

① Dimostrare che uno spazio topologico X è connesso se e solo se l'applicazione identica $\text{id} : X \rightarrow X$ è omotopa ad una funzione costante.

② Dimostrare che uno spazio topologico Y omotopicamente equivalente ad uno spazio topologico connesso X è anch'esso connesso.

③ Siano $f : S^1 \rightarrow S^1$ l'applicazione definita da $f(z) = z^k$ dove $k \in \mathbb{Z}$. Descrivere l'omomorfismo $f_* : \pi(S^1, 1) \rightarrow \pi(S^1, 1)$ in termini dell'identificazione $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

④ Dimostrare che l'esistenza dei punti $z \in D^2 \setminus \{z\}$ (disco chiuso unitario di $\mathbb{R}^2$) per i quali $D^2 \setminus \{z\}$ è semplicemente connesso coincide con il bordo S^1 .
Dimostrare poi che $\forall$ ogni omomorfismo $f : D^2 \rightarrow D^2$ si ha che $f(S^1) = S^1$.

⑤ Dimostrare che il toro bidimensionale T^2 non è omeomorfo allo sfera S^2 .

⑥ Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

⑦ Trovare un orientamento doppio $p : S^1 \times S^1 \rightarrow K$ dove K è la bottiglia di Klein.

⑧ Siano $p : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la proiezione canonica della sfera sul primo proiettivo reale e γ una curva semplice chiusa in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (come un sotto-spazio omeomorfo a S^1).

Dimostrare che $p^{-1}(\gamma)$ è una curva semplice chiusa o un'unione disgiunta di due curve semplici chiuse (suggerimento: rappresentare γ come un'unione di due componenti chiuse di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).

- (9) Stabilisce se esiste una spazi topologica Y tale che $S^1 \times Y$ sia omeomorfo a $P^2(\mathbb{R}) \cup \{0\}$, S^2 .
- (10) Siano X e Y due spazi topologici di Hausdorff e 0 non numerabile. Prova che X è una varietà topologica di dimensione n se e solo se lo è Y .
- (11) Siano $\tilde{X}$ uno spazio coperto per archi, X uno spazio semplicemente connesso e $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Prova che p è un omeomorfismo.
- (12) Sia $X = \mathbb{R} \times [-1, 1] \subset \mathbb{C}$. Dimostrare che l'endomorfismo $T(z) = \bar{z} + 1$ si ottiene un omeomorfismo $T: X \rightarrow X$. Indicato con G il gruppo generato da T in frai che X/G è uno spazio di Möbius (senza bordo) e si deduce che il gruppo fondamentale dello spazio di Möbius è isomorfo a $\mathbb{Z}$.
- (13) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie ^{regolare} completa e $F \subset S$ una sua sottosuperficie chiusa tale che $S \setminus F$ non sia connessa. Prova che $S \setminus F$ è una superficie regolare non completa.
- (14) Prova che l'applicazione $\pi: S \setminus L \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dove S è l'elicoide generato dalla retta $ax + by + cz = 1$ e l'elica $(\cos t, \sin t, bt)$, L è l'asse z , $\pi(x, y, z) = (x, y)$, è un rivestimento.
- (15) Introdurre una metrica nel piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$ tale che la funzione definita $p: S^2 \rightarrow P^2$ è un'isometria locale. Qual è la costante gaussiana di $P^2(\mathbb{R})$ in tale metrica?
- (16) Sia C il cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, e sia $\alpha: C \rightarrow C$ la mappa definita da $\alpha(x, y, z) = (-x, y, z)$. Il suo spazio quoziente

ottenuto da C identificando i punti che non corrispondono ad et e me. $\pi: C \rightarrow C/\sim$ è, per la non ridondante.

(16) Prova che sul M può essere data una struttura differenziabile che rende π un differenziabile locale.

(b) Si introduce su M una metrica Riemanniana che rende π un'isometria locale e si calcola la curvatura $\forall$ di M in tale metrica.

(17) Si consideri il semipiano superiore $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ con la metrica $E(x, y) = 1$, $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$.

Si provi che la lunghezza dei vettori diventa arbitrariamente grande quando ci si avvicina al bordo e che la curvatura del rappresent. verticale $x=0, 0 < y \leq 1$.

Perché è 2 il tensore di E₀

Si conclude che tale metrica non è completa.

(18) Siano $\tilde{S}$ e S due varietà geometriche connesse e no $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ un'applicazione differenziabile suriettiva che è un disomorfismo e un'isometria locale.

(a) Si provi che S è completa se e solo se $\tilde{S}$ è completa.

(b) La metrica nella varietà M dell'esercizio (16) è completa?