Università degli Studi di Bologna **A.A. 2012/2013**
C.d.L. in Matematica **Corso di GEOMETRIA I**
Esercitazione scritta **7. 11. 2012** **A**

Esercizio 1.
Si determinino le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + (4-2h)x_3 + x_4 = 3 + h \\ hx_1 + x_2 + (1+h^2)x_3 + (1+h^2)x_4 = 1 + 2h \end{cases}$$

al variare del parametro reale h.

Esercizio 2.
Sia $A \in M_4(\mathbb{R})$ la matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z, w che ha tra le sue soluzioni la quaterna $(1, 2, 1, 3)$.

a) Se la matrice A é ridotta per righe, qual é il massimo numero di righe non nulle di A?

b) Si dia un esempio di sistema lineare omogeneo in tre incognite che ha tra le sue soluzioni $(1, 2, 1, 3)$ e $(1, 1, 1, 1)$.

Esercizio 3.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $AM + kM = B$ e se per tali valori di k la matrice M é univocamente determinata.

b) Per $k = 1$ si determini esplicitamente M.

Esercizio 4.
Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Provare o confutare le seguenti affermazioni.

a) Se A é invertibile, allora A^i é invertibile per ogni intero $i > 0$.

b) Se $A^2 = B^2$ e $AB = BA$, allora $A = B$.

c) Se $A^2 = B^2$, allora $A \neq 0$ se e solo se $B \neq 0$.

Esercizio 5.

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ di versori i, j, k, si considerino i vettori $u = 3i + 2j - k$, $v = 2i - j + k$, $w_a = ai + j - 2k$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che w_a sia ortogonale ai vettori u e v?

b) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che i vettori u, v, w_a siano complanari?

c) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che il vettore w_a sia parallelo al vettore $u \wedge (u - 2v)$?