Laurea Magistrale in Matematica A.A. 2010/11

Corso di Metodi Geometrici per le Applicazioni

prof. M. Manaresi Foglio n. 2

1. Sia X uno spazio topologico con $X = U \cup V$, dove U e V sono aperti di X. Dimostrare che per ogni arco f in X la classe di equivalenza $[f]$ (dove $[f]$ denota la classe di omotopie di cammini con estremi fissi) può essere espressa come $[f] = [f_1][f_2]\cdots[f_q]$ in cui ogni f_j è un arco in U o in V.

2. Dati uno spazio topologico X, due punti $x, y \in X$ e due ~~punti~~ archi f, g da x a y, provare che i due archi f, g danno luogo allo stesso isomorfismo da $\pi(X,x)$ a $\pi(X,y)$ (cioè $u_f = u_g$) se e solo se $[g * \bar{f}]$ appartiene al centro di $\pi(X,x)$.
(Il centro di un gruppo G è il sottogruppo definito da $Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \quad \forall b \in G\}$

3. Trovare un esempio di funzione continua e iniettiva $\varphi : X \to Y$ tale che $\varphi_* : \pi(X,x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ non sia iniettiva e un esempio di funzione continua e suriettiva $\varphi : X \to Y$ tale che φ_* non sia suriettiva.

4. Dimostrare che l'insieme dei punti $x \in D^2$ (disco chiuso unitario di $\mathbb{R}^2$) tali che $D^2 \setminus \{x\}$ è semplicemente connesso coincide con il bordo S^1. Dimostrare che ogni omeomorfismo $f : D^2 \to D^2$ si ha $f(S^1) = S^1$

5 Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti spazi:
i) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; ii) $\mathbb{C}^*/\{e, a\}$ dove e è l'omeo=

morfismo identico e $a(z) = -\bar{z}$.

6. Trovare un rivestimento doppio $p : S^1 \times S^1 \to K$ dove K è la bottiglia di Klein.

7. Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento e siano $f, g : Y \to \tilde{X}$ due funzioni continue tali che $p \circ f = p \circ g$. Dimostrare che l'insieme dei punti $y \in Y$ su cui f, g coincidono è simultaneamente aperto e chiuso.

8. Dimostrare che in un rivestimento n-fold $p : \tilde{X} \to X$ (ossia per il quale $p^{-1}(x_0)$ consiste di n punti) il sottogruppo $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ha indice n in $\pi(X, x_0)$

9. Sia $Y = \mathbb{C}^*/K$ dove $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e K è il gruppo $\{\varphi^n, n \in \mathbb{Z}\}$ generato dall'omeomorfismo $\varphi(z) = 4z$. Calcolare il gruppo fondamentale di Y.

10. Si considerino le superficie

$S_1 = z - yz = 0 \qquad S_2 \quad z - y^2 - x^4 = 0$

$S_3 \quad x + y + z - x^2 - y^2 - z^3 = 0 \qquad S_4 \quad 2x^2 - 2y^2 - 4y + z + 1 = 0$

(a) Si stabilisca se l'origine è un punto parabolico, iperbolico o ellittico per S_i $i = 1, 2, 3$

(b) Si stabilisca se S_1 e S_4 sono superficie rigate.

11. Considerata la superficie $z = (x-2)(y-1)$ si scrivano le equazioni delle due schiere di rette in essa contenute.

12. Provi che la superficie parametrizzata

$x(u,v) = (v \cos u, v \sin u, au) \qquad 0 < u < 2\pi$
$\qquad -\infty < v < +\infty$

è una superficie rigata e se ne calcoli la linea di restringimento e il parametro di distribuzione

13. Si stabilisca se la superficie di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $y^2 = x^2 z$ è una superficie rigata e nel caso positivo se ne calcoli la linea di restringimento -