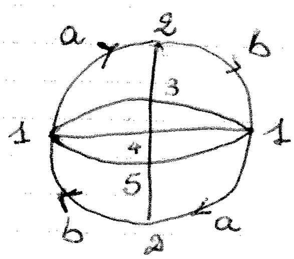
Laurea Magistrale in Matematica AA 2009/10

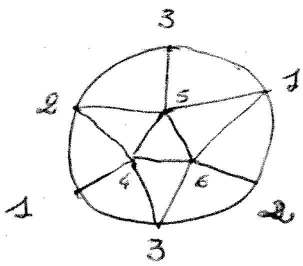
Corso di Metodi geometrici per le applicazioni (II parte)

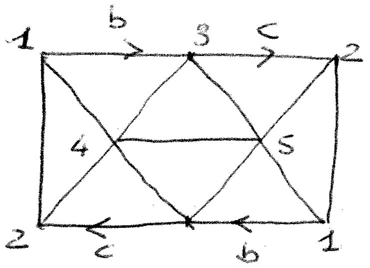
prof. M. Manaresi

Foglio n. 1

(1) Si stabilisca quale delle seguenti suddivisioni in triangoli del piano proiettivo è una triangolazione







(2) Si determini la superficie assegnata mediante la triangolazione: 1 2 3 2 3 4 3 4 1 4 1 2

(3) Si provi che n cerchi massimi, tali che per un punto di intersezione di due di essi non ne passi mai un terzo, dividono la superficie sferica in $n^2 - n + 2$ parti

(4) Provare che non è possibile suddividere la superficie di una sfera in regioni esagonali tali che regioni distinte abbiano non più di un lato in comune.

(5) Sia S_1 una superficie somma connessa di m tori, $m \geq 1$ e S_2 una superficie somma connessa di n piani proiettivi, $n \geq 1$. Supponiamo di fare due buchi in ciascuna delle superfici e di attaccare insieme le superfici lungo i bordi dei buchi. Quale superficie si ottiene con questo processo?

(6) Quale superficie è rappresentata da un poligono regolare di 10 lati con i vertici identificati a coppie come indicato dai simboli

$$abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1} \; ?$$

(Suggerimento: Quali sono i vertici identificati sul bordo?)

(7.) Quali superficie sono rappresentate da un poligono di $2n$ lati con i lati identificati a coppie secondo i simboli

(a) $a_1 a_2 \dots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} a_n$?

(b) $a_1 a_2 \dots a_n a_1^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}$?

(sugg: i casi n pari e n dispari sono diversi)

8.) Sia P un poligono. Si suppone che certe coppie di vertici P siano identificate una con tutti i vertici di P ricentrino fra queste coppie. Si provi che lo spazio quoziente è una superficie compatta, connessa, con bordo.

(9) Si elenchino tutte le superficie compatte connesse M, con o senza bordo, tali che

$$-2 \leq \chi(M) \leq +2 \quad (\chi = \text{caratteristica di Eulero}).$$

(10) Si provi che la caratteristica di Eulero di una superficie compatta con bordo avente k componenti è $\leq 2-k$.

(11) Si definisce genere di una superficie compatta S

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(S)) & \text{se } S \text{ è orientabile} \\ 2 - \chi(S) & \text{se } S \text{ è non orientabile;} \end{cases}$$

si definisce genere di una superficie compatta con bordo $\tilde{S}$ il genere della superficie compatta S ottenuta attaccando a $\tilde{S}$ un disco per ogni componente di bordo. Si dia una formula per il genere di $\tilde{S}$ in termini di $\chi(\tilde{S})$ e delle componenti di bordo