Teorema di Kronecker (o teorema degli orlati)

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia M una sottomatrice $h \times h$ di A tale che:

i) $\det M \neq 0$

ii) "orlando" M con una qualunque riga e una qualunque colonna di A si ottiene una sottomatrice $(h+1) \times (h+1)$ di A con determinante $= 0$.

Allora:

1) le colonne di A che intervengono in M sono linearmente indipendenti,

2) le colonne di A che non intervengono in M sono combinazioni lineari di colonne di A che intervengono in M,

3) rango di $A = h$.

Per dimostrare questo risultato utilizziamo due lemmi

Lemma 1

Siano $v_1, \dots, v_s \in K^m$ vettori linearmente indipendenti e siano $w_1, \dots w_s \in K^n$ con $n > m$ vettori tali che le componenti di v_i (per $i = 1, \dots, s$) coincidono con le prime m componenti di w_i.

Allora $w_1, \dots w_s$ sono vettori linearmente indipendenti di K^n

DIM

Siano $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{pmatrix}, \dots, v_s = \begin{pmatrix} v_{1s} \\ \vdots \\ v_{ms} \end{pmatrix} \in K^m$

e $w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots \; w_s = \begin{pmatrix} w_{1s} \\ \\ w_{ns} \end{pmatrix} \in K^n$

con $w_{ij} = v_{ij}$ $\quad \forall\ 1 \le i \le m$

Se $w_1, \dots, w_s$ fossero linearmente dipendenti, allora esisterebbero $h_1, \dots h_s \in K$ non tutti nulli t.c.

$h_1 w_1 + \dots + h_s w_s = 0$ ovvero

$$\begin{cases} h_1 w_{11} + \dots + h_s w_{1s} = 0 \\ \vdots \\ h_1 w_{m1} + \dots + h_s w_{ms} = 0 \\ \vdots \\ h_1 w_{n1} + \dots + h_s w_{ns} = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto del fatto che $w_{ij} = v_{ij}$ $\forall\ 1 \le i \le m$, si ha

$$\begin{cases} h_1 v_{11} + \dots + h_s v_{1s} = 0 \\ \vdots \\ h_1 v_{m1} + \dots + h_s v_{ms} = 0 \\ h_1 w_{m+1\,1} + \dots + h_s v_{m+1\,s} = 0 \\ \vdots \\ h_1 w_{n1} + \dots + h_s w_{ns} = 0 \end{cases}$$

Ma $v_1, \dots v_s$ sono linearmente indipendenti, quindi dalle prime m equazioni del sistema segue che $h_1 = \dots = h_s = 0$ contro l'ipotesi che $h_1, \dots h_s$ siano non tutti nulli.

☒

N.B Nella situazione del Lemma 1

$w_1, \dots w_s$ linearmente indipendenti $\not\Rightarrow$ $v_1, \dots v_s$ linearmente indipendenti

Es: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

w_1, w_2 sono linearmente indipendenti

v_1, v_2 sono linearmente dipendenti.

Lemma 2

Sia $B \in M_{h+1}(K)$ una matrice $(h+1)\times(h+1)$ le cui colonne siano combinazione lineare di h vettori dati.

Allora $\det B = 0$

DIM

Siano $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{h+1\,1} \end{pmatrix}, \dots, v_h = \begin{pmatrix} v_{1h} \\ \\ v_{h+1\,h} \end{pmatrix} \in K^{h+1}$

e sia
$$B = \left(\sum_{i_1=1}^{h} \alpha_{i_1} v_{i_1} \quad \dots \quad \sum_{i_{h+1}=1}^{h} \alpha_{i_{h+1}} v_{i_{h+1}} \right).$$

Allora
$$\det B = \sum_{i_1=1}^{h} \alpha_{i_1} \det\left(v_{i_1} \ \sum_{i_2=1}^{h} \alpha_{i_2} v_{i_2}, \dots, \sum_{i_{h+1}} \alpha_{i_{h+1}} v_{i_{h+1}} \right)$$
$$= \sum_{i_1=1}^{h} \dots \sum_{i_{h+1}=1}^{h} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{h+1}} \det\left(v_{i_1} \ \dots \ v_{i_{h+1}} \right) = 0$$

perché $v_{i_1}, \dots, v_{i_{h+1}} \in \{ v_1, \dots, v_h \}$ quindi due colonne sono uguali ∎

DIM del teorema di Kronecker

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ e sia M la sottomatrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ \vdots & & \\ a_{h1} & & a_{hh} \end{pmatrix}$$

(1) Essendo $\det M \neq 0$ le colonne $C_1^M \dots C_h^M$ della matrice M sono linearmente indipendenti. Allora le colonne $C_1, \dots, C_h$ di A sono linearmente indipendenti per il lemma 1.

(2) Consideriamo il sistema lineare
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1h} x_h = a_{1\,h+1} \\ \\ a_{h1} x_1 + \dots + a_{hh} x_h = a_{h\,h+1} \end{cases}$$
la cui matrice dei coefficienti è M.

Essendo $\det M \neq 0$ il sistema ammette $1!$ soluzione $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_h \end{pmatrix}$ per la quale vale

$$h_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{h1}\end{pmatrix}+ \dots + h_h\begin{pmatrix}a_{1h}\\ \vdots \\ a_{hh}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1\,h+1}\\ \vdots\\ a_{h\,h+1}\end{pmatrix}$$

ossia la colonna $\begin{pmatrix}a_{1\,h+1}\\ \vdots\\ a_{h\,h+1}\end{pmatrix}$ è combinazione lineare

delle colonne $\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{h1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}a_{1h}\\ \vdots\\ a_{hh}\end{pmatrix}$,

Se fosse $h=m$ il punto (2) sarebbe provato, ma in generale $m>h$.

Vogliamo provare che

$$h_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{h1}\\ a_{h+1\,1}\end{pmatrix}+ \dots + h_h\begin{pmatrix}a_{1h}\\ \vdots \\ a_{hh}\\ a_{h+1\,h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1\,h+1}\\ \vdots\\ a_{h\,h+1}\\ a_{h+1\,h+1}\end{pmatrix}$$

Basta provare che $\displaystyle\sum_{j=1}^{h} h_j\, a_{h+1\,j} = a_{h+1\,h+1}$

Poniamo $\displaystyle C := \sum_{j=1}^{h} h_j\, a_{h+1\,j}$ e dobbiamo provare che

$$C = a_{h+1,\,h+1}$$

Consideriamo due matrici ausiliarie

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} & a_{1\,h+1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{h1} & & a_{hh} & \vdots\\ a_{h+1\,1} & \dots & & a_{h+1\,h+1}\end{pmatrix} \qquad M'' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} & a_{1\,h+1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{h1} & & a_{hh} & a_{h\,h+1}\\ a_{h+1\,1} & \dots & & C\end{pmatrix}$$

e scrivo lo sviluppo di Laplace dei loro determinanti rispetto alla $h+1$ colonna.

$$0 \underset{\uparrow}{=} \det M' = \sum_{j=1}^{h+1} M'_{h+1\,j}\, a_{j\,h+1} = \sum_{j=1}^{h} M'_{h+1\,j}\, a_{j\,h+1} + \underbrace{M'_{h+1,\,h+1}}_{\det M} a_{h+1\,h+1}$$

perchè M' è un orlato di M

$$0 \underset{\uparrow}{=} \det M'' = \sum_{j=1}^{h+1} M'_{h+1\,j}\, a_{j\,h+1} = \sum_{j=1}^{h} M'_{h+1\,j}\, a_{j\,h+1} + \underbrace{M''_{h+1,\,h+1}}_{\det M} \cdot C$$

perchè la colonna $h+1$ di M'' è combinazione lineare delle prime h colonne.

Risulta

$$\sum_{j=1}^{h} M'_{h+1\,j}\; a_{j\,h+1} + (\det M)\cdot a_{h+1\,h+1} = \sum_{j=1}^{h} M''_{h+1\,j}\; a_{j\,h+1} + (\det M)\cdot C$$

Osservando che $\forall\, j = 1, \dots h$

$$M'_{h+1\,j} = M''_{h+1\,j}$$

risulta $\qquad \cancel{(\det M)}\cdot a_{h+1\,h+1} = \cancel{(\det M)}\cdot C$

da cui

$$a_{h+1\,h+1} = C$$

3 Segue dal <u>lemma 2</u>.

$\boxtimes$