Università degli Studi di Bologna **A.A. 2011/2012**
C.d.L. in Matematica **Corso di GEOMETRIA I**
II Prova parziale **30. 5. 2012** **A**

1. Siano

$$V_1 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_3 = 0\},$$
$$V_2 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{F \in End(\mathbb{R}^4) \,|\, F(V_1) \subset V_2,\ F(V_2) \subset V_1\}.$$

2. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$, dove k é un parametro reale.

Si determini la forma canonica di Jordan di A_k al variare di k.

3. Sia $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica e la forma quadratica associate canonicamente a M.

Siano

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 2z\},$$
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0\},$$
$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, q(x, y, z) = 1\}.$$

a) Si stabilisca se b é degenere e in caso affermativo se ne determini il radicale.

b) Si determini una base ortogonale di U rispetto a b.

c) Si stabilisca se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ che ristretto a U coincide con b.

d) Si stabilisca se esiste un'affinitá di $\mathbb{R}^3$ che porta $Q \cap H$ nella conica di equazioni $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

4. Siano

$\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 1\}, \qquad \Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - z = 2\},$

$r_1 = \begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases}, \quad r_2 = \begin{cases} x + z = 0, \\ y = 1 \end{cases}.$

Si determini un'affinitá $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(\Pi_1) = \Pi_2$ e $F(r_1) = r_2$.