Corso di Laurea Magistrale in Matematica A.A. 2010/11

Corso di Metodi Geometrici per le Applicazioni $\boxed{\text{FOGLIO 3}}$

1. Provare che una curva C su una superficie regolare S è contemporaneamente una curva asintotica e una geodetica se e solo se è un segmento di retta.

2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ il paraboloide di rotazione $z = x^2 + y^2$.
   a) Si determini la curvatura geodetica dei paralleli
   b) Si mostri che una geodetica $\sigma : \mathbb{R} \to S$ di S che non sia un meridiano e che venga percorsa nella direzione crescente dei raggi dei paralleli interseca infinite volte tutti i meridiani.

3. Sia $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata secondo la lunghezza d'arco. Si definisca

$$\varphi(s, v) = \sigma(s) + v\, b(s) \qquad s \in [0,1] = I$$
$$v \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ con } \varepsilon > 0$$

dove $b(s)$ è il vettore binormale di $\alpha(s)$.
Si provi che se ε è piccolo $S := \varphi([0,1] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ è una superficie regolare su cui $\alpha(I)$ è una geodetica.

4 Sia V il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ definito da
$V(x_1, x_2) = x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$. Si determinino le curve integrali di V.

5. Siano $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ e
$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
$h : S_1 \to S_2$ e' applicazione che associa ad ogni

punto $P=(x,y,z)\in S_1$ il punto Q intersezione della semiretta uscente da $(0,0,z)$ e passante per P con la superficie S_2.

a) Si determinino i punti $P \in S_1$ in cui $d_P h$ è una isometria.

b) Si determinino una curva su S_1 di curvatura geodetica costante e non nulla che viene mandata da h in una geodetica.

⑥ Sia S la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t)=(3+2\cos t, 0, \operatorname{sen} t)$.
Dato $a\in[-1,1]$ sia σ_a la curva ottenuta intersecando S con il piano $z=a$.

(i) si calcoli la curvatura geodetica di σ_a per ogni $a\in[-1,1]$

(ii) Si determinino i valori di a per i quali la curva σ_a è una geodetica e si calcoli la lunghezza di σ_a in questi casi.

⑦ Sia S una superficie compatta orientabile di $\mathbb{R}^3$ non omeomorfa ad una sfera. Si mostri che S contiene punti ellittici, punti iperbolici e punti a curvatura gaussiana nulla.

⑧ Sia S l'ellissoide di equazione $x^2+y^2+4z^2=1$

(i) Si parametrizzino i lati del poligono geodetico $\Gamma\subset S$ avente per vertici i punti $P_1=(1,0,0)$,
$P_2=(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0, 0)$ per un fissato $\theta_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$,
$P_3=(0,0,\frac{1}{2})$

(iii) Si calcoli $\int_{P} K\,d\sigma$ sia direttamente sia utilizzando il teorema di Gauss Bonnet.

(9) Si determini la curvatura gaussiana K della superficie S di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x^2+y^2=(\cosh z$
e si calcoli $\int_S K\,d\sigma$

(10) Sia $S=S^2$ la sfera unitaria e per ogni $P\in S_2$ sia $\pi_P:\mathbb{R}^3\to T_P S^2$ la proiezione sul piano tangente a S^2 in P. Sia $X: S^2\to TS^2$ il campo di vettori su S dato da $\cancel{X}(P)=\pi_P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$

(i) Si dimostri che X ha esattamente due punti singolari P_1, P_2.

(ii) Si calcoli la somma degli indici dei punti singolari di X su S^2 e utilizzando le simmetrie del problema si mostri che $\mathrm{ind}_{P_1}(X)=$
$=\mathrm{ind}_{P_2}(X)=1$

(11) Mostrare che le equazioni delle geodetiche in coordinate geodetiche polari $(E=1, F=0)$ sono date da

$$\rho''-\frac{1}{2}G_\rho(\theta')^2=0$$

$$\theta''+\frac{G_\rho}{G}\rho'\theta'+\frac{1}{2}\frac{G_\theta}{G}(\theta')^2=0$$

(12) Provare che in un sistema di coordinate normali centrate in P tutti i simboli di Christoffel sono zero in P.

(13) Diciamo che una successione $\{P_n\}$ di punti di una superficie regolare S converge a un punto $P_0\in S$ nella distanza intrinseca d se dato $\varepsilon>0$ esiste un indice n_0 tale che $\forall\ n\geq n_0$ $d(P_n,P_0)<\varepsilon$

Provare che una successione $\{P_n\}$ di punti di S converge in d a $P_0 \in S$ se e solo se $\{P_n\}$ converge a P_0 come successione di punti di $\mathbb{R}^3$, cioè nella distanza euclidea.

(14) Si consideri il semipiano superiore $\mathbb{R}^2_+$ con la metrica

$$E(x,y) = 1 \ , \quad F(x,y) = 0 \ , \quad G(x,y) = \frac{1}{y} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ .$$

i) Si calcoli la lunghezza dei segmenti di retta $y = mx$, $m \in \mathbb{R}^+$, $0 < \varepsilon \leq x \leq 1$ e si calcoli il limite di questa lunghezza al tendere di ε a 0.

ii) Si calcoli la lunghezza del segmento verticale $x = 0$, $0 < \varepsilon \leq y \leq 1$ e se ne calcoli il limite per $\varepsilon \to 0$

iii) Si stabilisca se questa metrica è completa

(15) Sia S una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$, chiusa in $\mathbb{R}^3$ con curvatura Gaussiana e curvatura media costanti e priva di punti ombelicali. Si provi che S è un cilindro circolare retto.