se ne determini una base.

b) Si stabilisca se V contiene matrici invertibili e se queste formano un sottospazio vettoriale di V.