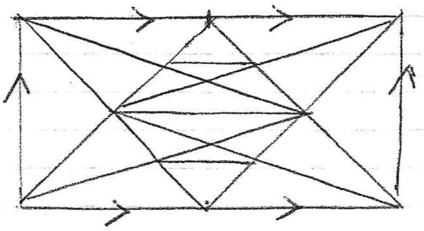
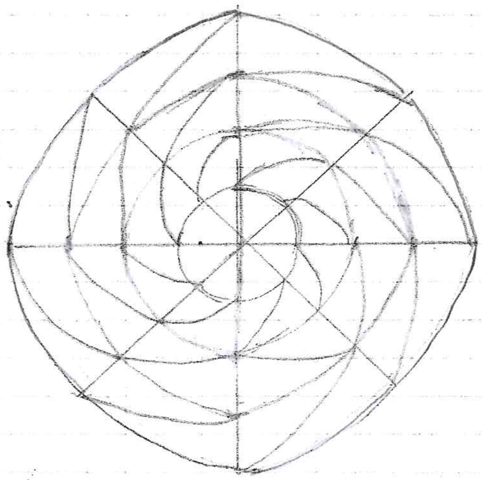
Laurea Magistrale in Matematica - A.A 2010/11

Corso di Metodi Geometrici per le Applicazioni

prof. M. Manaresi Foglio n. 1

1 – Si stabilisca se le seguenti suddivisioni in triangoli costituiscono una triangolazione di una superficie compatta. In caso positivo si stabilisca di quale superficie si tratta e se ne calcoli la caratteristica di Eulero.





2. Si determini la superficie assegnata mediante la triangolazione

123 234 345 451 512 136 246 356 416 526.

3. Provare che per ogni triangolazione di una superficie compatta senza bordo, indicati con t, l, v il numero dei triangoli, dei lati e dei vertici valgono le relazioni

$$3t = 2l, \quad l = 3(v - \chi) \qquad v \geq \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{49 - 24\chi}\right)$$

dove χ è la caratteristica di Eulero della superficie.

Stabilire qual è il minimo valore di t, l, v per la sfera, il toro e il piano proiettivo.

4. Si stabilisca qual è la superficie rappresentata da un poligono regolare di 10 lati identificati a coppie come indicato dai simboli $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$.

(Suggerimento: come sono identificati i vertici sul bordo?)

5. Si provi che il prodotto di una superficie e di una superficie con bordo è una varietà con bordo. Qual è il bordo del prodotto?

6. Quali superficie topologiche compatte con bordo sono omeomorfe a un sottospazio di $\mathbb{R}^2$? Dare la risposta in termini di caratteristica di Eulero, numero delle componenti connesse di bordo e orientabilità.

7. Sia X un G-spazio, dove G è un gruppo finito che agisce liberamente su X. Dimostrare che se X è una n-varietà compatta anche X/G lo è. Dimostrare che se X/G è una varietà anche X lo è.

8. Supponiamo che una superficie S sia un G-spazio, con G ciclico di ordine dispari. Provare che S/G è una superficie (senza supporre che l'azione di G sia libera).

9. Provare che su un toro bidimensionale T:
   - ci sono due curve chiuse semplici distinte (ma non disgiunte) C_1, C_2 tali che $T \setminus (C_1 \cup C_2)$ è connesso;
   - non ci sono tre curve semplici chiuse distinte C_1, C_2, C_3 tali che $T \setminus (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$ sia connesso.

10. Si costruiscano i modelli in $\mathbb{R}^3$ di superficie compatte e connesse aventi 3 componenti connesse di bordo e caratteristica di Eulero uguale a -4.

11. Si determini la caratteristica di Eulero delle seguenti superficie:

(a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^{10} + z^6 = 1\}$

(b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 13y^2 + 7z^2 - 10xy + 6xz - 12yz + 2x + 2y - 24z + 36 = 0\}$

(c) $S_3 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_0)^2 = x_0^2\}$

(d) $S_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} (x-2)^2 + (z-3)^2 = 4 \\ -3 \leq y \leq 3 \end{array}\right\}$